
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی
(گرایش محض)

عنوان :

یک روش عمومی برای قانون قوی اعداد بزرگ و کاربردهای آن

از :

محمدرضا داودی گشتی

استاد راهنما :

دکتر علی اصغر ورسه ای

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم و همسر مهربانم

تقدیر و تشکر

از خداوند متعال بی نهایت شاکرم که این توفیق را عنایت فرمودند تا کار پایان نامه را با موفقیت به اتمام برسانم.

بر خود لازم می دانم از زحمات همسر عزیزم که در فراز و نشیب این راه همواره همراهم بود و مهربانیها ودلگرمی هایش را توشه ی راهم ساخت برای رسیدن به هدفم تشکر و قدردانی نمایم.

از زحمات بی دریغ استاد ارجمند جناب آقای دکتر علی اصغر ورسه ای که با متانت و مهربانی مرا از راهنمایی ها و نظرات خود بهره مند ساختند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از داوران گرامی، بخصوص از جناب آقای دکتر حسین صمیمی که در طول کار نکات اصلاحی ارزشمندی برای پایان نامه ارائه فرمودند تشکر و سپاسگزاری می نمایم.

محمدرضا داودی گشتی

شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

چکیده

عنوان : یک روش عمومی برای قانون قوی اعداد بزرگ و کاربردهای آن

محمدرضا داودی گشتی

در این پایان نامه یک روش عمومی برای اثبات قانون قوی اعداد بزرگ با استفاده از احتمال دُم بیشینه ارائه می شود و از آن نرخ همگرایی $\frac{S_n}{n}$ هم برای دنباله های مرتبط مثبت وهم برای دنباله های مرتبط منفی به دست می‌آید و نشان داده می‌شود که نرخ همگرایی $\frac{S_n}{n}$در این حالتها نزدیک به نرخ همگرایی در حالت متغیر های تصادفی مستقل است.

کلید واژه ها : قانون قوی اعداد بزرگ ، دُم احتمال مجموع های بیشینه ، متغیرهای تصادفی مرتبط ، نرخ همگرایی .

Abstract :

Title :A general method to the strong law of large numbers and its applications.

Mohamd reza Davoodi Ghashti

In this dissertation, a general method is given to prove the strong law of large numbers by using the maximal tail probability and the convergence rate of $\frac{S_n}{n}$ for both positively associated sequences and negatively associated sequences is obtained from this general method and also it has been shown that the convergence rate of $\frac{S_n}{n}$ in these cases is close to the convergence rate of independent random variables

Keywords : Strong Law of large numbers ; Tail Probability of Maximal Sums ; Associated Random Varible ; Rate of Convergence.

مقدمه

قانون قوی اعداد بزرگ یکی از مفاهیم مهم در نظریه احتمال است. صورت‌های گوناگونی از آن تاکنون ارائه و مورد بررسی قرار گرفته است. ساده ترین حالت آن برای متغیر های تصادفی مستقل و هم توزیع است. حالت خاصی از این قانون برای متغیر های برنولی برای نخستین بار توسط« ژاکوب برنولی»[۱] اثبات شد. او این قضیه را قضیه طلایی نامید، ولی بعد ها به نام قانون اعداد بزرگ مشهور شد. در سال ۱۸۳۵ «سیمون دنیز پواسون» این قانون را به نام قانون اعداد بزرگ توضیح داد. هم اکنون این قضیه با هر دو نام ذکر شده شناخته می شود. بعد از برنولی و پواسون ریاضیدانان دیگری مانند« مارکف[۲]» ، «چبیشف»[۳] ،« بورل»[۴] و« کلموگروف[۵]» برای بهبود این تعریف و اثبات آن تلاش کردند در نهایت «الکساندر خینچین[۶]» برای هر متغیر تصادفی دلخواه آن را اثبات کرد. این تلاش ها منجر به پیدایش دو حالت مختلف از این قانون شد، این دو حالت عبارت است از قانون ضعیف و قوی . قانون ضعیف و قوی اعداد بزرگ دو قانون متفاوت نیستند، .بلکه این دو قانون از دو دیدگاه متفاوت موضوع همگرایی احتمال وقتی مقدار دفعات آزمایش زیاد است به مقدار میانگین را توضیح می دهند. همچنین می توان قانون ضعیف را از قانون قوی نتیجه گرفت. در این رساله به معرفی و بررسی مفاهیم قانون اعداد بزرگ و کار برد آن برای دنباله های مرتبط مثبت و دنباله های مرتبط منفی می پردازیم. مطالب این رساله در چهار فصل تنظیم شده است . فصل اول به مفاهیم و قضایای آنالیز حقیقی اختصاص یافته است . در فصل دوم به مفاهیم نظریه احتمال می‌پردازیم . فصل سوم در مورد روش های عمومی برای اثبات قانون قوی اعداد بزرگ و کاربردهای آن می پردازیم.درفصل چهارم نیز درباره ی قانون قوی اعداد بزرگ برای دنباله های مرتبط مثبت و دنباله های مرتبط منفی می پردازیم .

---

۱ .Jacob Bernoulli

۲.Markov

۳.Chebyshev

۴. Borel

۵.Kolmogorov

۶. Alexander khenchen

فصل اول

مطالب پیش نیاز آنالیز حقیقی

مقدمه. در این فصل به یاد آوری تعاریف و قضایای اساسی می‌پردازیم که در مباحث ارائه شده در این پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرند.

۱-۱- فضاهای اندازه

تعریف ۱-۱-۱. فرض می کنیم X مجموعه ای ناتهی و $\mathcal{C}$ دسته ای ناتهی از زیر مجموعه های X باشد. $\mathcal{C}$ را «نیم حلقه[۱]» گوئیم اگر تحت اشتراک های متناهی بسته باشد و تفاضل هر دو عضو $\mathcal{C}$ را بتوان برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دو بدو مجزای $\mathcal{C}$ نوشت و $\mathcal{C}$ را حلقه گوئیم اگر $\mathcal{C}$ تحت اجتماعهای متناهی و تفاضل بسته باشد و آن را «$\sigma-$ حلقه[۲]» گوئیم اگر $\mathcal{C}$ تحت اجتماعهای شمارش پذیر و تفاضل بسته باشد.

تعریف ۱-۱-۲- $\mathcal{C}$ را «نیم میدان[۳]» گوئیم اگر $\mathcal{C}$ تحت اشتراک های متناهی بسته باشد و مکمّل هر عضو $\mathcal{C}$ را بتوان به صورت اجتماع متناهی از اعضای دو بدو مجزّای $\mathcal{C}$ نوشت و $\mathcal{C}$ را یک میدان گوئیم اگر $\mathcal{C}$ تحت اجتماعهای متناهی و مکمل بسته باشد و آن را «$\sigma-$ میدان[۴]» گوئیم اگر $\mathcal{C}$ تحت اجتماعهای شمارش پذیر و مکمل بسته باشد.

ملاحظه ۱-۱-۱. هر $\sigma-$ حلقه یک حلقه و هر حلقه یک نیم حلقه است .

ملاحظه ۱-۱-۲. هر $\sigma-$ میدان یک میدان و هر میدان یک نیم میدان است .

تعریف ۱-۱-۳. فرض کنید $\mathcal{C}$ دسته ای ناتهی و دلخواه از مجموعه ها باشد.منظور از یک اندازه روی $\mathcal{C}$ (در $\mathcal{C}$) تابعی است مانند μ با دامنه $\mathcal{C}$ به طوری که برای هر A در $\mathcal{C}$ ، $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ و هرگاه $\{A_n\}_{n\geq 1}$ دنباله ای (متناهی یا نامتناهی) از اعضای دوبدو مجزای $\mathcal{C}$ باشد به طوری که $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{C}$ آنگاه $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$. خاصیت اخیر را «$\sigma-$ جمع پذیری[۵]» برای μ گویند.

۱.Semiring

۲.σ- Semiring

۳.Semifield

۴.σ-field

۵.σ-additivite

تعریف ۱-۱-۴. اشتراک تمام $\sigma -$ میدان های شامل $\mathscr{C}$ را $\sigma -$ میدان تولید شده توسط $\mathscr{C}$ گوئیم که کوچکترین $\sigma -$ میدان شامل $\mathscr{C}$ است.

تعریف ۱-۱-۵. فرض می کنیم X مجموعه ناتهی $\mathscr{P}(X)$ مجموعه توانی آن باشد . تابع $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty)$ را یک اندازه خارجی می‌گوییم هرگاه μ^* در شرایط زیر صدق کند

(۱) $\mu^*(\phi) = 0$

(۲) اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$

هرگاه $\{A_n\}_{n\geq 1}$ دنباله ای نامتناهی از اعضاء $\mathscr{P}(X)$ باشد آنگاه $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

تعریف ۱-۱-۶. اگر μ^* یک اندازه خارجی روی مجموعه X باشد ، مجموعه $E \subseteq X$ را μ^* اندازه پذیر می‌گوییم اگر برای هر مجموعه دلخواه B از X داشته باشیم

$$\mu^*(B) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E^c \cap B).$$

قضیه «گسترش کاراتئودوری[۱]**» ۱-۱-۷.** فرض کنید $\mathscr{H}$ نیم حلقه ای از زیر مجموعه های X و μ یک اندازه در $\mathscr{H}$ باشد به طوری که تعدادی شمارش پذیر از اعضاء $\mathscr{H}$ با اندازه ی متناهی، X را بپوشاند ،آنگاه μ ،گسترشی یگانه به یک اندازه روی $\sigma -$ میدان تولید شده توسط $\mathscr{H}$ در X دارد.

برهان : به [۲] رجوع کنید.

تعریف ۱-۱-۸. دریک فضای توپولوژیکی ، $\sigma -$ جبر تولید شده توسط مجموعه های باز ، $\sigma -$ جبر بورل نامیده می شود.

[۱]. caratheodory extension theorem

ملاحظه ۱-۱-۳. به طور خاص ، در فضای اقلیدسی R^k ، $\sigma -$ جبر تولید شده توسط مجموعه های باز $\sigma -$ جبر بورل نامیده می شود و با B_k نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۹. فرض می کنیم $(X,\mathscr{A})$ یک فضای اندازه پذیر و μ و ϑ اندازه هایی روی آن باشند . می‌گوئیم μ نسبت به ϑ مطلقاً پیوسته است و می نویسیم $\vartheta >> \mu$، هرگاه برای هر $A \in \mathscr{A}$، اگر $\vartheta(A) = 0$ آن گاه $\mu(A) = 0$.

ملاحظه ۱-۱-۴. در سراسر این رساله ، $\sigma -$ میدان مفروض روی R، $\sigma -$ میدان بورل است.

تعریف ۱-۱-۱۰. اگر $X=R$ (یا R^n) و $\mathscr{H}$ مجموعه ی بازه ها (یا جعبه ها) و μ تابع طول (یا تابع حجم) باشد ، زیر مجموعه های اندازه پذیر R (یا R^n) نسبت به μ^* تشکیل یک $\sigma -$میدان می‌دهند که آن را « $\sigma -$ میدان لبگ»گوئیم.

تعریف ۱-۱-۱۱. منظور از یک «فضای اندازه پذیر[۱]» یک زوج $(X,\mathscr{A})$ متشکل از یک مجموعه مانند X و $\sigma -$ میدان $\mathscr{A}$ ، از زیر مجموعه های X می باشند . هر عضو $\mathscr{A}$ را یک «مجموعه ی اندازه پذیر » می نامیم.

تعریف ۱-۱-۱۲. منظور از «فضای اندازه» عبارت است از : سه تایی $(X, \mathscr{A}, \mu)$ که $(X, \mathscr{A})$ یک فضای اندازه پذیر و μ یک اندازه روی $\sigma -$ میدان $\mathscr{A}$ است.

تعریف ۱-۱-۱۲. فرض می‌کنیم f تابعی از فضای اندازه پذیر $(X,\mathscr{A})$ به R باشد ، f را تابع بورل می گوییم اگر f نسبت به $\mathscr{A}$ و $\sigma -$ میدان بورل اندازه پذیر باشد.

قضیه ۱-۱-۱۳. اگر $\{f_n , n \geq 1\}$ دنباله ای از فضای اندازه پذیر $(X,\mathscr{A})$ باشد ، آنگاه تابع های $\inf f_n$ و $\sup f_n$ و $\min f_n$ و $\max\limits_{1\leq n\leq k} f_n$ و $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ و $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ اندازه پذیرند .

برهان : به [۱۱] رجوع کنید .

تعریف ۱-۱-۱۴. می‌گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه $(X,\mathscr{A},\mu)$ تعریف شده است تقریبا همه جا (a.e.) برقرار است ، هرگاه مجموعه نقطه هایی که دارای آن خاصیت نیستند ، اندازه پذیر و دارای اندازه صفر باشند.

---

[۱] Measurable space

۱-۲- انتگرال نسبت به یک اندازه

تعریف ۱-۲-۱. اگر A مجموعه ای دلخواه از $\sigma-$ میدان$\mathscr{A}$ باشد ، تابع مشخصه ی مجموعه یA را با عبارت χ_A یا I_A

نشان می‌دهیم و به صورت $\chi_A=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۲-۲. به تابعی با دامنه دلخواه و مقادیر حقیقی (مقادیر حقیقی گسترش یافته) که تعداد متناهی عضو داشته باشد تابع ساده می‌گوییم. فرض می‌کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه ی $(X,\mathscr{A},\mu)$ با مقادیر متمایز $a_1,\dots,a_n$ باشد می توان نوشت

$\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}\,,n\in N$ که در آن $A_i=\{x\in X:\varphi(x)=a_i\}$.

اندازه پذیری φ معادل است با اینکه بگوییم مجموعه های $\varphi^{-1}\{a_i\}=\{x:x\in X\,,\varphi(x)=a_i\}$ اندازه پذیرند .

انتگرال φ نسبت به μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$\int_X\varphi d\mu=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i)$. یادآور می شویم که دامنه تابع فضای اندازه $(X,\mathscr{A},\mu)$ است.

قرار داد می‌کنیم که $0\times\infty=0$.

تعریف ۱-۲-۳. فرض می کنیم $(X,\mathscr{A},\mu)$ یک فضای اندازه و $f:X\to[0,\infty]$ تابعی اندازه پذیر باشدو انتگرال f نسبت به اندازه μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int f\,d\mu=\sup\{\int\varphi\,d\mu:\quad 0\le\varphi\le f\quad \text{و } \varphi \text{ تابعی ساده و اندازه پذیراست}\}$$

تعریف ۱-۲-۴. یک تابع اندازه نامنفی f را روی مجموعه اندازه پذیرA ، $\mu-$ انتگرال پذیر می‌گوییم هرگاه $\int_A f\,d\mu<\infty$.

قضیه ۱-۲-۵. فرض می کنیم f تابعی اندازه پذیر و نامنفی روی X باشد و $A_1,A_2,\dots$ دنباله ای از اعضای دوبدوی مجزّایی باشند با فرض $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ ، در صورتی که f نسبت به اندازه μ انتگرال پذیر باشد خواهیم داشت

$\int_A f\,d\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i}f\,d\mu$.

برهان : به [۱۱] رجوع کنید.

قضیه همگرایی یکنوا[۱] : ۱-۲-۶. اگر f_1 ، f_2 ،... دنباله ای از تابع های نامنفی ، صعودی و $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ باشد ، در صورتی که توابع f ، f_1 ، f_2 ،... نسبت به μ انتگرال پذیر باشد ،آن گاه

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\, d\mu = \int_A f\, d\mu \ .$$

برهان : به [۱۱] رجوع کنید.

تعریف ۱-۲-۷. اگر f یک تابع حقیقی باشد داریم

$$f^{+} = \begin{cases} f & f \geq \circ \\ \circ & f < \circ \end{cases} \quad \text{و} \quad f^{-} = \begin{cases} -f & f \leq \circ \\ \circ & f < \circ \end{cases}$$

$$f = f^{+} - f^{-} \qquad \text{و} \qquad |f| = f^{+} + f^{-}$$

تعریف ۱-۲-۸. اگر تابع f اندازه پذیر باشد (دامنه f یک فضای اندازه و مقادیر تابع حقیقی) آن گاه f^{+} و f^{-} نیز اندازه پذیر خواهند بود . طبیعی است که $\int f$ را تعریف کنیم $\int f = \int f^{+} - \int f^{-}$. پس f را انتگرال پذیر گوییم هرگاه دست کم یکی از مقدار های $\int f^{-}$ یا $\int f^{+}$ متناهی باشد .

قضیه ۱-۲-۹. فرض می کنیم f تابعی اندازه پذیر روی فضای $(X,\mathscr{A},\mu)$ باشد. f دارای انتگرال متناهی است اگر و فقط اگر $|f|$ دارای انتگرال متناهی باشد هم چنین اگر f انتگرال پذیر باشد آن گاه

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$$

برهان : به [۱۱] رجوع کنید.

---

[۱].Monotone convergence theorem

قضیه همگرایی تسلطی لبگ ۱-۲-۱۰. اگر $\{f_n \ , \ n \geq 1\}$ دنباله ای از تابع های اندازه پذیر ، g تابعی نامنفی و انتگرال پذیر روی فضای اندازه ی $(X,\mathscr{A},\mu)$ باشد ، به طوری که برای هر n ، $|f_n| \leq g \quad a.e.$ و $f_n \to f \quad a.e.$ آنگاه f و f_n ها انتگرال پذیرند و $\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu$.

برهان : به [۱۱] رجوع کنید.

قضیه ۱-۲-۱۱. فرض می کنیم $\{f_n \ , \ n \geq 1\}$ دنباله ای از توابع انتگرال پذیر و با انتگرال متناهی باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n| < \infty$ در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ تقریباً همه جا همگراست و $\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n$.

برهان : به [۱۱] رجوع کنید.

تعریف۱-۲-۱۲. اندازه‌ی μ را $\sigma -$ متناهی گوئیم هرگاه دنباله ای مانند $\{I_n\}$ از اعضای $\mathscr{H}$ وجود داشته باشد که $X \subseteq \bigcup_{n\geq 1} I_n$ و $\mu(I_n) < \infty \quad \forall n$.

«قضیه رادون – نیکودیم»[۱] . ۱-۲-۱۳ . اگر μ اندازه ای $\sigma -$ متناهی و ϑ اندازه ی علامتدار و $\sigma -$ متناهی روی $\mathscr{A}$ باشند و $\vartheta << \mu$ آنگاه تابع اندازه پذیر و نامنفی f_0 وجود دارد بطوری که $\int_A f_0 d\mu = \vartheta(A)$ برای هر A در $\mathscr{A}$. اگر g تابع اندازه پذیر و نامنفی دیگری با خاصیت مذکور باشد آنگاه $g = f_0 \quad a.e.$. هر تابع مانند f_0 را یک مشتق رادون – نیکودیم ϑ نسبت به μ می‌گوییم.

برهان : به [۱۱] رجوع کنید.

قضیه فاتو – لبگ[۲] . ۱-۲-۱۴ . اگر $\{f_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از تابع های اندازه پذیر و g تابع نامنفی و انتگرال پذیر روی فضاهای اندازه های $(X,\mathscr{A},\mu)$ باشند به طوری که به ازای هر n ، $|f_n| < g \qquad a.e.$

[۱].Radon – Nikodym theorem

[۲].Fatou-lebesgue theorem

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n$$

برهان : به [۱۱] رجوع کنید.

۱-۳- فضای حاصل ضربی

تعریف ۱-۳-۱- فرض کنید $(X_1, A_1),\ldots,(X_n, A_n)$ فضاهای اندازه پذیر باشند و $Z = X_1 \times \ldots \times X_n$. زیر مجموعه های Z به صورت $A_1 \times \ldots \times A_n$ را برای $A_1 \subseteq X_1,\ldots, A_n \subseteq X_n$ راست گوشه (مستطیل) و برای حالتی $A_n \in \mathscr{A}_n$، ...، $A_2 \in \mathscr{A}_2$ ، $A_1 \in \mathscr{A}_1$ آن را راست گوشه ی اندازه پذیرمی‌گوییم. دسته راست گوشه ها و دسته ی راست گوشه های اندازه پذیر هریک نیم میدان و در نتیجه یک نیم حلقه درZ می باشند . σ – میدان تولید شده درZ ،توسط نیم میدان راست گوشه های اندازه پذیر را σ – میدان حاصل ضربی $\mathscr{A}_n$ ،...،$\mathscr{A}_2$ ،$\mathscr{A}_1$ می نامیم وبا نماد $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_n$ نشان می دهیم.

اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ μ_i یک اندازه روی $\mathscr{A}_i$ باشد با قرار دادن $0 \times \infty = 0$ ،تعریف می کنیم

$$\lambda(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \times \ldots \times \mu_n(A_n)$$

λ یک اندازه روی نیم حلقه راست گوشه های اندازه پذیر خواهد بود. اگر μ_i ها همه σ – متناهی باشند.در این صورت λ نیز σ – متناهی است و لذا بنابه قضیه گسترش کاراتئودوری ، گسترشی یگانه به اندازه ای روی $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_n$ دارد که آن را اندازه ی حاصل ضربی $\mu_1, \mu_2,\ldots, \mu_n$ می نامیم و به صورت $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ نشان می دهیم.

فضای $(Z$ و $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_n)$ را فضای اندازه حاصل ضربی $(X_1,\mathscr{A}_1)$و...و$(X_n,\mathscr{A}_n)$ می نامیم.

قضیه فوبینی . ۱-۳-۲. اگر $(X,\mathscr{A},\mu)$ و$(Y,\mathscr{B},\vartheta)$ فضاهای اندازه σ – متناهی باشند و $\lambda = \mu \otimes \vartheta$ و همچنین $h : X \times Y \to R$ ، تابعی $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ اندازه پذیر و λ – انتگرال پذیر (انتگرال متناهی) باشد، آنگاه

(۱) برای تقریباً تمام x ها در X ، تابع $y \mapsto h(x, y)$ ، نسبت به ϑ انتگرال پذیر است .

(۲) تابع $x \mapsto \int_{Y} h(x, y)\, \vartheta(dy)$ روی X، μ – انتگرال پذیر است .

(۳) اگر تابع مذکور در قسمت دوم را g بنامیم ، داریم :

$$\int_{X} g(x)\, \mu(dx) = \int_{X \times Y} h(x, y)\, \lambda(dx, dy)$$

برهان : به [۲] رجوع کنید .

فصل دوم

نظریه احتمال

نظریه احتمال

مقدمه. احتمال یکی ازچندین کلمه ای است که برای اتفاقات با معلومات مشکوک به کار می رود.البته شانس، شرط بندی مفاهیمی مشابه احتمال را در ذهن ایجاد می‌کنند. در نظریه احتمال سعی برارائه مفهوم احتمال است. امروزه نظریه احتمال به بسیاری از شاخه های دیگر ریاضیات و بسیاری از حوزه ها ی علوم طبیعی، تکنولوژی و اقتصاد مرتبط است. نظریه احتمالات مطالعه رویدادهای احتمالی از دیدگاه ریاضیات است. به عبارت دیگر،نظریه احتمالات به شاخه ای از ریاضیات گویندکه با تحلیل وقایع تصادفی سروکار دارد.هسته تئوری احتمالات را متغیر های تصادفی و فرایند های تصادفی و پیشامد ها تشکیل می‌دهند. تئوری احتمالات علاوه بر توضیح پدیده های تصادفی، به بررسی پدیده های تصادفی می پردازد که لزوماًتصادفی نیستند ولی با تکرار زیاد دفعات آزمایش نتایج از الگویی مشخص پیروی می کنند.

۲-۱ متغیر تصادفی

تعریف ۲-۱-۱. یک «فضای احتمال[۱]» عبارت است از

فضای اندازه ی $(\Omega,\mathscr{F},P)$ ، به طوری که $P(\Omega)=۱$.

بنابراین فضای احتمال ، یک فضای اندازه خاص است . Ω را «فضای نمونه[۲]» و اعضای$\mathscr{F}$ را «پیشامد[۳]» گویند .

تعریف ۲-۱-۲. اگر $(\Omega,\mathscr{F},P)$ یک فضای احتمال باشد ، یک تابع اندازه پذیر با دامنه ی Ω و مقادیر حقیقی «متغیر تصادفی[۴]» نامیده می‌شود . معمولا از حروف بزرگ لاتین مثل X ، Y ، Z ، U ،.... برای نشان دادن متغیرهای تصادفی استفاده می‌شود .

قرارداد . اگر X یک متغیر تصادفی باشد . به جای $\{X(\omega)$ خاصیت A دارد . $\omega\in\Omega\}$ از عبارت $\{X$ خاصیت A دارد$\}$ استفاده می‌کنیم مثلاً به جای $\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in\beta\}$ می نویسیم $\{X\in\beta\}$.

۱.Probability space

۲.sample space

۳.Event

۴.Random Varible

تعریف ۲-۱-۳. فرض می‌کنیم X یک متغیر تصادفی‌باشد. $\sigma -$ میدان تولیدشده توسط X را به صورت $\sigma(X) = \{X^{-1}(A) : A \in \beta\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲-۱-۴. فرض می‌کنیم $X_1 ,..., X_n$ متغیرهای تصادفی روی یک فضای احتمال باشند. $\sigma -$میدان تولید شده به وسیله ی بردار تصادفی $(X_1 ,..., X_n)$ کوچکترین $\sigma -$ میدانی است که شامل $\sigma -$ میدان های تولید شده، به وسیله هریک از متغیرهای تصادفی $X_1 ,..., X_n$ می باشند که آن را با $\mathscr{A}_n$ نشان می دهیم. $\mathscr{A}_n$را با عبارت $\sigma(X_1 ,..., X_n)$ نیز نشان می‌دهیم.

قضیه ۲-۱-۵. F دارای خواص زیر است

الف) F غیر نزولی است.

ب) $\lim_{x \downarrow -\infty} F(x) = 0$ و $\lim_{x \uparrow \infty} F(x) = 1$

ج) F در هر نقطه از طرف راست پیوسته و از طرف چپ دارای حد است.

هر تابع با خواص فوق یک تابع توزیع احتمال نامیده می‌شود.

قضیه ۲-۱-۶. فرض‌می‌کنیم F=F(x) یک تابع توزیع با شرایط احتمال روی R باشد در این صورت یک اندازه ی احتمال یکتای P روی $(\mathrm{R}, \mathscr{B})$ وجود داردکه درآن $\mathscr{B}$، $\sigma -$ میدان بورل است،به طوری که برای هرa وbحقیقی‌که $a < b$،

$$P(a,b] = F(b) - F(a)$$

برهان : به [۱۳] رجوع کنید.

تعریف ۲-۱-۷. اگر $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ فضای اندازه احتمال و X یک متغیر تصادفی باشد، تابع توزیع X که آن رابا F_X نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_x(x) = P_x(-\infty, x] = P\{X \le x\}, x \in \mathrm{R} \ .$$

که در آن P_xاندازه ی القا شده توسط Xروی Rاست.