دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض - آنالیز

آشفتگی فوق اشتقاق های سه تایی و پایداری اشتقاق های مکعبی سه تایی در جبرهای سه تایی

استاد راهنما:

دکتر طیبه لعل شاطری

استاد مشاور:

دکتر قدیر صادقی

نگارش:

فاطمه فاطمی نیا

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

رهبر عزیزم

امام خامنه ای

حقا که تو از سلاله فاطمه ای
با خنده خود به درد ما خاتمه ای
زیباتر از این نام ندیدم به جهان
سید علی الحسینی الخامنه ای

من لم يشكر المخلوق لم يشكر الخالق

حمد و ستایش خداوند سبحان را، که توفیق دوباره تحصیل علم را به من عطا نمود تا در راه کسب علم و معرفت گامی در رسیدن به کمال بی انتهایش بردارم.

به پاس احترام به حرمت دانش، از زحمات و راهنمایی‌های استاد گرانقدر و ارجمندم

سرکار خانم دکتر لعل شاطری

که نظارت این تحقیق را بر عهده داشته و در تمام مراحل از یاری و مساعدت ایشان برخوردار بوده‌ام نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از استاد گرانقدر **جناب آقای دکتر صادقی** که زحمت مشاوره این رساله را تقبل کردند، صمیمانه سپاسگزارم.

همچنین از همسر مهربانم که در تمام مراحل مرا تشویق نموده و موجبات آسایشم را در انجام تحقیق فراهم نموده نهایت سپاسگزاری را دارم.

همچنین از **جناب آقای دکتر عارفی جمال** که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم و سلامتی ایشان را از خدای متعال خواهانم.

فاطمه فاطمی نیا

چکیده

نام خانوادگی : فاطمی نیا **نام :** فاطمه
عنوان پایان نامه : آشفتگی فوق اشتقاق های سه تایی و پایداری اشتقاق های مکعبی در جبرهای سه تایی
استاد راهنما : دکتر طیبه لعل شاطری **استاد مشاور:** دکتر قدیر صادقی
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** آنالیز **محل تحصیل:** دانشگاه حکیم سبزواری **دانشکده:** ریاضی و علوم کامپیوتر **تاریخ فارغ التحصیلی:** شهریور ماه ۱۳۹۱ **تعداد صفحه:** ۱۱۳
واژه‌های کلیدی: اشتقاق سه تایی، فوق اشتقاق های سه تایی، فوق اشتقاق های سه تایی تقریبی، توابع مکعبی، جبرهای فرشه
چکیده: در این رساله با معرفی جبرهای باناخ سه تایی و فوق اشتقاق های سه تایی وجود یک فوق اشتقاق سه تایی نزدیک به یک فوق اشتقاق سه تایی تقریبی را با در نظر گرفتن پایداری هایرز-اولام برای فوق اشتقاق های سه تایی در جبرهای باناخ سه تایی ثابت می کنیم. هم چنین با تعریف اشتقاق مکعبی سه تایی، پایداری و ابر پایداری این نگاشت ها را روی جبرهای فرشه سه تایی مطالعه می کنیم. سپس این نتایج را در مورد فوق اشتقاق های مکعبی روی جبر های نرم دار چندگانه تعمیم می دهیم.

پیشگفتار

در سال ۱۹۴۰ ،اولام [۱] [۱۹] سوالی درباره نگاشت های تقریبی مطرح کرد به این مضمون که ((تحت چه شرایطی یک همریختی تقریبی به یک همریختی نزدیک می شود؟))

در سال ۱۹۴۱ ،هایرز[۲] [۸] جوابی مثبت به سوال اولام درفضاهای باناخ ارائه داد در واقع ثابت کرد اگر $\varepsilon > 0$ و $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی از فضای نرم دار X به فضای باناخ Y باشد به طوری که

$$\parallel f(x+y) - f(x) - f(y) \parallel \leq \varepsilon \qquad (x, y \in X) \tag{۱}$$

آن گاه نگاشت جمعی منحصر به فرد $T : X \longrightarrow Y$ وجود دارد به طوری که

$$\parallel f(x) - T(x) \parallel \leq \varepsilon \qquad (x \in X)$$

این پدیده، پایداری[۳] هایرز-اولام معادله تابعی جمعی[۴] $g(x+y) = g(x) + g(y)$ نامیده می شود. تعمیمی از قضیه اولام را برای نگاشت های تقریبا جمعی توسط راسیاس[۵] [۱۷] در سال ۱۹۷۸ با جایگزین کردن نامساوی (۱) به صورت

$$\parallel f(x+y) - f(x) - f(y) \parallel \leq \theta(\parallel x \parallel^p + \parallel y \parallel^p) \qquad (\theta \geq 0, 0 \leq p < 1)$$

[۱] Ulam
[۲] Hyers
[۳] Stability
[۴] Additive functional equation
[۵] Rassias

اثبات نمود. این نوع پایداری معادله تابعی جمعی $g(x+y)=g(x)+g(y)$ پایداری هایرز–اولام–راسیاس نامیده می شود. پس از آن تعمیم های دیگری از پایداری توسط ریاضیدانان ارائه شد. در سال ۱۹۴۹، بورگین[۶] [۲] ابر پایداری[۷] همریختی های حلقه را ثابت کرد. جون[۸] و کیم[۹] [۱۱] در سال ۲۰۰۲ معادله تابعی

$$f(2x+y)+f(2x-y)=2f(x+y)+2f(x-y)+12f(x)$$

را معرفی و حل کردند و پایداری هایرز - اولام- راسیاس را برای این معادله تابعی اثبات نمودند. یک جواب معادله فوق، معادله مکعبی $f(x)=x^3$ است. به این دلیل معادله تابعی فوق، معادله تابعی مکعبی نامیده می شود و هر جواب از این معادله را یک تابع مکعبی گویند. جون و کیم ثابت کردند تابعی مانند f بین دو فضای برداری X و Y جوابی از معادله تابعی مکعبی است اگر و فقط اگر تابع منحصر به فرد $C: X\times X\times X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد به طوری که

$$f(x)=C(x,x,x) \qquad (x\in X)$$

و C با ثابت گرفتن یک متغیر، تقارنی است و با ثابت گرفتن دو متغیر جمعی خواهد بود. گونه ی دیگر پایداری، پایداری راسیاس–ایساک است که اگر E_1 یک فضای برداری نرم دار و E_2 یک فضای باناخ حقیقی باشد و $f: E_1 \longrightarrow E_2$ یک نگاشت باشد به طوری که $f(tx)$ در t برای هر x ثابت پیوسته باشد و همچنین اگر f یک نگاشت ψ–جمعی باشد که در شرایط زیر صدق کند

$$\psi(ts)\le\psi(t)\psi(s) \qquad (t,s\in\mathbb{R}^+)$$

$$\psi(t)<t \qquad (t>1)$$

[۶] Bourgin
[۷] Superstability
[۸] Jun
[۹] Kim

در این صورت یک نگاشت خطی یکتای $T: E_1 \longrightarrow E_2$ وجود دارد به طوری که

$$\| f(x) - T(x) \| \leq \frac{2\theta\psi(\| x \|)}{2-\psi(2)} \qquad (x \in E_1).$$

که به نگاشت $f: E_1 \longrightarrow E_2$ نگاشت ψ-جمعی گفته می شود اگر و فقط اگر $\theta \geq 0$ و $\psi: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که $\lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{\psi(t)}{t} = 0$ و

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leq \theta[\psi(\| x \|) + \psi(\| y \|)] \qquad (x, y \in E_1).$$

در سال ۲۰۰۶ ، بادورا[10] [۱] و میورا [11] [۱۳] پایداری هایرز-اولام ، پایداری راسیاس-ایساک [12] [۹] و پایداری هایرز-اولام-راسیاس و ابر پایداری بورگین اشتقاق حلقه را روی جبر های باناخ ثابت کردند . میورا ثابت کرد اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ بدون رتبه باشد و $f: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ نگاشتی باشد که برای مقادیر $\varepsilon \geq 0$ و $p \geq 0, p \neq 1$ در شرایط زیر صدق کند

$$\| f(a+b) - f(a) - f(b) \| \leq \varepsilon(\| a \|^p + \| b \|^p) \qquad (a, b \in \mathcal{A})$$

$$\| f(ab) - af(b) - f(a)b \| \leq \varepsilon \| a \|^p \| b \|^p \qquad (a, b \in \mathcal{A})$$

آن گاه f یک اشتقاق حلقه است.

هم چنین در سال ۲۰۰۷ ، پارک[13] [۱۵] و مصلحیان[14] [۱۴] مساله پایداری همریختی های سه تایی و اشتقاق های سه تایی را بیان و اثبات کردند. در این رساله وجود یک فوق اشتقاق سه تایی نزدیک به یک فوق اشتقاق سه تایی تقریبی را با در نظر گرفتن پایداری هایرز-اولام-راسیاس برای فوق اشتقاق های سه تایی در جبرهای باناخ سه تایی ثابت می کنیم. هم چنین پایداری و ابر پایداری اشتقاق مکعبی سه تایی روی جبرهای فرشه سه تایی را مطالعه می کنیم.

[10] Baadora
[11] Miura
[12] Isac
[13] Park
[14] Moslehian

عملگر های جبر سه تایی[15] در قرن ۱۹ میلادی توسط چند ریاضیدان مورد توجه قرار گرفت. ابتدا کیلی [16] [۳] در سال ۱۸۴۰ مفهوم ماتریس های مکعبی و تعمیمی از دترمینان به نام ابردترمینان[17] را مطرح نمود که در ۱۹۹۰ توسط کاپرانو[18] ،گلفند[19]،زلوینسکی[20] [۱۲] مجددا بررسی و تعمیم داده شد. دستگاه های جبری سه تایی کاربردهایی در فیزیک، آمار، نظریه های فوق تقارنی و ... دارد. این رساله در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول به بیان مفاهیم و قضایای مورد نیاز در فصل های بعد خواهیم پرداخت که به طور عمده از کتاب های

Gerad. J. Murphy, *C^* algebra and operator theory*, Academic Press, 1990.

و

W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973.

استفاده شده است. فصل دوم برگرفته شده از مقاله های

K -H. Park and Y. -S. Jung, *Perturbations of higher ternary derivations on Banach ternary algebra*, Common. Korean Math. Soc. 23(3) (2008), 387-399.

و

B. Hayati,M. Eshaghi Gordji, M. Bavand Savadkouhi and M. Bidkham, *Stability of ternary cubic derivation on ternary Ferchet algebras*, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 5(5) (2011), 1224-1235 .

است در آن به آشفتگی فوق اشتقاق های سه تایی در جبرهای باناخ سه تایی و پایداری

[15] Ternary algebra
[16] Cayley
[17] Hyperdeterminan
[18] Kapranov
[19] Gelfand
[20] Zelevinskii

اشتقاق های مکعبی را در جبرهای فرشه سه تایی بررسی و مطالعه می کنیم. سپس در فصل سوم این نتایج را در مورد اشتقاق ها و فوق اشتقاق های مکعبی روی جبر های نرم دار چندگانه تعمیم می دهیم، بخش سوم این فصل از مقاله

T. L. Shateri and F. Fatemi niya, *Stability of ternary cubic higher derivations in ternary multi-normed algebras*, submitted.

برگرفته شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و قضایای مقدماتی

۱.۱ فضاهای برداری توپولوژیکی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی باشد گردایه τ متشکل از زیر مجموعه های X را توپولوژی[۱] روی X گوییم اگر

۱) $\emptyset, X \in \tau$ ،

۲) اگر $\{A_i\}_{i\in I} \in \tau$ نتیجه شود $\cup_{i\in I} \in \tau$ ،

۳) اگر $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau$ نتیجه شود $\cap_{i=1}^{n} \in \tau$.

دوتایی (X,τ) را فضای توپولوژیک گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد (که $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ یا $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) و هم چنین (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد، X را فضای برداری توپولوژیک[۲] گوییم اگر نگاشت

[۱] Topology
[۲] Topological vector space

های

$$F \times X \longrightarrow X \qquad X \times X \longrightarrow X$$

$$(\alpha, x) \mapsto \alpha x \qquad (x, y) \mapsto x + y$$

توأما پیوسته باشند.

تعریف ۳.۱.۱. اگر X یک فضای برداری توپولوژیک باشد $A \subseteq X$ را محدب [۳] گوییم اگر برای هر $\alpha \in [0,1]$

$$\alpha A + (1 - \alpha)A \subseteq A \ .$$

تعریف ۴.۱.۱. اگر X فضای برداری توپولوژیک باشد یک پایه موضعی[۴] فضای برداری توپولوژیک X گردایه ای مانند β از همسایگی های صفر است به طوری که هر همسایگی صفر شامل عضوی از β باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک با توپولوژی τ باشد که یک پایه موضعی مانند β با اعضای محدب داشته باشد گوییم X پایه موضعی محدب[۵] دارد، و X را موضعا محدب گوییم.

تعریف ۶.۱.۱. اگر X فضای برداری توپولوژیک با توپولوژی τ باشد که با متری مانند d سازگار است آن گاه گوییم X متریک پذیر[۶] است.

---
[۳] Convex
[۴] Local base
[۵] Local convex base
[۶] Metrizable

تعریف ۷.۱.۱. متر d روی فضای برداری X را پایا [۷] گوییم اگر برای هر $x,y,z \in X$

$$d(x+z, y+z) = d(x,y).$$

تعریف ۸.۱.۱. اگر X فضای برداری توپولوژیک با توپولوژی τ باشد آنگاه X را یک F–فضا[۸] گوییم هرگاه به وسیله یک متریک پایای کامل مانند d القا شده باشد.

تعریف ۹.۱.۱. اگر X یک فضای برداری توپولوژیک با توپولوژی τ باشد، X را فضای فرشه[۹] گوییم هرگاه یک F–فضای موضعا محدب باشد.

۲.۱ C^*–جبرها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ (که $\mathbb{F}$، $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است) باشد، آن گاه نگاشت $\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$ یک نرم روی X نامیده می شود هر گاه به ازای هر $x,y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ در شرایط زیر صدق کند

۱) $x = 0$ اگر و تنها اگر $\|x\| = 0$،

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

۳) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

اگر $\|.\|$ یک نرم روی فضای برداری X باشد $(X, \|.\|)$ را فضای نرم دار [۱۰] گویند.

تعریف ۲.۲.۱. یک فضای برداری $\mathcal{A}$ همراه با نگاشت خطی دو تایی $\mathcal{A}^2 \longrightarrow \mathcal{A}$ با ضابطه $(a,b) \longrightarrow ab$ را جبر [۱۱] نامیم هرگاه

[۷] Invariant
[۸] F-space
[۹] Frechet space
[۱۰] Normed space
[۱۱] Algebra

$$a(bc) = (ab)c \qquad (a, b, c \in \mathcal{A}).$$

تعریف ۳.۲.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر و $\| \, . \, \|$ یک نرم روی آن باشد آن گاه گوییم $(\mathcal{A}, \| \, . \, \|)$ یک جبر نرم دار[۱۲] است اگر در خاصیت زیر ضربی صدق کند یعنی

$$\| ab \| \leq \| a \| \| b \| \qquad (a, b \in \mathcal{A}).$$

تعریف ۴.۲.۱. اگر $\mathcal{A}$ جبر نرم دار باشد و $1 \in \mathcal{A}$ طوری باشد که برای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $a1 = 1a = a$ و $\| 1 \| = 1$ آن گاه $\mathcal{A}$ جبر نرم دار یکانی[۱۳] نام دارد.

تعریف ۵.۲.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باشد و $\| \, . \, \|$ یک نرم روی آن باشد آن گاه $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ[۱۴] است اگر جبر $\mathcal{A}$ همراه با نرم روی آن کامل باشد

مثال ۶.۲.۱. فرض کنید S یک مجموعه دلخواه و $\mathcal{L}^\infty(S)$ مجموعه تمام توابع کراندار مختلط مقدار روی S باشد. اگر اعمال و نرم روی $\mathcal{L}^\infty(S)$ را برای هر $f, g \in \mathcal{L}^\infty(S), \lambda \in \mathbb{C}$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in S} | f(x) | \, .$$

در این صورت $\mathcal{L}^\infty(S)$ یک جبر باناخ یکانی است.

[۱۲] Normed algebra
[۱۳] Unital normed algebra
[۱۴] Banach algebra

تعریف ۷.۲.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر نرم دار و $a \in \mathcal{A}$ ، گوییم a معکوس پذیر[۱۵] است اگر $b \in \mathcal{A}$ وجود داشته باشد به طوری که $ab = ba = 1$. معکوس a را با a^{-1} نشان می دهیم و قرار می دهیم

$$Inv(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : \text{معکوس پذیر است } a\}$$

تعریف ۸.۲.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر یک دار و $a \in \mathcal{A}$ ، طیف[۱۶] a را با $\sigma(a)$ یا $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\sigma(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \notin Inv(\mathcal{A})\}$$

قضیه ۹.۲.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکانی باشد و $a \in \mathcal{A}$ طوری باشد که $\| a \| < 1$ ، آنگاه $1 - a \in Inv(\mathcal{A})$ ، به طور مشابه $1 + a \in Inv(\mathcal{A})$.

برهان. به قضیه ۱.۲.۲ مرجع [۶] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد یک برگشت [۱۷] روی $\mathcal{A}$ یک نگاشت $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ با ضابطه، $a \mapsto a^*$ است به طوری که به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند

۱) $(a^*)^* = a$،

۲) $(ab)^* = b^* a^*$،

۳) $(\alpha a + b)^* = \bar{\alpha} a^* + b^*$.

همچنین به زوج $(\mathcal{A}, *)$ یک جبر برگشتی یا $*$-جبر[۱۸] می گویند.

[۱۵] Invertible
[۱۶] Spectrum
[۱۷] Involution
[۱۸] $*$-algebra

تعریف ۱۱.۲.۱. یک C^*- جبر [۱۹] یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ همراه با یک برگشت است به طوری که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

تعریف ۱۲.۲.۱. اگر $\mathcal{A}$ در همه شرایط C^*-جبر بودن به غیر از شرط باناخ بودن صدق کند آن گاه $\mathcal{A}$ را یک پیش C^*-جبر [۲۰] گوییم.

تعریف ۱۳.۲.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک $*$-جبر باشد، $a \in \mathcal{A}$ را خود الحاق [۲۱] گوییم اگر $a^* = a$.

تعریف ۱۴.۲.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک $*$-جبر یک دار باشد، $a \in \mathcal{A}$ را یکانی[۲۲] گوییم اگر $a^*a = aa^* = 1$. در این رساله گروه یکانی را با نماد $U(\mathcal{A})$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. عنصر a از یک C^*-جبر مثبت[۲۳] است اگر a خودالحاق باشد و $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$ که $\mathbb{R}^+$ همان اعداد حقیقی مثبت است.

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنید H یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد، آن گاه نگاشت $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ یک ضرب داخلی[۲۴] نامیده می شود هر گاه به ازای هر $x, y \in H$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند

۱) $\langle x,x \rangle \geq 0$ و $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ،

۲) $\overline{\langle x,y \rangle} = \langle y,x \rangle$،

۳) $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$،

[۱۹] C^*-algebra
[۲۰] Pre C^*-algebra
[۲۱] Hermitian
[۲۲] Unital
[۲۳] Positive
[۲۴] Inner product

(۴) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$.

و به زوج $(H,\langle .,.\rangle)$ فضای حاصلضربی [۲۵] می گویند. هم چنین اگر هر دنباله کشی در H همگرا باشد ، آن گاه H را یک فضای هیلبرت[۲۶] گوییم.

تعریف ۱۷.۲.۱. نگاشت خطی پیوسته $u:H_1\to H_2$ بین فضاهای هیلبرت H_1 و H_2 را یک ایزومتری جزئی نامیم اگر u روی $(\ker u)^\perp$ ایزومتریک باشد یعنی

$$\| u(x)\|=\| x\| \qquad \forall x\in(\ker u)^\perp$$

نکته ۱۸.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*–جبر و a یک عنصر خودالحاق در $(U)_1=\{x\in\mathcal{A}:\| x\|\leq 1\}$ باشد در این صورت $1-a^2\in\mathcal{A}^+$ ، هم چنین $u=a+i\sqrt{1-a^2}$ و $v=a-i\sqrt{1-a^2}$ یکانی اند به طوری که $a=\frac{1}{2}(u+v)$.

قضیه ۱۹.۲.۱. (تجزیه قطبی): فرض کنید v یک عملگر خطی پیوسته روی فضای هیلبرت H باشد آن گاه یک ایزومتری جزئی[۲۷] $u\in B(H)$ وجود دارد به طوری که

$$v=u\mid v\mid \qquad , \qquad \ker(u)=\ker(v)$$

که در آن $\mid v\mid$ یک عملگر مثبت است و برابر است با $\mid v\mid=(v^2)^{\frac{1}{2}}$ ، هم چنین داریم $u^*v=\mid v\mid$.

برهان. به مرجع [۶] قضیه ۲.۳.۴ مراجعه کنید. □

قضیه زیر که در فصل دوم مورد نیاز است از مرجع [۱۰] برگرفته شده است.

[۲۵] Product space
[۲۶] Hilbert space
[۲۷] Partial isometry

قضیه ۲۰.۲.۱. اگر s یک عنصر از C^*–جبر $\mathcal{A}$ طوری باشد که به ازای عدد صحیح $n > 2$ ،که $\| s \| < 1 - 2n^{-1}$ ؛ آن گاه n عضو یکانی $u_1, ..., u_n$ در $\mathcal{A}$ وجود دارند به طوری که $s = n^{-1}(u_1 + ... + u_n)$.

برهان. اگر $t \in (\mathcal{A})_1^0 = \{a \in \mathcal{A} : \| a \| < 1\}$ و $v \in U(\mathcal{A})$ ، ($U(\mathcal{A})$ یک گروه یکانی است) آن گاه

$$\frac{v+t}{2} = \frac{v(1+v^*t)}{2} \qquad \| v^*t \| = \| t \| < 1$$

بنابراین $1 + v^*t$ معکوس پذیر است و $\frac{v+t}{2}$ یک عنصر معکوس پذیر در $(\mathcal{A})_1^0$ است از این رو $\frac{v+t}{2}$ تجزیه قطبی مانند uh دارد که $u \in U(\mathcal{A})$ و h یک عنصر خود الحاق (مثبت) در

$$(U)_1 = \{a \in \mathcal{A} : \| a \| \leq 1\}$$

است. حال فرض کنید که $h = \frac{w_1 + w_2}{2}$ ، که $w_1 = h + i(1-h^2)^{\frac{1}{2}}, W_2 = h - i(1-h^2)^{\frac{1}{2}}$ که $w_1, w_2 \in u(\mathcal{A})$ ، از آن نتیجه می شود $v + t = uh = uw_1 + uw_2$ ، بنابراین برای هر عدد صحیح مثبت n ، عناصر

$$u_1, ..., u_{n-1}, v_1, ..., v_{n-1} (= u_n) \in U(\mathcal{A})$$

وجود دارد به طوری که

$$v + (n-1)t = u_1 + v_1 + (n-2)t$$

$$= u_1 + u_2 + v_1 + (n-3)t = ... = u_1 + ... + u_n \tag{1.1}$$

طبق فرض داریم $\| s \| < 1 - 2n^{-1} (n \geq 3)$ بنابراین