بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

عنوان:

ابرفضاهای برداری روی ابرمیدان‌ها

استاد راهنما:

دکتر منصور قدیری هراتی

استاد مشاور:

پروفسور بیژن دواز

پژوهش‌گر:

سید عنایت اله سالاري

مهرماه ۱۳۹۱

تقدیم به همسر فداکار و مهربانم

تشکر و سپاس

سپاس فراوان دارم از خالقی که آفرید انسان را و آموختش بیان را ''خلق الانسان علمه البیان''.

خالصانه ترین قدردانی های خود را نثار مقام شامخ استاد گرانمایه ام جناب آقای دکتر قدیری هراتی که همچون پدری مهربان، همواره مرا در تحقق این پایان نامه اعانت فرمودند، می‌نمایم.

از استاد راهنمای معزز جناب آقای پروفسور دواز که همواره به شاگردی ایشان به خود می‌بالم، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر انوریه که داوری داخلی این پژوهش را متقبل گردیدند و همواره بنده را مورد تلطف خویش قرار دادند، صمیمانه سپاس گذاری می‌نمایم.

از استاد بزرگوار جناب آقای میروکیلی که داور خارجی این پژوهش بودند و راهنماییهای ارزنده شان، زمینه ساز رفع اشکالات این پایان نامه بود، تشکر فراوان دارم.

و در پایان تشکر و قدرانی می نمایم از تمامی اساتید بزرگوارم که به مصداق حدیث شریف ''من علمنی حرفا فقد صیرنی عبدا''، خود را بنده ایشان می‌دانم.

چکیده

هدف اصلی این پایان نامه، بررسی مفهوم بعد ابرفضاهای برداری روی میدانها و ابرمیدانها و در نهایت بسط و گسترش این مبحث در فضاهای $n-$تایی جبری می‌باشد. در فصل اول مفاهیم کلیدی و قابل استفاده در سراسر این پایان نامه ذکر می شوند. در فصل دوم ضمن ارائه مفهوم ابرفضای برداری روی یك میدان مفروض، استقلال و وابستگی خطی، پایه ، بعد یك ابرفضای برداری و تبدیلات خطی بررسی می گردند. هم‌چنین مفهوم ابرفضاهای برداری خارج قسمتی و یکریختی ابرفضاهای برداری ارائه و رابطه اساسی روی یك ابرفضای برداری و برخی از خواص آن بررسی می‌شود. در فصل سوم تعریف ابرفضای برداری را روی یك ابرمیدان بسط داده و به بررسی مفهوم زیر ابرفضای برداری، استقلال خطی، وابستگی خطی و در ادامه پایه و بعد یك ابرفضای برداری روی یك ابرمیدان مفروض پرداخته و با تعریف جمع مستقیم دو زیر ابرفضای برداری، بعد آنرا بدست می آوریم. نهایتا در فصل چهارم با تعریف ابرگروه کانونی $n-$تایی، مفهوم ابرفضای برداری $n-$تایی روی یك ابرمیدان مفروض را بیان و مجددا مفاهیمی همچون استقلال خطی، وابستگی خطی، پایه و بعد یك ابرفضای برداری $n-$تایی ارائه و قضایایی در این خصوص ذکر می گردد. در پایان فصل به تعریف تبدیل خطی بین دو ابرفضای برداری $n-$تایی روی یك ابرمیدان ثابت می پردازیم و برخی از خواص تبدیلات خطی را بیان می‌کنیم و در پایان قضایای یکریختی ابرفضاهای برداری $n-$تایی را بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: برفضای برداری، زیرابرفضای برداری، استقلال خطی، ترکیب خطی، پایه، بعد، ابرگروه کانونی $n-$تایی، ابرفضای برداری $n-$تایی، تبدیل خطی، قضایای یکریختی ابرفضاهای برداری $n-$تایی.

فهرست مطالب

مقدمه و تاریخچه

در سال ۱۹۲۸ درنته [۱۲] [1] نظریه گروههای $n-$تایی را بیان نمود. بیان این نظریه نقطه آغازی برای تعمیم مفهوم گروههای جبری بود. در سال ۱۹۳۴ مارتی [۲۲] [2] در هشتمین کنفرانس ریاضیدانان اسکاندیناوی تعمیمی از مفهوم گروههای جبری ارائه نمود که منجر به تولد نظریه ابرساختارهای جبری گردید. اگرچه مارتی در سن جوانی در طول جنگ دوم جهانی از دنیا رفت و نتوانست بیش از دو مقاله در این خصوص ارائه نماید، لیکن ایده های او توسط دانشمندان دیگر مورد مطالعه و کنکاش قرار گرفت. به عنوان نمونه کونتزمن [۱۸] [3] در فرانسه و گریفیتس [۱۶] [4] ، وال [۳۱] [5] ، درشر [6] و اوره [۱۳] [7] در ایالات متحده و اوتومی [۲۵] [8] در ژاپن موفق شدند این نظریه را تعمیم داده و قضایای مختلفی به آن بیفزایند. در دهه پنجاه دربوهلاف [۱۴] [9] در چکسلواکی روی کلاسهایی از ابرگروهها و بوسینی [۳] [10] در ایتالیا روی شرکت پذیری ابرگروهها مطالعاتی انجام دادند. در فرانسه سید [۲۷]

---

[1] Dörnte

[2] Marty

[3] Knutzman

[4] Griffiths

[5] Wall

[6] Dresher

[7] Ore

[8] Otomi

[9] Drbohlav

[10] Boccini

[۱۱] روی ابرگروهوارها تحقیقاتی انجام داد و پس از آن میتاس [۲۴] [۱۲] در یونان نظریه ابرگروههای کانونی را بنیانگذاری نمود. مفهوم ابرگروههای $n-$تایی برای نخستین بار توسط دواز و وجیوکلیس [۱۰] [۱۳] ارائه گردید که در واقع تعمیمی از نظریه گروههای $n-$تایی می‌باشد. تعریف ابرفضاهای برداری روی یك میدان برای نخستین بار توسط تالینی [۲۸] [۱۴] ارائه گردید. در این نظریه بجای گروه آبلی، از ابرگروه آبلی استفاده گردید ولی میدان مورد استفاده همان میدان کلاسیك می‌باشد. بعدها مفاهیم جدیدی توسط وجیوکلیس [۳۰]، عامری [۱۵] و دهقان [۱] [۱۶] بیان گردید که منجر به توسعه بیشتر این مفاهیم گردید. هم چنین اگر به جای اعمال دوتایی تعریف شده روی میدان مورد نظر، یا عمل ضرب عناصر میدان در عناصر گروه، از ابرعمل استفاده شود، ابرفضاهای برداری جدیدی با خواص جدیدتر و جالب تر، حاصل می شود. به عنوان مثال اخیرا روی [۱۷] و سامانتا [۲۶] [۱۸] مفهوم ابرفضاهای برداری را روی ابرمیدان کراسنر گسترش دادند.

[۱۱] sade

[۱۲] Mittas

[۱۳] Vougiouklis

[۱۴] Tallini

[۱۵] Ameri

[۱۶] Dehghan

[۱۷] Roy

[۱۸] Samanta

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصل های آتی را از مراجع [۶]، [۷] و [۱۵] بیان می‌کنیم. این مفاهیم عبارتند از ابرگروه دوتایی و $n-$تایی، پلی گروه دوتایی و $n-$تایی، ابرگروه کانونی، ابرحلقه(کراسنر [۱۷]) و ابرمیدان.

۱.۱ ابرگروه و ابرگروه $n-$تایی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم H یك مجموعه ناتهی و $\rho^*(H)$ معرف مجموعه تمام زیرمجموعه های ناتهی H است. یك ابرعمل دوتایی یا بطور خلاصه ابرعمل روی H نگاشتی است مانند $\circ : H\times H \rightarrow \rho^*(H)$. معمولا در تعریف فوق به ازای $a, b \in H$ ، $\circ(a, b)$ را با $a \circ b$ نشان می‌دهیم. به علاوه چنان چه A و B زیرمجموعه های ناتهی از H باشند، آن‌گاه

$$A \circ B = \bigcup_{(a,b)\in A\times B}(a \circ b),$$

و برای سهولت در کار $A \circ \{x\}$ را با $A \circ x$ نشان می‌دهیم .

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم H مجموعه ای ناتهی و H^n بیانگر n بار ضرب دکارتی H در خودش است. در این صورت به نگاشت $f : H^n \rightarrow \rho^*(H)$ یك ابرعمل $n-$تایی گوییم. همانند آنچه در تعریف قبلی ذکر کردیم، چنان چه $A_۱$ و ... و A_n زیرمجموعه هایی از H باشند، آن‌گاه

$$f(A_۱, \cdots , A_n) = \bigcup_{x_i\in A_i} f(x_۱, \cdots , x_n)\cdot$$

۱. گیریم H یك مجموعه ناتهی و $\circ : H \times H \rightarrow \rho^*(H)$ ابرعمل تعریف شده روی آن باشد . در این‌صورت زوج $(H, \circ)$ را ابرگروهوار نامیم .

۲. ابرگروهوار $(H, \circ)$ را نیم ابرگروه نامیم هرگاه به ازای هر $a, b, c \in H$ داشته باشیم :

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

۳. ابرگروهوار $(H, \circ)$ را شبه ابرگروه نامیم هرگاه به ازای هر $a \in H$ داشته باشیم :

$$a \circ H = H \circ a = H.$$

۴. نیم ابرگروهی که شبه ابرگروه نیز باشد، ابرگروه می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. گیریم H یك ابرگروه باشد. در این صورت زیرمجموعه ناتهی G از H را یك زیرابرگروه نامیم هرگاه $(G, \circ)$ خود یك ابرگروه باشد.

مثال ۴.۱.۱. مجموعه $H = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ را با ابرعمل تعریف شده زیر در نظر می‌گیریم:

$\circ$	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۱	$\{۱, ۲, ۳\}$	H
۲	۲	۲	$\{۱, ۳\}$	H
۳	۳	۳	$\{۱, ۲, ۳\}$	H
۴	۴	۴	۴	H

در این‌صورت $(H, \circ)$ یك ابرگروه و $G = \{۱, ۲, ۳\}$ یك زیرابرگروه از آن است.

در ادامه برای آن که سایر تعاریف ساده تر و قابل فهم تر باشند، به معرفی چند نماد می پردازیم. فرض کنیم P یك مجموعه ناتهی و $f : P^n \to \rho^*(P)$ یك ابرعمل $n-$تایی است.

نماد۱. از این پس غالبا برای نشان دادن دنباله $x_i, x_{i+۱}, \cdots, x_j$ از نماد x_i^j استفاده می‌کنیم. واضح است که اگر $j < i$ دنباله موردنظر تهی می‌باشد.

پس به عنوان مثال به جای عبارت $f(x_۱, \cdots, x_i, y_{i+۱}, \cdots, y_n)$، از عبارت جایگزین $f(x_۱^i, y_{i+۱}^n)$ استفاده می‌نماییم.

نماد ۲. فرض کنیم $m = k(n - ۱) + ۱$.

در این‌صورت به جای عبارت $f(f(\ldots, f(f(x_۱^n), x_{n+۱}^{۲n-۱}), \ldots), x_{(k-۱)(n-۱)+۲}^{k(n-۱)+۱})$ از عبارت جایگزین $f_{(k)}(x_۱^m)$ استفاده می‌کنیم. هم‌چنین از نماد $f_{(.)}$ به ازای مقادیر $k = ۱, ۲, ...$ استفاده می‌نماییم.

نماد۳. فرض کنیم $a \in P$. در این‌صورت به جای $f(\underbrace{a, \ldots, a}_{n})$ از نماد $f(\overset{(n)}{a})$ استفاده می‌کنیم.

نماد۴. از این پس به جای n تایی مرتب $f(a_۱^i, \overset{(n-i)}{b})$ از نماد $f(a_۱^i, b.)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم H یک مجموعه ناتهی و $f : H^n \to \rho*(H)$ یک ابرعمل $n-$تایی است. در این صورت H را یک ابرگروه $n-$تایی گوییم هرگاه

۱. به ازای هر $i, j \in \{۱, ۲, \cdots, n\}$ و $x_۱, \cdots, x_{۲n-۱}, x \in P$ داشته باشیم:

$$f(x_۱^{i-۱}, f(x_i^{n+i-۱}, x_{n+i}^{۲n-۱})) = f(x_۱^{j-۱}, f(x_j^{n+i-۱}, x_{n+j}^{۲n-۱})).$$

۲. معادله $b \in f(a_۱^{i-۱}, x, a_{i+۱}^n)$ به ازای هر $a_۱, \cdots, a_n, b \in H$ و $i \in \{۱, \cdots, n\}$، دارای یک جواب برای $x \in H$ باشد.

شایان ذکر است ابرگروه $n-$تایی فوق با نماد (H, f) نشان داده می شود.

مثال ۶.۱.۱. [۱۰] فرض کنیم $H = \{x, y, z\}$ و ابر عمل ۳$-$تایی $f : H^۳ \to \rho * (H)$ به شکل زیر تعریف شده است:

$$\begin{array}{lll}
f(x,x,x) = x & f(y,y,x) = \{x,z\} & f(z,x,x) = z \\
f(x,x,y) = y & f(y,y,y) = \{y,z\} & f(z,x,y) = \{y,z\} \\
f(x,y,x) = y & f(y,x,x) = y & f(z,y,x) = \{y,z\} \\
f(x,x,z) = z & f(y,y,z) = H & f(z,x,z) = \{x,y\} \\
f(x,y,y) = \{x,z\} & f(y,x,y) = \{x,z\} & f(z,y,y) = H \\
f(x,y,z) = \{y,z\} & f(y,x,z) = \{y,z\} & f(z,y,x) = H \\
f(x,z,x) = z & f(y,z,x) = \{y,z\} & f(z,z,x) = \{x,y\} \\
f(x,z,y) = \{y,z\} & f(y,z,y) = H & f(z,z,y) = H \\
f(x,z,z) = \{x,y\} & f(y,z,z) = H & f(z,z,z) = \{y,z\}.
\end{array}$$

در این صورت (H, f) یک ابرگروه ۳$-$تایی است.

۲.۱ پلی گروه و پلی گروه $n-$تایی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $\circ : P \times P \to \rho^*(P)$ یک ابرعمل و $^{-۱}$ یک عمل یکانی روی P است. در این‌صورت به $\langle P, \circ, e, ^{-۱} \rangle$ یک پلی گروه گوییم هرگاه به ازای هر $x, y, z \in P$ اصول زیر برقرار