بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض - گرایش هندسه

عنوان :

خمینه های فینسلری با انحنای ریمان مربعی

استاد راهنما:
دکتر ابوالفضل طالشیان

استاد مشاور:
دکتر مهدی رفیعی راد

نگارش:
علی علاء

تیر ۱۳۹۱

گزیده ای از دعای مکارم الاخلاق امام سجاد (علیه السلام)

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و ایمانم را به کاملترین درجه ایمان برسان و یقینم را بهترین یقین قرار ده و فرجام نیتم را بهترین نیتها بگردان و علم را به بهترین اعمال برسان.

پروردگارا، با لطف خودت نیتم را نیکو گردان و یقینم را با رحمت بی پایانت از گزند انحراف، مصون دار و با قدرت بی انتهایت، هر عمل فاسدی که از من سرزده است اصلاح فرما.

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و اموری را که اهتمام به آنها مشغولم می کند کفایت فرما و مرا به کاری که فردای قیامت از من درخواست می کنی وادار کن و در ایام عمرم فراغتی بخش تا به کاری که برای آنم آفریده ای بپردازم و بی نیازم کن و به من روزی وسیع عطا فرما و عزت بخش و گرفتار کبر و خودپسندی نکن و به عبادت خالص مشغولم دار و عبادتم را با عجب و غرور باطل نکن.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و به هر اندازه ای که میان مردم مرا مرتبه می بخشی پیش خودم به همان مقدار خوارم کن و هر عزت ظاهری که برایم پدیدار می سازی به همان اندازه پیش نفسم برای من خواری باطنی پدید آور.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و چنان کن که از هدایت شایسته بهره مند شوم و آن را با هیچ چیز عوض نکنم و از راه حق بهره مند گردم و از آن بیرون نروم و به نیت درست دست یابم و در آن شک نکنم و تا هنگامی که عمرم در راه طاعت تو می گذرد به من عمر بده و آنگاه که عمرم چراگاه شیطان شود، پیش از آنکه دشمنی سخت تو به من روی آورد یا خشم تو محکم و پایدار گردد جانم را بگیر.

پروردگارا، هیچ خصلتی را که مردم زشت بدانند در من نگذار مگر آنکه اصلاحش کنی و هیچ عادت ناپسندی را که مردم سرزنشم کنند باقی نگذار مگر آنکه نیکش سازی و هیچ خوی پسندیده ای را در من ناقص نگذار مگر آنکه کاملش کنی.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و دشمنی سخت دشمنان را درباره من به دوستی تبدیل کن و حسد و بدخواهی سرکشان را به محبت تغییر ده و بدگمانی صالحان را به اطمینان و دشمنی نزدیکان را به دوستی و بدرفتاری خویشان را به خوشرفتاری و خوار کردن نزدیکان را به یاری و دوستی مدارا کنندگان را به دوستی واقعی مبدل فرما.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، آقای **دکتر ابوالفضل طالشیان**، و استاد مشاورم، آقای **دکتر مهدی رفیعی راد** ، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، **پدر و مادر** عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر و دوستان عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

علی علاء

تیر ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

چکیده

در مبحث متر ریمانی، به بیان نادقیق هر متر ریمانی در واقع خانواده ای از ضرب های داخلی در هرنقطه یک خمینه می باشد که روی فضای مماس بر آن نقطه تعریف می شود. مترهایی روی یک خمینه M تعریف شده است که در هر نقطه M یک نرم وابسته به آن نقطه به دست می دهد که روی فضای مماس بر آن نقطه تعریف شده است. هندسه حاصل را هندسه فینسلری می نامند که از بسیاری جهات شبیه هندسه ریمانی است. هندسه فینسلر با یک انتگرال ساده آغاز شد، $\int ds = \int F(x^1, ..., x^n; dx^1, ..., dx^n)$. گفته می شود هندسه فینسلر تعمیمی از هندسه ریمانی است.

مطالعه خمینه های دیفرانسیل پذیر به همراه چنین متری، ابتدا در سال ۱۸۵۴ توسط ریمان آغاز گردید. از آنجا که وی معتقد بود مفهوم متر ریمانی برای مطالعه مفاهیم هندسی مناسب تر است و نتایج حاصل از متر فینسلر تنها برای مطالعات غیرهندسی قابل استفاده است، به مطالعات خود ادامه نداد. اما در سال ۱۹۱۸، پ. فینسلر مطالعه در مورد این متر را به صورت مدون آغاز کرد. در سال ۱۹۶۰، اکبرزاده نظریه جدید فضاهای فینسلر را بر مبنای نظریه همبندی های روی کلاف های فیبر مطرح کرد. افرادی مانند کاشیوابارا[1] و اوتسوکی[2] آن را ادامه دادند و در سال ۱۹۷۰ ماتسوموتو[3] آن را تکمیل کرد.

زمانی ادعا می شد که هندسه فینسلر با وجود پیچیدگی های فراوان و محاسبات طولانی تنها برای حل مسائل حاشیه ای به کار می رود. اما بر خلاف این عقیده، امروزه هندسه فینسلر دیدگاهی هندسی و فیزیکی به دست می دهد و کاربرد های هندسه فینسلر در ترمودینامیک، اپتیک، اکولوژی، تکامل و توسعه بیولوژی گواه این مطلب است.

همانطوری که می دانیم اگر $(V, \|.\|)$ یک فضای برداری نرمدار باشد آنگاه برای هر x و y در V متر $d(x,y) = \|y-x\|$ را می توان روی V تعریف کرد. در حالت خاص، برای فضای $(R^n, |.|)$،

$$d_0(x,y) := |y-x| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + ... + (x_n-y_n)^2}$$

متر معمولی (اقلیدسی استانده) است. با داشتن خم c روی R^n، برای محاسبه طول خم می توانیم فاصله $c(t_{i+1}) - c(t_i)$ را برای $i = 1, ...n$ بیابیم و مجموع ریمان را یافته و انتگرال بگیریم. بدین ترتیب کوتاهترین خم، $\inf_c \int |\dot{c}(t)|dt$، فاصله بین دو نقطه روی خم می باشد. حال سوال اینجاست که آیا می توان ساختاری روی خمینه M تعریف کرد تا بتوان طول خمهای تکه ای دیفرانسیل پذیر را حساب نمود؟ چنانچه روی هر فضای مماس T_xM یک نرم مانند F_x بعنوان نرم مینکوفسکی قرار داده که به طور هموار روی M تغییر کند، می توان چنین ساختاری را تعریف نمود. معروفترین مثال از نرم مینکوفسکی، نرم راندرز است که به جهت محاسبات آسانتر مورد بررسی قرار گرفته است.

[1] S. Kashiwabara
[2] T. Otsuki
[3] M. Matsumoto

اکنون چکیده کار انجام شده را به صورت زیر ارائه می کنیم:
در این پایان نامه، متر راندرز با انحنای ریمان مربعی، نظیر متر ریمانی، مورد بررسی قرار گرفت که در آن معادلات به دست آمده مترهای راندرز $Ricci$ - مربعی و R - مربعی را مشخص می کنند. به خصوص نشان داده شده است که مترهای راندرز R - مربعی باید دارای S - انحنای ثابت باشند. در ادامه با معرفی انحنای ویل[1] معادلات مشخص کننده مترهای راندرز W - مربعی یافته شد.

کلمات کلیدی:

متر فینسلر، متر مربعی، انحنای ریمان، انحنای ویل، S - انحنا

[1] Weyl

فهرست مطالب

فهرست نمادها

T_xM	فضای مماس بر نقطه x از خمینه M
TM	کلاف مماس
$\mathcal{C}$	تانسور کارتان
I	تاب کارتان میانگین
π	نگاشت تصویر از TM به M
$Diff(F)$	مجموعه وابرریختی های C^∞ از F به F
$rank(E)$	رتبه یک کلاف برداری E
$\Gamma(E,B)$	فضای برش های کلاف برداری (E,π,B)
f^*E	کلاف برگردان E توسط f
(VTM,π_v,TM)	کلاف قائم یا عمودی
HTM	زیرکلاف افقی
VTM	زیرکلاف عمودی
∇	همبندی خطی یا مشتق همورد
G^i	ضرایب افشانه
$\mathcal{L}$	تانسور لندسبرگ
$\mathcal{J}$	تانسور لندسبرگ میانگین
$\mathcal{R}$	تانسور ریمان
$\mathcal{E}$	E-تانسور
S	S-انحنا

فصل ۱

مفاهیم اولیه

مقدمه: این فصل به تعریف ها و قضیه های مقدماتی می پردازد که در فصل های بعدی به آنها نیازمندیم. ابتدا با تعریف ساده ای از فضای متری به معرفی ساختاری روی خمینه می پردازیم تا بتوانیم فاصله میان دو نقطه از خمینه را تعریف کنیم و با استفاده از آن طول هر خم را روی خمینه بیابیم. سپس به تعریف نرم مینکوفسکی و متر فینسلر می پردازیم. در ادامه این فصل فرم حجمی، کلاف فیبر، تاب کارتان و مسئله ناوبری زرملو را مورد بررسی قرار می دهیم.

۱-۱ فضای متری

یک فضای متری مجموعه ای از نقاط مجهز به یک متر (به مفهوم تابع فاصله) است. با یک متر می توانیم فاصله یک نقطه تا نقطه دیگر در آن مجموعه را اندازه بگیریم. بطور دقیق تر می توان گفت:

تعریف ۱-۱-۱. یک متر[۱] روی مجموعه M تابعی مانند $d: M\times M\to R$ است که دارای شرایط زیر باشد:

۱. برای هر $p,q\in M$ داشته باشیم: $d(p,q)\geq ۰$. تساوی برقرار است اگروتنها اگر $p=q$.

۲. برای هر $p,q,r\in M$، $d(p,q)\leq d(p,r)+d(r,q)$.

۳. برای دو نقطه $p,q\in M$، $d(p,q)=d(q,p)$.

اگر شرط ۳ برقرار نباشد، d شبه متر و درصورت برقراری شرط ۳، d متر برگشت پذیر[۲] نامیده می شود [۲۷].

مثال ۱-۱-۲. فضای برداری متناهی بعد V را در نظر می گیریم و فرض کنیم $\langle,\rangle$ ضرب داخلی روی V باشد. همچنین برای $y\in V$، نرم $\|y\|:=\sqrt{\langle y,y\rangle}$ را در نظر گرفته و برای $u,v\in V$ متر d را روی V به صورت $d(u,v):=\|v-u\|$ تعریف می کنیم. $\|,\|$ و d را به ترتیب نرم اقلیدسی و متر اقلیدسی روی V می نامند.

حال $V=R^n$ را در نظر می گیریم. با توجه به مطلب فوق، برای $y\in R^n$ نرم اقلیدسی متعارفی[۳] به وسیله،

$$|y|:=\sqrt{\sum_{i=۱}^{n}(y^i)^۲}$$

[۱] Metric

[۲] Reversible metric

[۳] Canonical

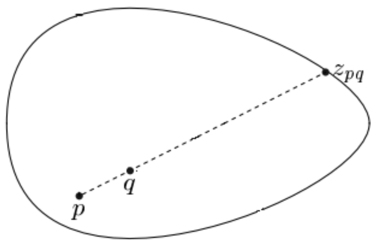
ارائه می شود. در این صورت $d_E : R^n \times R^n \to [\circ, \infty)$ را با ضابطه $d_E(u,v) := |v-u|$ تعریف می کنیم. به آسانی می توان دید که d_E یک متر برگشت پذیر روی R^n است که آن را متر اقلیدسی متعارفی می نامند. زوج $(R^n, |.|)$ را فضای اقلیدسی متعارفی می گویند و با $\mathbb{R}^n$ نمایش می دهند. این فضاها ساده ترین فضاهای متری هستند [۲۷].

تعریف ۱-۱-۳. مجموعه D در $\mathbb{R}^n$ را اکیدا محدب[۱] گویند هرگاه D درون[۲] هر پارخطی را که متصل کننده دو نقطه دلخواه از بستار توپولوژیکی $\overline{D}$ است، شامل شود[۸].

مثال ۱-۱-۴. فرض کنیم Ω یک دامنه کراندار در $(R^n, |.|)$ باشد که اکیدا محدب است. برای دو نقطه مرتب p و q در Ω، فرض کنیم L_{pq} نیم خطی با ابتدا در p و گذرنده از q باشد. چون Ω اکیدا محدب است، نقطه مشترک $z_{pq} := L_{pq} \cap \partial\Omega$ را درنظر گرفته و تعریف می کنیم:

$$d(p,q) := \ln \frac{|z_{pq}-p|}{|z_{pq}-q|}. \qquad (۱-۱)$$

d یک شبه متر (متر برگشت ناپذیر) روی Ω است و آن را متر فانک[۳] می نامند.



شکل ۱-۱: خط L_{pq} در Ω

اکنون حالت خاصی را که $\Omega = \mathbb{B}^n(۱)$ گوی واحد استانده در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ است، در نظر می گیریم. برای دو نقطه مرتب p و q در $\mathbb{B}^n(۱)$ فرض کنیم $z_{pq} = p + \lambda(q-p) \in \partial\mathbb{B}^n(۱)$ باشد که در آن $۱ < \lambda$ است. از رابطه $|z|^۲ = ۱$ داریم:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\sqrt{\langle p, q-p\rangle^۲ + |q-p|^۲(۱-|p|^۲)} - \langle p, q-p\rangle}{|q-p|^۲}\\ &= \frac{\sqrt{|p-q|^۲ - (|p|^۲|q|^۲ - \langle p,q\rangle^۲)} - \langle p, q-p\rangle}{|q-p|^۲}.\end{aligned}$$

---

[۱] Strictly convex

[۲] Interior

[۳] Funk metric

حال با استفاده از (۱-۱) می توان متر فانک را روی $\mathbb{B}^n(1)$ به صورت

$$d(p,q)=\ln\frac{\lambda}{\lambda-1}=\ln\frac{\sqrt{|p-q|^2-(|p|^2|q|^2-\langle p,q\rangle^2)}-\langle p,q-p\rangle}{\sqrt{|p-q|^2-(|p|^2|q|^2-\langle p,q\rangle^2)}-\langle q,q-p\rangle}$$

به دست آورد [۲۷].

مثال ۱-۱-۵. فرض کنیم d متر فانک روی یک دامنه اکیدا محدب $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ باشد. تابع $d_K:\Omega\times\Omega\to[0,\infty)$ را با ضابطه

$$d_K(p,q):=\frac{1}{2}\Big\{d(p,q)+d(q,p)\Big\} \tag{۱-۲}$$

تعریف می کنیم. مشاهده می کنیم که برای سه نقطه p، q و r در Ω،

$$d_K(p,q)\leq d_K(p,r)+d_K(r,q).$$

بنابراین d_K نیز یک متر است که آن را متر کلاین[1] می نامند [۲۷].

فرض کنیم (M,d) یک فضای متر اقلیدسی و نگاشت $c:I=[a,b]\to M$ خم هموار تکه ای روی M باشد. برای این خم،

$$L_d(c):=\int_a^b\|\dot{c}(t)\|dt \tag{۱-۳}$$

را تعریف می کنیم. L_d را ساختار طول[2] تولید شده به وسیله d می نامند. این ساختار طول $L=L_d$، یک متر d_L روی M به صورت

$$d_L(p,q):=\inf_c\{L_d(c);c(a)=p,c(b)=q\}$$

ارائه می کند که بنابر تعریف، $d\leq d_L$. اگر $d=d_L$ باشد، d را متر مسیر[3] می گویند [۲۷].

۱-۲ نرم مینکوفسکی

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی بعد باشد. تابع حقیقی مقدار $F=F(y)$ روی V را یک نرم مینکوفسکی[4] می گویند هرگاه در شرایط ذیل صدق کند:

۱. به ازای هر y در V داشته باشیم: $F(y)\geq 0$.

[1] Klein metric

[2] Length structure

[3] Path metric

[4] Minkowski norm

۲. به ازای هر y در V، $F(y)=0$ اگر وتنها اگر $y=0$ (ناتبهگون[1]) .

۳. به ازای هر y در V و $\lambda>0$، $F(\lambda y)=\lambda F(y)$ (همگنی مثبت از درجه ۱).

۴. F روی $V-\{0\}$، C^∞ باشد بطوریکه برای هر $y\in V$ فرم دو خطی متقارن

$$g_y(u,v):=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\Big[F^2(y+su+tv)\Big]_{s=t=0} \tag{۱-۴}$$

روی V ضرب داخلی باشد.

ضرب داخلی g_y را فرم بنیادی[2] در جهت y و زوج (V,F) را فضای مینکوفسکی می گویند. نرم مینکوفسکی F را متقارن می گویند هرگاه برای هر y در V، $F(-y)=F(y)$ باشد [۱۱].

فرض کنیم $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^n$ یک پایه برای V با بعد n باشد و $F(y)=F(y^i\mathbf{b}_i)$ را بعنوان تابعی از $(y^i)\in R^n$ در نظر می گیریم. آنگاه برای $y\neq 0$ ،

$$g_{ij}(y):=g_y(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_j)=\frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}(y) \tag{۱-۵}$$

که $[F^2]_{y^iy^j}$ نمایشگر مشتقات جزیی F^2 نسبت به y^i و y^j هستند و داریم:

$$g_y(u,v)=g_{ij}(y)u^iv^j,\quad u=u^i\mathbf{b}_i,\ v=v^j\mathbf{b}_j,$$

$$F^2(y)=g_{ij}(y)y^iy^j,\quad y=y^i\mathbf{b}_i.$$

لازم به ذکر است که در همه روابط این پایان نامه از قاعده جمع اینشتین استفاده شده است.

گزاره ۱-۲-۲. ([۲]) *g_y تعریف شده در بالا یک ضرب داخلی است اگروتنها اگر ماتریس متقارن (g_{ij}) معین مثبت[3] باشد.*

برهان. فرض کنیم g_y یک ضرب داخلی باشد. در اینصورت برای $v=v^j\mathbf{b}_j$ داریم: $g_y(v,v)>0$. لذا:

$$v^t[g_{ij}(y)]v=v^j[g_{ij}(y)]v^i=g_{ij}v^iv^j\geq 0$$

پس g_{ij} معین مثبت است و برعکس نیز بطور مشابه برقرار می شود . □

تعریف ۱-۲-۳. برای فضای مینکوفسکی (V,F)،

$$S_F:=\Big\{y\in V|F(y)=1\Big\}=F^{-1}(1)$$

---

[1] non-degenerate

[2] fundamental form

[3] Positive definite

یک ابررویه بسته حول مبدا است که با کره استانده $S^{n-1} \subset R^n$ وابریخت[1] است. S_F را شاخص[2] F می نامند [۱۱].

قضیه ۱-۲-۴. ([۱]) **(قضیه اویلر[3])**
فرض کنیم تابع حقیقی مقدار H در تمام نقاط $R^n - \{0\}$ دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه H همگن مثبت از درجه r است اگر وتنها اگر $\sum_i y^i H_{y^i}(y) = rH(y)$.

برهان. ابتدا فرض می کنیم H تابع همگن مثبت از درجه r باشد، یعنی برای هر $\lambda > 0$،

$$H(\lambda y) = \lambda^r H(y).$$

با ثابت نگه داشتن y و مشتقگیری از رابطه فوق نسبت به λ داریم:

$$\frac{dH(\lambda y)}{d\lambda} = r\lambda^{r-1}H(y) \tag{۱-۶}$$

$$\frac{dH(\lambda y)}{d\lambda} = \sum_i \frac{\partial H(\lambda y)}{\partial(\lambda y^i)}\frac{\partial(\lambda y^i)}{\partial\lambda} = \sum_i y^i \frac{\partial H(\lambda y)}{\partial(\lambda y)} \tag{۱-۷}$$

از روابط (۱-۶) و (۱-۷) نتیجه می شود:

$$\sum_i y^i \frac{\partial H(\lambda y)}{\partial(\lambda y^i)} = r\lambda^{r-1}H(y)$$

حال اگر قرار دهیم $\lambda = 1$، خواهیم داشت:

$$\sum_i y^i H_{y^i} = rH(y) \tag{۱-۸}$$

برعکس، فرض کنیم رابطه (۱-۸) برقرار باشد. باز هم y را ثابت نگه داشته و تابع $H(\lambda y)$ را در نظر می گیریم.

$$\frac{dH(\lambda y)}{d\lambda} = \sum_i \frac{\partial H(\lambda y)}{\partial(\lambda y^i)}\frac{\partial(\lambda y^i)}{\partial\lambda} = \sum_i y^i \frac{\partial H(\lambda y)}{\partial(\lambda y^i)} = \sum_i \frac{1}{\lambda}(\lambda y^i)\frac{\partial H(\lambda y)}{\partial(\lambda y^i)} = \frac{1}{\lambda}rH(\lambda y)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda}H(\lambda y) - \frac{r}{\lambda}H(\lambda y) = 0.$$

[1] diffeomorphic

[2] Indicatrix

[3] Euler's theorem

حال اگر قرار دهیم $x = \lambda y$، داریم:

$$\frac{d}{d\lambda}(\frac{H(x)}{\lambda^r}) = \frac{\frac{dH(x)}{d\lambda}\lambda^r - r\lambda^{r-1}H(x)}{\lambda^{2r}} = \frac{\lambda^r(\frac{d}{d\lambda}H(\lambda y) - \frac{r}{\lambda}H(\lambda y))}{\lambda^{2r}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda}(\frac{H(x)}{\lambda^r}) = 0 \Rightarrow \frac{H(x)}{\lambda^r} = c \Rightarrow H(x) = c\lambda^r$$

اکنون اگر λ را برابر ۱ قرار دهیم، $H(y) = c$ و بنابراین $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$. $\square$

چون نرم مینکوفسکی F همگن مثبت از درجه یک است طبق قضیه اویلر،

$$y^i F_{y^i}(y) = F(y) \iff \frac{y^i}{F}F_{y^i} = 1,$$

$$y^j F_{y^i y^j}(y) = 0.$$

که در آن از قاعده جمع اینشتین استفاده شده است. حال باید نامساوی مثلثی را برای نرم مینکوفسکی ثابت کنیم. برای این کار با استفاده از قضیه اویلر و روابط

$$g_{ij}(y) = \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j}(y) = \Big[FF_{y^i y^j} + F_{y^i}F_{y^j}\Big](y)$$

$$g_{ij}(y)y^i y^j = F^2(y) \iff g_{ij}\frac{y^i}{F}\frac{y^j}{F} = 1$$

می توان نشان داد که هر نرم مینکوفسکی F روی فضای برداری V در نامساوی مثلثی

$$F(u+v) \leq F(u)+F(v), \quad u, v \in V$$

صدق می کند [۸]. بنابراین F برای هر $u, v \in V$ یک متر d روی V به وسیله $d(u,v) := F(v-u)$ تولید می کند. متر d روی V را متر مینکوفسکی می نامند هرگاه به وسیله یک نرم مینکوفسکی F روی V تولید شود [۲۷].

مثال ۱-۲-۵. فرض کنیم $\langle , \rangle$ یک ضرب داخلی روی یک فضای برداری V با پایه $\{\mathbf{b}_i\}$ و $y = y^i\mathbf{b}_i$ باشد. تابع $\alpha : V \longrightarrow [0, \infty)$ را با ضابطه $\alpha(y) := \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ در نظر می گیریم که در آن $a_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j\rangle$. شرایط (۱)، (۲) و (۳) فوق برقرارند و روی $V - \{0\}$ ، α از رده C^∞ است. حال $g_y(u, v)$ را محاسبه می کنیم.

با استفاده از (۱-۴) داریم:

$$\begin{aligned} g_y(u,v) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\Big[\alpha^2(y+su+tv)\Big] = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\Big[\alpha^2(y^1+su^1+tv^1,...,y^n+su^n+tv^n)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\Big[\langle y+su+tv, y+su+tv\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\Big[a_{ij}(y^i+su^i+tv^i)(y^j+su^j+tv^j)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big[2a_{ij}u^i(y^j+su^j+tv^j)\Big] \\ &= a_{ij}u^iv^j = \langle u,v\rangle. \end{aligned}$$

همچنین با بکارگیری (۱-۵) هم می توان نتیجه فوق را به دست آورد:

$$g_{ij}(y) = \frac{1}{2}\alpha^2_{y^iy^j} = \frac{1}{2}\Big[a_{rs}y^ry^s\Big]_{y^iy^j} = \frac{1}{2}\Big[a_{rs}\delta^r_iy^s + a_{rs}\delta^s_iy^r\Big]_{y^j} = \frac{1}{2}\Big[2a_{is}y^s\Big]_{y^j} = a_{is}\delta^s_j = a_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad g_y(u,v) = a_{ij}u^iv^j = \langle u,v\rangle.$$

لذا g_y یک ضرب داخلی است. بنابراین α یک نرم مینکوفسکی است که آن را نرم اقلیدسی[1] روی V و زوج (V,α) را فضای اقلیدسی می گویند.

در حالت خاص، نرم اقلیدسی استانده $|,|$ روی R^n بوسیله

$$|y| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (y^i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_{ij}y^iy^j} \qquad , \qquad y=(y^i)\in R^2$$

تعریف می شود. به سادگی شرایط (۱)، (۲) و (۳) برقرار هستند و روی $R^n - \{0\}$ از رده ی C^∞ می باشد و داریم:

$$g_y(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\left[\sum_{i=1}^n (y^i+su^i+tv^i)^2\right]_{s=t=0} = \sum_{i=1}^n u^iv^j = \sum_{i=1}^n \delta_{ij}u^iv^j = \langle u,v\rangle.$$

در نتیجه $g_y(u,v) = g_{ij}u^iv^j$ یک ضرب داخلی است که در آن $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$. بنابراین $|,|$ یک نرم مینکوفسکی است [۱۱].

مثال ۱-۲-۶. نرم های نااقلیدسی زیادی روی یک فضای برداری V وجود دارند. فرض کنیم $\alpha(y) := \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ یک نرم اقلیدسی روی V (مثال قبل) و $\beta(y) := b_iy^i \in V^*$ یک تابعک خطی

[1] Euclidean norm

روی V باشد بطوریکه

$$\|\beta\|_\alpha = \sup_{y\in V-\{\circ\}} \frac{\beta(y)}{\alpha(y)} < ۱.$$

تابع $F : V \longrightarrow [\circ, \infty)$ را به صورت $F(y) = \alpha(y) + \beta(y)$ تعریف کرده و نشان می دهیم F یک نرم مینکوفسکی روی V است و آن را نرم راندرز[1] می نامند. شرایط (۱) و (۳) برقرارند. شرط (۲) را بررسی می کنیم:

اگر $y = \circ$ باشد آنگاه $F(y) = \circ$. حال فرض کنیم $y_\circ \neq \circ$ بطوریکه $F(y_\circ) = \circ$، لذا

$$\alpha(y_\circ)+\beta(y_\circ) = \circ \;\Rightarrow\; \beta(y_\circ) = -\alpha(y_\circ) \neq \circ \;\Rightarrow\; -\frac{\beta(y_\circ)}{\alpha(y_\circ)} = ۱ \;\Rightarrow\; \frac{\beta(-y_\circ)}{\alpha(y_\circ)} = ۱.$$

اما چون $\alpha(y_\circ) = \alpha(-y_\circ)$ پس

$$۱ = \frac{\beta(-y_\circ)}{\alpha(-y_\circ)} \leqslant \| \beta \|_\alpha < ۱$$

که تناقض است. پس چنین $y_\circ$ای وجود ندارد و شرط (۲) نیز برقرار است. حال $g_y(u,v)$ را محاسبه می کنیم. ابتدا

$$g_{ij} = \frac{۱}{۲}\frac{\partial^۲ F^۲(y)}{\partial y^i \partial y^j} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\left(a_{ij} - \frac{y_i}{\alpha}\frac{y_j}{\alpha}\right) + \left(b_i + \frac{y_i}{\alpha}\right)\left(b_j + \frac{y_j}{\alpha}\right) \quad (۱-۹)$$

که در آن $y_i = a_{ij}y^j$. از رابطه فوق می توان دید که (g_{ij}) معین مثبت است اگر وتنها اگر

$$\|\beta\|_\alpha = \sqrt{a^{ij}b_ib_j} = \sup \frac{\beta(y)}{\alpha(y)} < ۱$$

که در آن $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-۱}$، ([۱۱]).

برای نرم های اقلیدسی E رابطه $E(-y) = E(y)$ برقرار است. اما این شرط برای $F(y)$ تعریف شده فوق برقرار نیست، لذا $F(y)$ اقلیدسی نیست ولی نرم مینکوفسکی است. همچنین از آنجاییکه α و β روی $V - \{\circ\}$ از رده C^∞ اند، پس F نیز چنین است [۲].

در ادامه برای محاسبه دترمینان (g_{ij}) هر نرم مینکوفسکی و معکوس آن، (g^{ij})، به لم زیر نیازمندیم:

لم ۱-۲-۷. ([۱۱]) *فرض کنیم $G = (g_{ij})$ و $H = (h_{ij})$ ماتریس های $n \times n$ متقارن و $C = (c_i)$ یک بردار n-تایی باشند. همچنین فرض کنیم H وارونپذیر باشد و $H^{-۱} = (h^{ij})$، و $g_{ij} = h_{ij}+\delta c_i c_j$. آنگاه*

$$det(g_{ij}) = (۱+\delta c^۲)det(h_{ij}),$$

که $c := \sqrt{h^{ij}c_ic_j}$. اگر $۱ + \delta c^۲ \neq \circ$، آنگاه G معکوسپذیر است و معکوس آن، $G^{-۱} = (g^{ij})$، به وسیله $g^{ij} = h^{ij} - \frac{\delta c^i c^j}{۱+\delta c^۲}$ ارائه می شود که $c^i := h^{ij}c_j$.

[1] Randers norm

به عنوان مثال، با بکارگیری لم فوق برای (۱-۹) دترمینان (g_{ij}) نرم راندرز به صورت

$$det(g_{ij}) = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)^{n+1} det(a_{ij}). \tag{۱-۱۰}$$

خواهد بود.

۱-۳ متر فینسلری

در این بخش به تعریف متر فینسلر می پردازیم و همواره فرض می کنیم خمینه ها C^∞، همبند و متناهی بعد هستند. فرض کنیم M یک خمینه باشد و T_xM فضای مماس M در نقطه x باشد. کلاف مماس[۱] TM بر M عبارتست از $TM := \bigcup_{x\in M} T_xM$. نگاشت تصویر طبیعی نیز به صورت $\pi : TM \longrightarrow M$ و با ضابطه $x \longmapsto (x,y)$ که y در T_xM است، تعریف می شود. در واقع یک متر فینسلر روی خمینه M، تابعی C^∞ روی کلاف مماس سوراخ شده $TM_\circ = TM - \{\circ\}$ می باشد که تحدیدش به هر فضای T_xM یک نرم مینکوفسکی است.

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنیم M یک خمینه باشد. تابع $F = F(x,y)$ روی TM یک متر فینسلر[۲] نامیده می شود هرگاه:

۱. F روی $TM_\circ$ از رده C^∞ باشد.

۲. به ازای هر $x \in M$ ، $F_x(y) = F(x,y)$ روی T_xM یک نرم مینکوفسکی باشد.

زوج (M,F) را یک خمینه فینسلری می نامند [۱۱].

مثال ۱-۳-۲. فرض کنیم برای هر x در خمینه M، تحدید تابع $F : TM \longrightarrow [\circ,\infty)$ به T_xM، یعنی $F_x(y) = F(x,y)$، یک نرم اقلیدسی روی T_xM باشد، یعنی

$$F_x(y) = \sqrt{\langle y,y\rangle_x} \quad , \quad y \in T_xM$$

که در آن $\langle,\rangle_x$ یک ضرب داخلی روی T_xM است. در اینصورت این متر فینسلر را متر ریمانی[۳] می گویند. معمولا یک متر ریمانی بوسیله گردایه ای از ضرب های داخلی $g_x(y) = \langle y,y\rangle_x$ روی فضاهای مماس T_xM نمایش داده می شود. در این مورد همواره $F_x(y) = F_x(-y)$ را داریم [۱۱].

[۱] tangent bundle

[۲] Finsler metric

[۳] Riemannian metric

مثال ۱-۳-۳. در این مثال نشان می دهیم متر ریمانی تعریف شده در مثال قبل یک متر فینسلر است. فرض کنیم M یک خمینه n بعدی C^∞ با متر ریمانی $g = g_{ij}dx^i dx^j$ باشد. در اینصورت $F : TM \longrightarrow [\circ, \infty)$ با ضابطه $(x,y) \longmapsto \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ یک متر فینسلر برای M است، زیرا:
اولا به راحتی شرط (۱) برقرار است. حال نشان می دهیم F_x نرم مینکوفسکی است:

$$\frac{\partial F^2}{\partial y^j} = a_{rs}(x)\frac{\partial y^r}{\partial y^j}y^s + a_{rs}y^r\frac{\partial y^s}{\partial y^j} = a_{js}(x)y^s + a_{rj}(x)y^r = 2a_{js}(x)y^s$$

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial F^2}{\partial y^j} = 2a_{js}\frac{\partial y^s}{\partial y^i} = 2a_{ji}$$

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial F^2}{\partial y^j} \Rightarrow g_{ij} = \frac{1}{2}(2)a_{ij} = a_{ij}.$$

a_{ij} معین مثبت است، پس g_{ij} معین مثبت بوده و بنابر گزاره (۱-۲-۲)، g_y ضرب داخلی است [۲].

مثال ۱-۳-۴. ([۲]) مترهای فینسلری غیر ریمانی نیز وجود دارند. فرض کنید M یک خمینه ریمانی با متر $\alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ (همان تابع F در مثال فوق) و $\beta(x,y) = b_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی روی M باشد.
برای y در T_xM، تابع $F : TM \longrightarrow [\circ, \infty)$ را با ضابطه $F(x,y) = \alpha(x,y) + \beta(x,y)$ را در نظر می گیریم. در این صورت همان گونه که در رابطه (۱-۹) بیان شد،

$$g_{ij} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\left(a_{ij} - \frac{y_i}{\alpha}\frac{y_j}{\alpha}\right) + \left(b_i + \frac{y_i}{\alpha}\right)\left(b_j + \frac{y_j}{\alpha}\right).$$

لذا می توان دید که (g_{ij}) معین مثبت است اگروتنهااگر

$$\|\beta\|_\alpha := \sup\frac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)} = \sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)} < 1$$

که در آن $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$. تابع F یک متر فینسلر غیر ریمانی است زیرا $F_x(y) \neq F_x(-y)$.
F را متر راندرز می گویند.

تعریف ۱-۳-۵. فرض کنیم (M,F) یک خمینه فینسلری باشد. F را یک (α,β)-متر می گویند هرگاه به ازای متر ریمانی $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ و ۱-فرمی $\beta = b_i(x)y^i$ روی M داشته باشیم:

$$F := \alpha\phi(s)\ , \quad s = \frac{\beta}{\alpha}$$

که در آن $\phi = \phi(s)$ تابع مثبت C^∞ روی بازه ای مانند $(-r,r)$ بوده و رابطه $b := \|\beta\|_\alpha < r$ برقرار است که $\|\beta\|_\alpha$ به صورت

$$\|\beta_x\|_\alpha := \sup_{y\in T_xM-\{\circ\}}\frac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)} = \sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)}$$

تعریف می شود [۱۱].