بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات

نامساوی هایی در انتگرال فازی

استاد راهنما:

دکتر محمد علی ولی

استاد مشاور:

دکتر محمدعلی یعقوبی

مؤلف:

سعید امیری نژاد

تابستان ۱۳۹۰

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: سعید امیری نژاد

استاد راهنما: دکتر محمد علی ولی

استاد مشاور: دکتر محمدعلی یعقوبی

داور ۱: دکتر اکبر نظری

داور ۲: دکتر محمد رضا مولایی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر محمد علی ولی

تقدیم به :

آن غایب از نظر

و

پدر و مادر مهربانم

تقدیر و تشکر:

در پایان این مقطع تحصیلی شایسته است از استاد راهنمای این پایان نامه جناب آقای دکتر محمد علی ولی و استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر محمد علی یعقوبی کمال تشکر و قدردانی را به عمل بیاورم.

با سپاس از اساتید دوره تحصیلی بویژه آقای دکتر نظری و آقای دکتر مولایی که داوری این پایان نامه را بر عهده داشته اند.

از زحمات و تلاشهای پدر و مادر عزیزم و همچنین تمامی اعضای خانواده ام که مرا در طول تحصیل یاری نمودند، تشکر می نمایم.

سعید امیری نژاد

تابستان ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه، نامساوی هایی در انتگرال های فازی معرفی می شود و مورد بحث و بررسی قرار می گیرد و به برخی از خواص و کاربرد های آنها اشاره خواهیم کرد. این نامساوی ها عبارتند از: نامساوی جنسن، هاردی، مارکوف، بارنس- گودونوا- لوین (B-G-L)، چبیشف، کوشی- شوارتز، بسل- اوکراسینسکی (B-O)، مینکوفسکی و هرمیت- هادامارد.

در فصل اول برخی تعاریف مقدماتی از اندازه های فازی و انتگرال های فازی را ارائه می کنیم و خواص مهم انتگرال های فازی را بررسی می کنیم و در هر یک از فصل های بعد یکی از نامساوی های انتگرال های فازی را مطرح خواهیم کرد. در هر یک از این فصل ها، ابتدا با یک مثال نقض نشان می دهیم که نامساوی کلاسیک مربوطه برای انتگرال های فازی برقرار نمی باشد، سپس با اضافه کردن شرط هایی یک نامساوی جدید بدست می آید که در حالت فازی برقرار است.

کلید واژه: اندازه فازی، انتگرال فازی، نامساوی های انتگرال فازی.

مقدمه

سوگینو[1] در سال ۱۹۷۴ تحقیق روی اندازه ها و انتگرال های فازی را شروع کرد. انتگرال ها و اندازه های فازی می توانند برای مدل سازی مسائل در محیط های غیر قطعی به کار برده شوند. انتگرال فازی (سوگینو) ابزاری مفید در آمار کاربردی و نظری است. برای مثال، در تئوری تصمیم انتگرال سوگینو یک میانه است، که کاملاً یک تقارن کیفی برای عمل معدل گیری است. انتگرال سوگینو را می توان از دو نقطه نظر انتظار داشت: تصمیم تحت عدم قطعیت و تصمیم گیری چند معیاره [۱].

از آغاز تحقیقات سوگینو، این حیطه گسترش بسیاری یافته و موضوعات زیادی مورد بررسی قرار گرفته است. انتگرال های فازی یا انتگرال سوگینو خاصیت های خیلی جالبی از منظر ریاضیات دارند که خیلی از مولفان آنها را مورد بررسی قرار داده اند، از آن جمله می توان به رالسکو[2] و آدامز[3]، رومن–فلورس[4] و همکاران، وانگ[5] و کلیر[6] [۳] اشاره کرد.

رالسکو و آدامز چندین تعریف مشابه از انتگرال های فازی را بررسی کرده اند. رومن–فلورس و همکاران ویژگی های پیوستگی تکه ای و H–پیوستگی انتگرال های فازی را گسترش دادند. چن[7] و همکاران، انتگرال فازی و اندازه فازی را برای ایجاد یک مدل آنالیزی و نگرش عمومی به کار بردند، آنها مدلشان را در عملکرد تاکسی های گازسوز شهر تایپه و برای شناسایی چهره به کار بردند. ناروکاوا[8] و تورا[9]، استفاده اندازه های فازی و انتگرال های فازی را برای ارزیابی

[1] - Sugeno
[2] - Ralescu
[3] - Adams
[4] - Roman-Flores
[5] - Wang
[6] - Klir
[7] - Chen
[8] - Narukawa

استراتژی ها در بازی ها مورد بررسی قرار دادند. همچنین، انتگرال ها و اندازه های فازی برای حل مسأله طبقه بندی صداهای غیر گفتاری و بسیار گیج کننده انسانی به وسیله تمکو[۱۰] و همکاران به کار برده شده است [۲].

نامساوی های انتگرال نتایج مهمی در زمینه های کاربردی و نظری هستند. برای مثال، نامساوی های انتگرال نقش مهمی در گسترش محاسبات مقیاس های زمان دارند. اوزکان[۱۱] و همکاران، نامساوی های هولدر[۱۲]، مینکوفسکی[۱۳] و جنسن[۱۴] را در مقیاس های زمان بدست آوردند. چند نامساوی مشهور بر روی انتگرال فازی تعمیم داده شده است. رومن- فلورس و کالکو-کانو[۱۵]، یک نوع جالب از نامساوی های هندسی را برای انتگرال فازی با چند کاربرد در هندسه محدب تحلیل کرده اند. همچنین، رومن-فلورس و همکاران نامساوی های نوع جنسن، پیچشی[۱۶]، چبیشف[۱۷] و استولارسکی[۱۸] را برای انتگرال های فازی مورد مطالعه قرار داده اند. در [۶] یک نامساوی نوع چبیشف برای یک حالت خاص بدست آورده شده که به وسیله اویانگ[۱۹] و همکاران در [۱۰] تعمیم یافته است [۲].

---

[9] - Torra
[10] - Temko
[11] - Ozkan
[12] - Holder
[13] - Minkowski
[14] - Jensen
[15] - Chalco-Cano
[16] - Convolution
[17] - Chebyshev
[18] - Stolarsky
[19] - Ouyang

فهرست مطالب

فصل اول

تعاریف مقدماتی در اندازه فازی و انتگرال فازی

۱-۱ اندازه های فازی و انتگرال فازی

در این فصل برخی تعاریف و خواص اساسی انتگرال سوگینو را ارائه می کنیم که در بخش های بعد استفاده خواهد شد.

تعریف ۱-۱-۱: فرض کنید که Σ یک σ-جبر از زیر مجموعه های X باشد و $\mu:\Sigma\to[0,\infty]$ یک تابع نامنفی با مقادیر حقیقی گسترش یافته در مجموعه توابع باشد. μ یک اندازه فازی است، اگر:

۱) $\mu(\varnothing)=0$.

۲) اگر $E,F\in\Sigma$ و $E\subset F$ آنگاه $\mu(E)\le\mu(F)$. (یکنوایی)

۳) اگر $\{E_n\}\subset\Sigma$ و $E_1\subset E_2\subset\dots$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)$. (ازپایین پیوسته)

۴) اگر $\{E_n\}\subset\Sigma$ و $E_1\supset E_2\supset\dots$ و $\mu(E_1)<\infty$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)$. (ازبالا پیوسته)

تعریف ۱-۱-۲: فرض کنید که Σ یک σ-جبر از زیر مجموعه های X باشد و μ یک اندازه فازی باشد. در این صورت سه تایی (X,Σ,μ) یک فضای اندازه فازی نامیده می شود.

تعریف ۱-۱-۳: اگر f یک تابع نامنفی با مقادیر حقیقی تعریف شده روی X باشد، برش αی f را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L_\alpha f=\{x\in X:f(x)\ge\alpha\}=\{f\ge\alpha\}$$
$$L_0 f=\{x\in X:f(x)>0\}=\operatorname{supp} f$$

تذکر۱-۱-۴: در تعریف ۱-۱-۳ اگر $\alpha\le\beta$ آنگاه

$$\{f\ge\beta\}\subset\{f\ge\alpha\}. \qquad (۱-۱)$$

تعریف ۱-۱-۵: فرض کنید (X ,Σ,μ) یک فضای اندازه فازی باشد، مجموعه همه توابع اندازه پذیر نامنفی نسبت به Σ را با $F_+(X)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۱-۶: فرض کنید (X ,Σ,μ) یک فضای اندازه فازی باشد و $f \in F_+(X)$ و $A \in \Sigma$، انتگرال فازی یا انتگرال سوگینو[20] f روی A نسبت به اندازه فازی μ به صورت زیر تعریف می شود:

$$(S)\int_A f d\mu = \bigvee_{\alpha\geq 0}\left[\alpha \wedge \mu\left(A\cap\{ f \geq \alpha\}\right)\right],$$

که $\vee$ و $\wedge$ به ترتیب عملگرهای sup و inf را روی $[0,\infty)$ مشخص می کنند.

تذکر ۱-۱-۷: در تعریف ۱-۱-۶ اگر $A = X$، آنگاه

$$(S)\int_X f d\mu = (S)\int f d\mu = \bigvee_{\alpha\geq 0}\left[\alpha \wedge \mu\left(\{ f \geq \alpha\}\right)\right].$$

مثال ۱-۱-۸: تابع $f :[0,\infty)\to[0,\infty)$ به صورت زیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{4}{x^2} & , \quad x>2 \end{cases}$$

و μ اندازه کلاسیک لبگ در $[0,\infty)$ است. مطلوبست محاسبه انتگرال فازی f روی $[0,\infty)$.

حل: ابتدا $\mu\left([0,\infty)\cap\{f \geq \alpha\}\right)$ را برای هر $\alpha \geq 0$ محاسبه می کنیم.

حالت ۱) $\alpha > 1$. در این حالت چون $f(x) \leq 1$ برای هر $x \in [0,\infty)$ آنگاه

$$\mu\left([0,\infty)\cap\{f \geq \alpha\}\right) = \mu(\varnothing) = 0$$

---

[20]- Sugeno

حالت ۲) $\alpha = 1$. در این حالت داریم :

$$\mu\left([0,\infty)\cap\{f\geq 1\}\right)=\mu\left([0,\infty)\cap[0,2]\right)=\mu\left([0,2]\right)=2.$$

حالت۳) $\alpha < 1$. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned}\mu\left([0,\infty)\cap\{f\geq\alpha\}\right)&=\mu\left([0,\infty)\cap\left(\{f\geq 1\}\cup\{x\in X:\alpha\leq f(x)<1\}\right)\right)\\&=\mu\left([0,2]\cup\left([0,\infty)\cap\left\{x>2:x\leq\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right\}\right)\right)\\&=\mu\left([0,2]\cup\left(2,\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right]\right)\\&=\mu\left(\left[0,\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right]\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}.\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\left(\alpha\wedge\mu\left([0,\infty)\cap\{f\geq\alpha\}\right)\right)=\begin{cases}0 & , \quad \alpha>1\\1 & , \quad \alpha=1\\\alpha & , \quad \alpha<1\end{cases}$$

بنابراین با توجه به تعریف انتگرال فازی داریم:

$$(S)\int_0^\infty f\ \mathrm{d}\mu=\bigvee_{\alpha\geq 0}\left[\alpha\wedge\mu\left([0,\infty)\cap\{f\geq\alpha\}\right)\right]=1.$$

در گزاره زیر برخی از خواص انتگرال فازی را بیان خواهیم کرد.

گزاره ۱-۱-۹: فرض کنید (X,Σ,μ) یک فضای اندازه فازی باشد و $A,B\in\Sigma$ و $f,g\in F^{\mu}(X)$ که $F^{\mu}(X)=\{f:X\to[0,\infty)\ \mid\ f\ \text{is measurable}\}$ آنگاه:

۱) $(S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu \le \mu(A)$.

۲) $(S)\int_A k \ \mathrm{d}\mu = k \wedge \mu(A)$.

۳) $f \le g \ \ , \text{on A} \ \Rightarrow (S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu \le (S)\int_A g \ \mathrm{d}\mu$.

۴) $A \subset B \Rightarrow (S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu \le (S)\int_B f \ \mathrm{d}\mu$.

۵) $\mu\left(A \bigcap \{ f \ge \alpha \}\right) \ge \alpha \Rightarrow (S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu \ge \alpha$.

۶) $\mu\left(A \bigcap \{ f \ge \alpha \}\right) \le \alpha \Rightarrow (S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu \le \alpha$.

۷) $(S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu < \alpha \Leftrightarrow \exists \ \ \gamma < \alpha \ \text{ s.t } \ \mu\left(A \bigcap \{f \ \ge \gamma\}\right) < \alpha$.

۸) $(S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu > \alpha \Leftrightarrow \exists \ \ \gamma > \alpha \ \text{ s.t } \ \mu\left(A \bigcap \{f \ \ge \gamma\}\right) > \alpha$.

۹) $\left(\mu\left(A\right) < \infty \Rightarrow (S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu \ge \alpha\right) \Leftrightarrow \mu\left(A \bigcap \{ f \ge \alpha \}\right) \ge \alpha$.

اثبات ۱: چون $\left(A \bigcap \{ f \ge \alpha \}\right) \subset A$ ، با توجه به یکنوایی μ داریم:

$$\begin{aligned}\mu\left(A \bigcap \{ f \ge \alpha \}\right) \le \mu(A) &\Rightarrow \forall \alpha \ge 0, \quad \alpha \wedge \mu\left(A \bigcap \{ f \ge \alpha \}\right) \le \alpha \wedge \mu(A) \le \mu(A) \\ &\Rightarrow \bigvee_{\alpha \ge 0}\left[\alpha \wedge \mu\left(A \bigcap \{ f \ge \alpha \}\right)\right] \le \mu(A) \\ &\Rightarrow (S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu \le \mu(A). \ \square\end{aligned}$$

اثبات ۲: سه حالت را در نظر می گیریم:

حالت ۱) $\alpha > k$. در این حالت داریم:

$$\mu\left(A \bigcap \{k \ \ge \alpha\}\right) = \mu(\varnothing) = 0$$

حالت ۲) $\alpha = k$. در این حالت داریم:

$$\mu\left(A \bigcap \{k \ge \alpha\}\right) = \mu\left(A \bigcap \{x \in X : k \ge k\}\right) = \mu\left(A \bigcap X\right) = \mu(A)$$

حالت ۳) $\alpha < k$. در این حالت داریم:

$$\mu\left(A\cap\{k\geq\alpha\}\right)=\mu\left(A\cap\{x\in X:k\geq\alpha\}\right)=\mu\left(A\cap X\right)=\mu(A)$$

در نتیجه،

$$\alpha\wedge\mu\left(A\cap\{f\geq\alpha\}\right)=\begin{cases}0 & ;\quad \alpha>\mathrm{k}\\ k\wedge\mu(A) & ;\quad \alpha=\mathrm{k}\\ \alpha\wedge\mu(A) & ;\quad \alpha<\mathrm{k}\end{cases}$$

بنابراین، با توجه به تعریف انتگرال فازی داریم:

$$\begin{aligned}(S)\int_A k\ \mathrm{d}\mu&=\bigvee_{\alpha\geq 0}\left[\alpha\wedge\mu\left(A\cap\{k\geq\alpha\}\right)\right]=\sup\left\{0,k\wedge\mu\left(A\right),\alpha\wedge\mu\left(A\right)\right\}=k\wedge\mu(A)\\ &\Rightarrow (S)\int_A k\ \mathrm{d}\mu=k\wedge\mu(A).\ \square\end{aligned}$$

اثبات ۳: چون $f\leq g$ پس $\{f\geq\alpha\}\subset\{g\geq\alpha\}$، بنابراین

$$\begin{aligned}A\cap\{f\geq\alpha\}\subset A\cap\{g\geq\alpha\}&\Rightarrow\mu\left(A\cap\{f\geq\alpha\}\right)\leq\mu\left(A\cap\{g\geq\alpha\}\right)\\ &\Rightarrow\forall\alpha\geq 0,\quad \alpha\wedge\mu\left(A\cap\{f\geq\alpha\}\right)\leq\alpha\wedge\mu\left(A\cap\{g\geq\alpha\}\right)\\ &\Rightarrow\bigvee_{\alpha\geq 0}\left[\alpha\wedge\mu\left(A\cap\{f\geq\alpha\}\right)\right]\leq\bigvee_{\alpha\geq 0}\left[\alpha\wedge\mu\left(A\cap\{g\geq\alpha\}\right)\right]\\ &\Rightarrow (S)\int_A f\ \mathrm{d}\mu\leq(S)\int_A g\ \mathrm{d}\mu.\ \square\end{aligned}$$

اثبات ۴: چون $A\subset B$ بنابراین

$$\begin{aligned}A\cap\{f\geq\alpha\}\subset B\cap\{f\geq\alpha\}&\Rightarrow\mu\left(A\cap\{f\geq\alpha\}\right)\leq\mu\left(B\cap\{f\geq\alpha\}\right)\\ &\Rightarrow\forall\alpha\geq 0,\quad \alpha\wedge\mu\left(A\cap\{f\geq\alpha\}\right)\leq\alpha\wedge\mu\left(B\cap\{f\geq\alpha\}\right)\\ &\Rightarrow\bigvee_{\alpha\geq 0}\left[\alpha\wedge\mu\left(A\cap\{f\geq\alpha\}\right)\right]\leq\bigvee_{\alpha\geq 0}\left[\alpha\wedge\mu\left(B\cap\{f\geq\alpha\}\right)\right]\\ &\Rightarrow (S)\int_A f\ \mathrm{d}\mu\leq(S)\int_B f\ \mathrm{d}\mu.\ \square\end{aligned}$$

اثبات ۵:

$$\begin{aligned}\forall \alpha \geq 0,\quad \mu\left(A\bigcap\{ f \geq \alpha\}\right)\geq \alpha &\Rightarrow \forall \alpha \geq 0,\quad \alpha \wedge \mu\left(A\bigcap\{ f \geq \alpha\}\right)\geq \alpha\\ &\Rightarrow \bigvee_{\alpha\geq 0}\left[\alpha \wedge \mu\left(A\bigcap\{ f \geq \alpha\}\right)\right]\geq \alpha\\ &\Rightarrow (S)\int f \ \mathrm{d}\mu \geq \alpha.\ \square\end{aligned}$$

اثبات ۶:

$$\begin{aligned}\forall \alpha \geq 0,\quad \mu\left(A\bigcap\{ f \geq \alpha\}\right)\leq \alpha &\Rightarrow \forall \alpha \geq 0,\quad \alpha \wedge \mu\left(A\bigcap\{ f \geq \alpha\}\right)\leq \alpha\\ &\Rightarrow \bigvee_{\alpha\geq 0}\left[\alpha \wedge \mu\left(A\bigcap\{ f \geq \alpha\}\right)\right]\leq \alpha\\ &\Rightarrow (S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu \leq \alpha.\ \square\end{aligned}$$

اثبات ۷: فرض می کنیم $(S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu < \alpha$. نشان می دهیم $\gamma<\alpha$ وجود دارد به طوری که $\mu\left(A\bigcap\{f \geq \gamma\}\right)<\alpha$. به برهان خلف فرض می کنیم:

$$\nexists \ \gamma < \alpha\ ,\quad \mu\left(A\bigcap\{ f \geq \gamma\}\right)<\alpha$$

در این صورت،

$$\begin{aligned}\forall\ \gamma<\alpha\ ,\quad \mu\left(A\bigcap\{ f \geq \gamma\}\right)\geq \alpha &\Rightarrow \forall\ \gamma<\alpha\ ,\quad \gamma \wedge \mu\left(A\bigcap\{ f \geq \gamma\}\right)=\gamma\\ &\Rightarrow \forall\ \gamma<\alpha\ ,\quad \bigvee_{0\leq\gamma<\alpha}\left[\gamma \wedge \mu\left(A\bigcap\{ f \geq \gamma\}\right)\right]=\alpha\end{aligned}$$

از طرفی،

$$\bigvee_{0\leq\gamma<\alpha}\left[\gamma \wedge \mu\left(A\bigcap\{ f \geq \gamma\}\right)\right]\leq \bigvee_{\gamma\geq 0}\left[\gamma \wedge \mu\left(A\bigcap\{ f \geq \gamma\}\right)\right]$$

در نتیجه،

$$\alpha \leq (S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu < \alpha \Rightarrow \alpha < \alpha$$

بر عکس؛ فرض می کنیم $\gamma<\alpha$ وجود دارد به طوری که $\mu\left(A\cap\{f\geq\gamma\}\right)<\alpha$. نشان می دهیم $(S)\int_A f\ \mathrm{d}\mu<\alpha$. ابتدا نشان می دهیم برای هر $\beta\geq 0$،

$$\beta\wedge\mu\left(A\cap\{f\geq\beta\}\right)<\alpha$$

دو حالت در نظر می گیریم:

حالت ۱) $0\leq\beta<\gamma$. چون $\gamma<\alpha$ و $\beta<\gamma$ پس $\beta<\alpha$، در نتیجه:

$$\beta\wedge\mu\left(A\cap\{f\geq\beta\}\right)<\alpha$$

حالت ۲) $\beta\geq\gamma$. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned}\{f\geq\beta\}\subset\{f\geq\gamma\}&\Rightarrow A\cap\{f\geq\beta\}\subset A\cap\{f\geq\gamma\}\\&\Rightarrow\mu\left(A\cap\{f\geq\beta\}\right)\leq\mu\left(A\cap\{f\geq\gamma\}\right)<\alpha\\&\Rightarrow\beta\wedge\mu\left(A\cap\{f\geq\beta\}\right)<\alpha\end{aligned}$$

بنابراین، برای هر $\beta\geq 0$ داریم:

$$\begin{aligned}\beta\wedge\mu\left(A\cap\{f\geq\beta\}\right)<\alpha&\Rightarrow\bigvee_{\beta\geq 0}\left[\beta\wedge\mu\left(A\cap\{f\geq\beta\}\right)\right]<\alpha\\&\Rightarrow(S)\int_A f\ \mathrm{d}\mu<\alpha.\ \square\end{aligned}$$

اثبات ۸: فرض می کنیم $(S)\int_A f\ \mathrm{d}\mu>\alpha$. نشان می دهیم $\gamma>\alpha$ وجود دارد به طوری که $\mu\left(A\cap\{f\geq\gamma\}\right)>\alpha$.

$$\begin{aligned}(S)\int_A f\ \mathrm{d}\mu>\alpha&\Rightarrow\bigvee_{\beta\geq 0}\left[\beta\wedge\mu\left(A\cap\{f\geq\beta\}\right)\right]>\alpha\\&\Rightarrow\exists\ \ \beta_0>0\ \ \text{s.t}\ \ \beta_0\wedge\mu\left(A\cap\{f\geq\beta_0\}\right)>\alpha\\&\Rightarrow\exists\ \ \beta_0>0\ \ ,\ \ \beta_0>\alpha\ \ \text{s.t}\ \ \mu\left(A\cap\{f\geq\beta_0\}\right)>\alpha\\&\overset{\beta_0=\gamma}{\Rightarrow}\exists\ \ \gamma>\alpha\ \ \text{s.t}\ \ \mu\left(A\cap\{f\geq\gamma\}\right)>\alpha\end{aligned}$$

بر عکس؛ فرض می کنیم

$$\exists \quad \gamma > \alpha \quad \text{s.t} \quad \mu\big(A \cap \{f \ge \gamma\}\big) > \alpha$$

در این صورت،

$$\begin{aligned}
&\gamma \wedge \mu\big(A \cap \{f \ge \gamma\}\big) > \alpha \\
&\qquad \Rightarrow \bigvee\nolimits_{\beta \ge 0}\Big[\beta \wedge \mu\big(A \cap \{f \ge \beta\}\big)\Big] \ge \gamma \wedge \mu\big(A \cap \{f \ge \gamma\}\big) > \alpha \\
&\qquad \Rightarrow (S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu > \alpha. \ \square
\end{aligned}$$

اثبات ۹: اگر $\mu\big(A \cap \{f \ge \alpha\}\big) \ge \alpha$، طبق قسمت (۵) داریم:

$$(S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu \ge \alpha$$

بر عکس؛ اگر $\mu(A) < \infty$ و $(S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu \ge \alpha$، نشان می دهیم $\mu\big(A \cap \{f \ge \alpha\}\big) \ge \alpha$. دو حالت را در نظر می گیریم:

حالت اول) $(S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu > \alpha$. در این حالت بنا به قسمت (۸) داریم:

$$\exists \quad \gamma > \alpha \quad \text{s.t} \quad \mu\big(A \cap \{f \ge \gamma\}\big) > \alpha \tag{۱-۲}$$

از طرفی:

$$\begin{aligned}
\gamma > \alpha &\Rightarrow \{f \ge \gamma\} \subset \{f \ge \alpha\} \\
&\Rightarrow A \cap \{f \ge \gamma\} \subset A \cap \{f \ge \alpha\} \\
&\Rightarrow \mu\big(A \cap \{f \ge \gamma\}\big) \le \mu\big(A \cap \{f \ge \alpha\}\big)
\end{aligned} \tag{۱-۳}$$

در نتیجه از (۱-۲) و (۱-۳) داریم:

$$\mu\left(A \cap \{f \geq \alpha\}\right) > \alpha \qquad (۱-۴)$$

حالت دوم) $(S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu = \alpha$. در این حالت داریم:

$$\forall \quad \gamma < \alpha \quad \text{s.t} \quad \mu\left(A \cap \{f \geq \gamma\}\right) \geq \alpha \qquad (۱-۵)$$

زیرا؛ در غیر این صورت اگر $\gamma_0 < \alpha$ وجود داشته باشد به طوری که $\mu\left(A \cap \{f \geq \gamma_0\}\right) < \alpha$، آنگاه بنا به قسمت (۷)، $(S)\int_A f \ \mathrm{d}\mu < \alpha$ که با فرض در تناقص است. به طور مشابه برای هر $\gamma > \alpha$ داریم:

$$\forall \quad \gamma > \alpha \quad \text{s.t} \quad \mu\left(A \cap \{f \geq \gamma\}\right) \leq \alpha \qquad (۱-۶)$$

اکنون بنا به (۱-۵) و (۱-۶) برای هر $0 < \varepsilon < \alpha$ می توان نوشت:

$$\mu\left(A \cap \{f \geq \alpha + \varepsilon\}\right) \leq \alpha \leq \mu\left(A \cap \{f \geq \alpha - \varepsilon\}\right)$$

در این صورت، وقتی $\varepsilon \to 0$ داریم:

$$\mu\left(A \cap \{f \geq \alpha\}\right) = \alpha = \mu\left(A \cap \{f \geq \alpha\}\right) \qquad (۱-۷)$$

و اثبات تمام است. □

تذکر ۱-۱-۱۰: در حالت کلی انتگرال سوگینو یک نوع انتگرال خطی نیست، یعنی در حالت کلی تساوی زیر برقرار نیست.

$$(S)\int (af + bg)\ \mathrm{d}\mu = \mathrm{a}(S)\int f \ \mathrm{d}\mu + \mathrm{b}(\mathrm{S})\int g \ \mathrm{d}\mu$$

در ادامه با ارائه یک مثال نشان می دهیم که تساوی فوق برقرار نیست.