بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده

یکی از کاربردهای رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها، تخصیص هزینه‌های (منابع) ثابت و هدف‌گذاری در میان واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس است. هزینه‌ی ثابت عبارت است از هزینه‌ای که برای ایجاد زیرساخت‌های مشترک، برای زیرواحدهای یک سازمان استفاده شود.

هنگامی‌که هزینه‌ها از بودجه پیشی می‌گیرند سازمان نیازمند است که زیرواحدها مقداری از هزینه‌ها را تقبل کنند. در این حالت باید به دنبال روش منصفانه‌ای بود که هزینه‌های ثابت را بین زیرواحدها تخصیص داد. منابع ورودی ثابت عبارت است از منابعی که سازمان می‌خواهد به عنوان ورودی به هر زیرواحد اختصاص دهد. در اینجا نیز باید به دنبال روش منصفانه‌ای بود که منابع ورودی ثابت را بین زیرواحدها تخصیص داد و اهداف خروجی را با توجه به عملکرد زیرواحدها و منابع ورودی اختصاص یافته تعیین کرد. دو مساله‌ی بالا مشابه‌اند اما یکسان نیستند. از نقطه نظر زیرواحدها تفاوت در این است که تخصیص هزینه ثابت بدین معنی است که زیرواحدها باید خودشان هزینه‌ی برآمده از سیستم مشترک را بپردازند. ولی تخصیص منابع ورودی ثابت و تعیین هدف بدین معنی است که زیرواحدها مستلزم‌اند منابع ورودی سازمان را بپذیرند وبرای تولید اهداف خروجی بکار ببرند. کوک و ژو برای مسائل تخصیص، روش عملی ارائه دادند. که با افزودن برخی محدودیت‌های خاص، روش آنها جواب شدنی ندارد.

در این پایان‌نامه بر روی دو موضوع اصلی تمرکز شده است.

۱. به وسیله‌ی بهبود روش کوک و ژو، یک روش جدید تخصیص هزینه (منابع) ثابت بدست آورده شود.

۲. اهداف ثابت بنابر مقدار منابع ثابتی که به وسیله‌ی واحدهای تصمیم‌گیرنده فردی به اشتراک گذاشته شده، تعیین گردد.

هم‌چنین یک روش جدید، با افزودن محدودیت‌های خاص به مدل به‌منظور شدنی بودن تخصیص هزینه (منابع) ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تخصیص هزینه‌ی ثابت، تخصیص منابع، هدف‌گذاری.

رده‌بندی موضوعی ۲۰۱۰: ۹۰B۹۹, ۹۱B۳۲

مقدمه

تحقیق در عملیات یکی از شاخه‌های ریاضیات است که به مدل‌سازی ساختارهای صنعتی، اقتصادی و غیره می‌پردازد، توان عملیاتی آنها را اندازه‌گیری می‌کند و راه‌حل‌هایی برای بهبود روش‌ها ارائه می‌دهد. پیچیده‌تر شدن ساختارها، حجم بسیار زیاد داده‌ها و اثرات عوامل بیرونی بر عملکرد واحدها، رقابت شدید جهانی،محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب (مثلا دولتی بودن) از عواملی است که مدیران را بر آن داشت تا با ارزیابی علمی از کارکرد واحدها در راستای بهبود کارایی و بالا بردن بازده بکوشند.

تحلیل پوششی داده‌ها شاخه‌ای از تحقیق در عملیات است که به بررسی و ارزیابی کارایی واحدهای مشابه می‌پردازد و با ارائه‌ی روش‌ها و مدل‌های ریاضی زمینه‌ای برای ارزیابی علمی پروژه‌های کاربردی فراهم می‌سازد. تخصیص هزینه (منابع) ثابت و هدف‌گذاری در میان واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس، یکی از کاربردهای تحلیل پوششی داده‌هاست که در مقالات اخیر دیده شده است.

در این پایان نامه روش‌هایی که تاکنون برای حل مساله‌ی تخصیص هزینه‌ی ثابت، با استفاده از تکنیک‌های تحلیل پوششی داده‌ها، ارائه شده است، مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در فصل اول، با بیان تعاریف و قضایایی که در طول کار مورد نیاز است، تا حد زیادی پیش‌نیازهای دانستنی این پایان‌نامه برآورد شده است. در فصل دوم، خلاصه‌ای از روش‌های ارائه شده توسط کوک[1] و کرس[2]، بسلی[3]، کوک و ژو[4] و لی[5] و همکارانش مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل سوم، روش تخصیصی ارائه شده توسط لین[6] بررسی می‌شود. در نهایت در فصل چهارم با حل یک مثال، به کمک هریک از روش‌های گفته شده در فصل‌های قبلی و مقایسه آنها با یکدیگر، کار به پایان می‌رسد.

مقالات اصلی استفاده شده در این پایان‌نامه به شرح زیر است.

[1] Beasly, J.E., (2003). *Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research 147, 198-216.

[2] Cook, W.D. and Kress, M., (1999). *Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach*, European Journal of Operational Research 119, 652-661.

[1] Cook

[2] Kress

[3] Beasly

[4] Zhu

[5] Li

[6] Lin

[3] Cook, W.D. and Zhu, J., (2005). *Allocation of shared costs among decision making units: A DEA approach*, Computers and Operations Research 2, 2171-2178.

[4] Jahanshahloo, G.R., Hosseinzadehlotfi, F., Shoja, N. and Sanei, M., (2004). *An alternative approach for equitable allocation of shared costs by using DEA*, Applied Mathematics and Computation 153, 267-274.

[5] Li, Y., Yang, F., Liang, L. and Hua, Z., (2009). *Allocating the fixed cost as complement of other cost inputs: A DEA approach*, European Journal of Operational Research 197, 389-401.

[6] Lin, R., (2011). *Allocating fixed costs or resources and setting targets via data envelopment analysis*, Applied Mathematics and Computation 217, 6349-6358.

فهرست مطالب

فصل ۱

درآمدی بر تحلیل پوششی داده‌ها DEA

۱.۱ مقدمه

به منظور ارزیابی علمی عملکرد واحدها و بخش‌ها، فعالیت‌های علمی زیادی صورت گرفته است. تعریف رابطه‌ی عملکرد با روابط تاثیرگذار به ساخت تابعی با عنوان تابع‌تولید[۱] منجر شد که از ترکیب ورودی‌ها، بیشترین خروجی ممکن را تولید می‌کند. برای بدست آوردن تابع، آنرا به روش‌های مختلف تقریب زدند. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش‌های پارامتری و غیرپارامتری اشاره کرد.

با پیشرفت تکنولوژی، روش‌های پارامتری در برخورد با مسائل موفق عمل نکردند. برای رفع مشکلات ناشی از روش‌های پارامتری، فارل[۲] در سال ۱۹۵۷ برای نخستین بار روش‌های غیرپارامتری را ابداع کرد که در ادامه مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۲.۱ مفاهیم اساسی برنامه‌ریزی خطی

ابتدا مسائل اولیه (P) و دوگان (D) را که به ترتیب به صورت زیر نمایش داده می‌شوند را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = CX \\ s.t. \quad & AX - S = b, \\ & X \geq 0, \quad S \geq 0. \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & W = Yb \\ s.t. \quad & AY + T = C, \\ & Y \geq 0, \quad T \geq 0. \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

---

[۱] Production Function

[۲] Farrell

قضیه ۱.۲.۱. *قضیه‌ی قوی دوگانی* [۲۸، ۲. ۶.۱۱]

اگر یکی از مسائل P یا D جواب بهینه داشته باشد، آنگاه هر دو مساله جواب بهینه دارند و مقدار بهینه‌ی هردو با هم برابر است.

قضیه ۲.۲.۱. *قضیه‌ی مکمل کمبود ضعیف*[3] [۲۸، ۲. ۶.۱۴]

فرض کنید (X^*, S^*) و (Y^*, T^*) به ترتیب جواب‌های شدنی مسائل (۱.۱) و (۲.۱) باشند. این جواب‌ها برای مسائل مربوطه بهینه هستند اگروتنهااگر

$$T^*X^* = 0, \qquad Y^*S^* = 0.$$

قضیه ۳.۲.۱. *قضیه‌ی مکمل کمبود قوی*[4] [۲۹، ۲. ۵.۲]

اگر مسائل معرفی شده P و D شدنی باشند، آنگاه جواب‌های بهینه‌ای مانند $(\hat{X}, \hat{S})$ و $(\hat{Y}, \hat{T})$ به ترتیب برای P و D یافت می‌شوند به‌طوری‌که

$$\hat{y}_i + \hat{s}_i > 0 \quad \text{و} \quad \hat{y}_i\hat{s}_i = 0 \qquad i = 1, ..., m,$$
$$\hat{t}_j + \hat{x}_j > 0 \quad \text{و} \quad \hat{t}_j\hat{x}_j = 0 \qquad j = 1, ..., n.$$

۳.۱ واحد تصمیم‌گیرنده

واحد تصمیم‌گیرنده DMU[5] واحدی است که با دریافت ورودی X، خروجی Y را تولید می‌کند. ورودی یا خروجی واحدهای تصمیم‌گیرنده به صورت تک موءلفه‌ای یا به صورت بردار در نظر گرفته می‌شوند. به عنوان مثال ورودی واحد j با بردار $(x_{1j}, ..., x_{mj})$ و خروجی آن‌را با بردار $(y_{1j}, ..., y_{sj})$ نشان می‌دهند.

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده دارید که با $DMU_j = (X_j, Y_j)$ $(j = 1, ..., n)$ نشان داده می‌شوند به‌طوری‌که $X_j \in \mathbb{R}^m$، $X_j \geq 0$ و $X_j \neq 0$ $(j = 1, ..., n)$ نشان‌دهنده‌ی بردار ورودی و $Y_j \in \mathbb{R}^s$، $Y_j \geq 0$ و $Y_j \neq 0$ $(j = 1, ..., n)$ نشان‌دهنده‌ی بردار خروجی است.

۱.۳.۱ واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی متجانس

منظور از واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی متجانس واحدهایی هستند که با دریافت ورودی‌های هم‌جنس، خروجی‌های هم‌جنس تولید می‌کنند. مانند شعب یک بانک که با دریافت امکاناتی (ورودی) مثل پرسنل، موجودی، فضای اداری، کامپیوتر و... خدمات مشابهی (خروجی) مانند جمع‌آوری سپرده، حصول سود، دادن وام و... را به مشتریان ارائه می‌دهند.

---

[3] Weak Complementary Slackness Theorem

[4] Strong Complementary Slackness Theorem

[5] Decision Making Unit

۴.۱ کارایی

کارایی[۶] به معنای خوب کار کردن، تحت تاثیر شاخص‌های درون سازمانی مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و از این قبیل قرار دارد. که به‌صورت نسبت خروجی به ورودی بیان می‌شود.

$$\text{کارایی} = \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}} \qquad (۳.۱)$$

کارایی در شاخه‌های مطلق[۷] و نسبی[۸] دارای تعاریف جداگانه است.

کارایی مطلق یک DMU، مقایسه‌ی عملکرد آن با استانداردهای کلی است. کارایی نسبی، سنجش عملکرد یک DMU، نسبت به دیگر واحدهای آن مجموعه است. چون استانداردهای کلی در همه‌ی زمینه‌ها تعریف نشده و رسیدن به آن مشکل است، کاربرد کارایی نسبی گسترده‌تر از کارایی مطلق است.

اگر واحد تصمیم‌گیرنده‌ی مورد نظر دارای یک ورودی و یک خروجی باشد با استفاده از رابطه‌ی (۳.۱) کارایی آن قابل محاسبه است و اندازه‌ی حاصل، کارایی مطلق آن واحد به‌شمار می‌اید.

در صورت وجود چندین ورودی یا چندین خروجی برای واحد تصمیم‌گیرنده‌ی مورد نظر، نسبت مجموعه‌ی وزن‌دار شده‌ی خروجی به مجموعه‌ی وزن‌دار شده‌ی ورودی به صورت

$$E_o = \frac{u_۱ y_{۱o} + ... + u_s y_{so}}{v_۱ x_{۱o} + ... + v_m x_{mo}}$$

کارایی آن واحد را اندازه‌گیری می‌کند. که u_r وزن خروجی rام یعنی y_{ro} $(r = ۱, ..., s)$ و v_i وزن ورودی iام یعنی x_{io} $(i = ۱, ..., m)$ می‌باشد. اگر u_r قیمت خروجی rام $(r = ۱, ..., s)$ و v_i هزینه‌ی ورودی iام $(i = ۱, ..., m)$ معلوم باشد، آنگاه کارایی فوق به کارایی اقتصادی[۹] معروف است. قابل ذکر است که تخصیص وزن‌های مناسب به ورودی‌ها و خروجی‌ها، نقش تعیین‌کننده‌ای در اندازه‌ی کارایی دارد.

کارایی نسبی از تقسیم کارایی تمام واحدها به بزرگترین آن‌ها حاصل می‌شود. بنابراین کارایی نسبی واحدها همواره کوچکتر یا مساوی یک است. به‌طور مثال کارایی نسبی واحد تصمیم‌گیرنده‌ی o به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$RE_o = \frac{E_o}{\max\limits_j \{E_j\}}, \qquad o \in \{۱, ..., n\}.$$

۵.۱ تحلیل پوششی داده‌ها DEA

تحلیل پوششی داده‌ها DEA[۱۰] شامل تکنیک‌ها و روش‌هایی برای ارزیابی کارایی و یا سنجش بهره‌وری واحدهای تصمیم‌گیرنده است.

---

[۶] Efficiency

[۷] Absolute Efficiency

[۸] Relative Efficiency(RE)

[۹] Economic Efficiency

[۱۰] Data Envelopment Analysis

DEA در واقع تعمیم کار فارل در ابداع روش غیرپارامتری است. فارل، با استفاده از ورودی‌ها و خروجی‌های واحد تصمیم‌گیرنده و با استفاده از اصول حاکم بر آنها، مجموعه‌ای با عنوان مجموعه‌ی امکان تولید را ارائه و قسمتی از مرز آن‌را تقریبی از تابع‌تولید خواند.

این مرز را مرز کارا نیز می‌نامند و واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که روی این مرز قرار می‌گیرند، کارا ارزیابی می‌شوند. از آنجاکه DEA تکنیک ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده است، حداقل یکی از واحدها روی مرز و بقیه واحدها در زیر مرز آن قرار دارند. نام تحلیل پوششی داده‌ها، از ویژگی پوششی بودن منشا گرفته است. این روش‌ها در مقایسه با بقیه روش‌های عددی، مشخص بودن وزن‌ها از قبل و تخصیص آن‌ها به ورودی و خروجی داده‌ها لازم نیست، هم‌چنین این روش‌ها نیازی به اشکال تابعی از قبل مشخص شده (مانند روش رگرسیون‌های آماری) و یا شکل صریح تابع‌تولید (مانند برخی از روش‌های پارامتری) ندارند.

تحلیل پوششی داده‌ها، امکاناتی را برای مطالعه‌ی واحدهایی با چند ورودی و چند خروجی فراهم می‌کند و توانایی آن بیشتر به دلیل استفاده از برنامه‌ریزی خطی است. برنامه‌ریزی خطی تحلیل پوششی داده‌ها را قادر می‌سازد تا از روش‌های حل مساله برنامه‌ریزی خطی و قضایای دوآلیتی استفاده کند و به این ترتیب منبع و مقدار ناکارایی را برای هر ورودی و خروجی مشخص کند.

DEA، هم‌چنین فرصت‌های زیادی برای همکاری میان تحلیل‌گر و تصمیم‌گیرنده ایجاد می‌کند. این همکاری‌ها می‌تواند در راستای انتخاب ورودی و خروجی واحدهای تحت ارزیابی و چگونگی عملکرد و الگویابی نسبت به مرز کارا باشد.

۶.۱ مجموعه امکان‌تولید

مجموعه‌ای به صورت

$$T=\{(X,Y) : \text{ورودی } X \text{ ، خروجی } Y \text{ را تولید می‌کند}\}$$

که در آن X بردار ورودی و Y بردار خروجی است را مجموعه‌ی امکان‌تولید PPS[۱۱] می‌نامند. این تعریف با توجه به نوع تکنولوژی تولید، PPS را مشخص می‌کند یعنی تکنولوژی‌های تولید متفاوت، PPS های متفاوت تولید می‌کنند.

هرکدام از مدل‌های DEA به یک مجموعه امکان‌تولید یکتا وابسته هستند که مجموعه‌ی امکان‌تولید نیز به طور یکتا، توسط یک مجموعه از فرض‌ها و اصول معین تخمین زده می‌شود.

برای معرفی مدل‌ها، از اصول موضوعه‌ی زیر روی مجموعه امکان‌تولید T استفاده می‌شود.

اصل اول: اصل شمول مشاهدات «ناتهی بودن[۱۲]».

[۱۱] Productivity Possible Set

[۱۲] Nonempty

تمام مشاهدات به مجموعه‌ی امکان‌تولید تعلق دارند.

$$(X_j, Y_j) \in T, \qquad j = 1, ..., n.$$

اصل دوم: اصل بی‌کرانی اشعه‌ی تولید «بازده به مقیاس ثابت[۱۳]».

این اصل بیان می‌کند که اگر $(X, Y) \in T$ و $\lambda \geq 0$، آنگاه $(\lambda X, \lambda Y) \in T$.

اصل سوم: تحدب[۱۴]

T مجموعه‌ای محدب است، یعنی اگر $(X, Y) \in T$ و (X', Y')، آنگاه برای هر $0 \leq \lambda \leq 1$،

$$(\lambda X + (1-\lambda)X', \lambda Y + (1-\lambda)Y') \in T.$$

اصل چهارم: اصل امکان‌پذیری[۱۵]

این اصل بیان می‌کند که اگر $(X, Y) \in T$، آنگاه به ازای هر $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ که $X \geq \overline{X}$ و $Y \leq \overline{Y}$، $(\overline{X}, \overline{Y}) \in T$.

اصل پنجم: اصل کمینه درون‌یابی[۱۶]

طبق این اصل T کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول اول تا با چهارم صدق می‌کند. در حقیقت، مجموعه‌ی امکان‌تولیدی که با چهار اصل بالا ساخته می‌شود در اصل پنجم نیز صدق می‌کند. ثابت می‌شود که اصول پنج‌گانه بالا، مجموعه‌ی منحصربفرد T_c را به‌صورت زیر تعریف می‌کند.

$$T_c = \{(X, Y)|\ X \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j, \quad Y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j, \quad \lambda_j \geq 0 \quad , j = 1, ..., n\}.$$

مجموعه‌ی T_c با قبول اصل بازده به مقیاس ثابت ساخته شده است و علامت نشانگر c همین خاصیت است. با حذف اصل بی‌کرانی اشعه‌تولید، مجموعه‌امکان زیر ساخته می‌شود که دارای بازده به مقیاس متغیر و به مجموعه امکان‌تولید BCC[۱۷] معروف است.

$$T_v = \{(X, Y)|\ X \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j, \quad Y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \quad , j = 1, ..., n\}.$$

۷.۱ مدل CCR

فرض کنیم DMU_j $(j = 1, ..., n)$، n واحد تصمیم‌گیرنده‌ی متجانس هستند. اگر هدف، ارزیابی عملکرد DMU_o باشد، به روش‌های زیر می‌توان کارایی این واحد را نسبت به مرز کارای CCR[۱۸] مورد ارزیابی قرار داد:

الف. کاهش ورودی‌ها

[۱۳] Constant Return -to- Scale (CRS)

[۱۴] Convexity

[۱۵] Possibility

[۱۶] Minimality

[۱۷] Banker-Cooper-Charnes (BCC)

[۱۸] Charnes-Cooper-Rhodes (CCR)

ب. افزایش خروجی‌ها

ج. کاهش ورودی‌ها و افزایش خروجی‌ها

برحسب نیاز موارد الف و ب شرح داده شده است.

الف. کاهش ورودی‌ها

این کاهش به صورت شعاعی و به سمت مرز انجام می‌گیرد. در این‌جا هدف پیدا کردن واحد مجازی است که همین خروجی را با حداقل ورودی تولید کند. یعنی

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ s.t. \quad & (\theta X_o, Y_o) \in T_c. \end{aligned}$$

با توجه به ساختار T_c،

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_{ij} \leq \theta x_{io}, \quad i = 1, ..., m, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, ..., s, \\ & \lambda_j \geq 0. \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

مدل (۴.۱) مدل CCR در ماهیت ورودی است که به مدل پوششی CCR معروف است. این مدل همواره شدنی بوده و دارای جواب بهینه متناهی است و مقدار بهین آن در شرط $0 < \theta^* \leq 1$ صدق می‌کند. با تعریف متغیرهای کمکی مدل فوق به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io}, && i = 1, ..., m, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, && r = 1, ..., s, \\ & \lambda_j \geq 0, && j = 1, ..., n, \\ & s_i^- \geq 0, && i = 1, ..., m, \\ & s_r^+ \geq 0, && r = 1, ..., s. \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

الف. اگر θ^* (مقدار بهینه‌ی θ) برابر یک و در تمامی جواب‌های بهینه متغیرهای کمکی صفر باشند، DMU_o به

مفهوم پاراتوکارا و یا کارای قوی[۱۹] خوانده می‌شود.

ب. اگر $\theta^* = ۱$، ولی در بعضی از جواب‌های بهینه، حداقل یکی از متغیرهای کمکی ناصفر باشد، DMU_o کارای ضعیف خوانده می‌شود.

ج. اگر $\theta^* \neq ۱$، DMU_o ناکاراست.

تبصره: مقدار θ^* را کارایی‌شعاعی یا تکنیکی واحد تصمیم‌گیرنده گویند.

دوگان مدل (۵.۱) تحت عنوان مدل مضربی CCR به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = \sum_{r=۱}^{s} u_r\, y_{ro} & & \\ s.t. \quad & \sum_{i=۱}^{m} v_i\, x_{io} = ۱, & & \\ & \sum_{r=۱}^{s} u_r\, y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i\, x_{ij} \leq ۰, & & j = ۱, ..., n, \\ & u_r \geq ۰, & & r = ۱, ..., s, \\ & v_i \geq ۰, & & i = ۱, ..., m. \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

همان‌طور که گفته شد، در مدل فوق با کاهش ورودی، واحد تحت ارزیابی را در صورت ناکارا بودن، روی مرز قرار می‌دهد.

۱. در این‌جا DMU_o به مفهوم پاراتوکارا است اگروتنهااگر U^* و V^* در جواب بهینه یافت شود که

الف. $Z^* = ۱$،

ب. $(U^*, V^*) > ۰$.

۲. DMU_o کارای ضعیف است اگروتنهااگر $Z^* = ۱$ و یکی از مولفه‌های U^* و یا V^* در هر جواب بهینه صفر باشد.

۳. اگر $Z^* \neq ۱$، DMU_o ناکاراست.

تعریف ۱.۷.۱. DMU_k با بردارهای ورودی و خروجی (X_k, Y_k) را غالب[۲۰] بر DMU_h با بردارهای (X_h, Y_h) گویند هرگاه $\binom{-X_k}{Y_k} \geq \binom{-X_h}{Y_h}$ ، و نامساوی اکید، لااقل برای یک مولفه برقرار باشد. در این‌صورت گویند DMU_h مغلوب گردیده است.

تعریف ۲.۷.۱. DMU_o کارا است اگروتنهااگر توسط هیچ عضو مجموعه‌ی امکان تولید مغلوب نگردد.

تعاریف زیر از کارایی در T_c با هم معادل‌اند.

۱. DMU_o کارا است اگروتنهااگر توسط هیچ عضو مجموعه‌ی امکان تولید مغلوب نگردد.

[۱۹] Strongly Efficient

[۲۰] Dominate

۲. در ارزیابی DMU_o، با مدل CCR در ماهیت پوششی، DMU_o به مفهوم پاراتوکارا است اگروتنهااگر $\theta^* = ۱$ و در تمامی جواب‌های بهینه، متغیرهای کمکی صفر باشند.

۳. پس از حل مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی DMU_o به مفهوم پاراتو کارا است اگروتنهااگر (U^*, V^*) موجود باشد که $\sum_{r=۱}^{s} u_r\, y_{ro} = ۱$ و $(U^*, V^*) > ۰$. برای توضیح بیشتر به [۳.۵.۲،۲۹] رجوع کنید.

ب.افزایش خروجی‌ها

در این حالت پیدا کردن واحد مجازی است که با مصرف همین مقدار ورودی، خروجی بیشتری تولید کند. یعنی

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \varphi \\ s.t. & (X_o, \varphi Y_o) \in T_c. \end{array}$$

با لحاظ کردن ساختار T_c،

$$\begin{array}{lll} \text{Max} & \varphi & \\ s.t. & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j\, x_{ij} \leq x_{io}, & i = ۱, ..., m, \\ & \sum_{j=۱}^{n} y_{rj} \geq \varphi y_{ro}, & r = ۱, ..., s, \\ & \lambda_j \geq ۰, & j = ۱, ..., n. \end{array} \qquad (۷.۱)$$

مدل (۷.۱) به مدل CCR در ماهیت خروجی[۲۱] معروف است. مدل همواره شدنی است و مقدار بهین آن در شرط $\varphi^* \geq ۱$ صدق می‌کند.

اگر $\varphi^* = ۱$ آنگاه DMU_o کارای تکنیکی در ماهیت خروجی است. اگر $\varphi^* > ۱$ آنگاه DMU_o ناکارا در ماهیت خروجی است. مفهوم کارایی قوی در مدل با ماهیت خروجی، مشابه مدل با ماهیت ورودی است. با تعریف متغیرهای کمکی مدل به صورت زیر در می‌آید.

[۲۱] Output Oriented

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \varphi \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \mu_j \, x_{ij} + t_i^- = x_{io}, && i = 1, ..., m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \mu_j \, y_{rj} - t_r^+ = \varphi y_{ro}, && r = 1, ..., s, \\
& \mu_j \geq 0, && j = 1, ..., n, \\
& t_i^- \geq 0, && i = 1, ..., m, \\
& t_r^+ \geq 0, && r = 1, ..., s.
\end{aligned} \tag{۱.۸}$$

قضیه ۱.۷.۳. [۲۹، ۲.۶.۱۲] *اگر θ^* جواب بهین مدل (۱.۵) باشد، آنگاه $\varphi^* = \dfrac{1}{\theta^*}$ یک جواب بهین مدل (۱.۷) می‌باشد.*

دوگان مدل (۱.۷) تحت عنوان مدل مضربی CCR در ماهیت خروجی به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & Z = \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{io} \\
s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{ro} = 1, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{rj} \geq 0, && j = 1, ..., n, \\
& u_r \geq 0, && r = 1, ..., s, \\
& v_i \geq 0, && i = 1, ..., m.
\end{aligned} \tag{۱.۹}$$

رهیافتی که در بالا برای مدل (۱.۶) ارائه شد، مبتنی بر مجموعه‌ی امکان تولید و استفاده از دوگان فرم پوششی CCR بود. اکنون با استفاده از تعریف کارایی نسبی، مدل (۱.۶) بدست آورده می‌شود. اگر واحد تصمیم‌گیرنده دارای یک ورودی و یک خروجی باشد، آنگاه نسبت خروجی به ورودی نشان‌دهنده‌ی میزان کارایی آن واحد تصمیم‌گیرنده است. اگر واحد تصمیم‌گیرنده دارای بیش از یک ورودی یا بیش از یک خروجی باشد و قیمت خروجی‌ها و هزینه ورودی‌ها مشخص باشد در این‌صورت نسبت مجموع وزن‌دار شده‌ی خروجی‌ها به مجموع وزن‌دار شده‌ی ورودی‌ها، نشان‌دهنده‌ی میزان کارایی واحد تصمیم‌گیرنده است. برای محاسبه‌ی کارایی نسبی هر واحد باید کارایی آن واحد بر ماکسیمم کارایی واحدها تقسیم شود. مشکل زمانی پیش می‌آید که قیمت خروجی‌ها و هزینه‌ی ورودی‌ها مشخص نباشد. راهکاری که در این حالت DEA پیشنهاد می‌کند به این صورت است که با دیدگاهی خوش‌بینانه به وزن‌ها اجازه می‌دهد چنان انتخاب شوند که DMU_o به ماکسیمم کارایی خود برسد و این مقدار را به عنوان کارایی نسبی DMU_o در نظر می‌گیرد. فرض کنید بردار نامنفی $U \in \mathbb{R}^s$ نشان‌دهنده‌ی

قیمت خروجی‌ها و بردار نامنفی $V \in \mathbb{R}^m$ نشان‌دهنده‌ی هزینه‌ی ورودی‌ها باشد، آنگاه جواب بهینه‌ی مدل زیر نشان‌دهنده‌ی میزان کارایی نسبی DMU_o می‌باشد.

$$RE_o = \max_{(U,V)\geq 0} \frac{\frac{U^tY_o}{V^tX_o}}{\max\limits_{1\leq j\leq n} \frac{U^tY_j}{V^tX_j}}. \tag{۱۰.۱}$$

اگر $\frac{1}{t} = \max\limits_{1\leq j\leq n}\{\frac{U^tY_j}{V^tX_j}\}$ ، مدل (۱۰.۱) به‌صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned} RE_o = \text{Max} \quad & t.\frac{U^tY_o}{V^tX_o} \\ s.t. \quad & \frac{U^tY_j}{V^tX_j} \leq 1, j = 1, ..., n, \\ & U \geq 0, \\ & V \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

با استفاده از تغییر متغیر،

$$\begin{aligned} RE_o = \text{Max} \quad & \frac{U^tY_o}{V^tX_o} \\ s.t. \quad & \frac{U^tY_j}{V^tX_j} \leq 1, \quad j = 1, ..., n, \\ & U \geq 0, \\ & V \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۲.۱}$$

مدل (۱۲.۱) به مدل کسری CCR معروف است با استفاده از تبدیلات چارنز[۲۲] و کوپر[۲۳] [۶]، مدل (۱۲.۱) با فرض مثبت بودن مخرج‌ها و قرار دادن $V^tX_o = 1$ به صورت زیر تبدیل می‌شود که همان مدل (۶.۱) می‌باشد.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & U^tY_o \\ s.t. \quad & V^tX_o = 1, \\ & U^tY_j - V^tX_j \leq 0, \quad j = 1, ..., n, \\ & U \geq 0, \\ & V \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۳.۱}$$

[۲۲] Charnes

[۲۳] Cooper

قضیه ۴.۷.۱. [۲۹، ۲.۴.۱] *هر جواب بهینه‌ی مدل (۱۳.۱) یک جواب بهینه برای مدل (۱۰.۱) می‌باشد.*

قضیه ۵.۷.۱. [۲۹، ۲.۶.۹] *در مدل (۱۳.۱) در هر جواب بهین حداقل یکی از قیود نامساوی $U^tY_j - V^tX_j \leq 0$ فعال است (تساوی برقرار است).*

تا به‌حال در رابطه با کارایی مطلب بدین صورت پیگیری شد که واحد تصمیم‌گیرنده از کمترین ورودی، بیشترین خروجی را تولید نماید و بر طبق این اصل هدف ماکسیمم نمودن خارج‌قسمت خروجی‌های وزن‌دار شده بود. اگر کارایی به صورت زیر تعریف شود،

$$\text{کارایی} : \frac{\text{ورودی}}{\text{خروجی}}$$

آنگاه هرچه مقدار این کسر کوچکتر باشد کارایی بالا می‌باشد. فرض کنید کارایی نسبی DMU_o به‌صورت زیر تعریف شود.

$$RE_o = \min_{(U,V)\geq 0} \frac{\dfrac{V^tX_o}{U^tY_o}}{\min\limits_{1\leq j\leq n} \dfrac{V^tX_j}{U^tY_j}} \tag{۱۴.۱}$$

اکنون با استفاده از تعریف کارایی نسبی به صورت فوق، مدل (۶.۱) بدست می‌آید. اگر

$$\min_{1\leq j\leq n} \left\{ \frac{V^tX_j}{U^tY_j} \right\} = \frac{1}{t}$$

مدل (۱۴.۱) به این صورت در می‌آید.

$$\begin{aligned} RE_o = \text{Min} \quad & t.\frac{V^tX_o}{U^tY_o} \\ s.t. \quad & t.\frac{V^tX_j}{U^tY_j} \geq 1, \quad j = 1, ..., n, \\ & U \geq 0, \\ & V \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۵.۱}$$

با استفاده از تغییر متغیر رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} RE_o = \text{Min} \quad & \frac{V^tX_o}{U^tY_o} \\ s.t. \quad & \frac{VX_j}{UY_j} \geq 1, \quad j = 1, ..., n, \\ & U \geq 0, \\ & V \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۶.۱}$$

مدل (۱۶.۱) مدل کسری CCR در ماهیت خروجی است. با استفاده از تبدیلات چارنز و کوپر [۶] مدل فوق با فرض مثبت بودن مخرج‌ها و قرار دادن $U^tY_o = ۱$ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود که همان مدل (۹.۱) می‌باشد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & V^tX_o \\ s.t. \quad & U^tY_o = ۱, \\ & V^tX_j - U^tY_j \geq ۰, \quad j = ۱, ..., n, \\ & U \geq ۰, \\ & V \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۷.۱}$$

دوگان آن به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \varphi \\ s.t. \quad & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \, x_{ij} \leq x_{io}, && i = ۱, ..., m, \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \, y_{rj} \geq \varphi \, y_{ro}, && r = ۱, ..., s, \\ & \lambda_j \geq ۰, && j = ۱, ..., n. \end{aligned}$$

گاهی در ارزیابی، یکی از ورودی‌ها یا خروجی‌ها وزن صفر می‌گیرد و در ارزیابی دخیل نمی‌شود. برای رفع این مشکل قیدی روی تمام وزن‌ها تحمیل می‌شود تا از صفر شدن آن‌ها جلوگیری کند. برای بررسی این موضوع مدل زیر پیشنهاد می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & U^tY_o \\ s.t. \quad & V^tX_o = ۱, \\ & U^tY_j - V^tX_j \leq ۰, \quad j = ۱, ..., n, \\ & U \geq ۱.\varepsilon, \\ & V \geq ۱.\varepsilon. \end{aligned} \tag{۱۸.۱}$$

که در آن نماد ε نشان‌دهنده‌ی یک عدد مثبت به اندازه‌ی کافی کوچک است و اصطلاحا به آن عدد غیرارشمیدسی گفته می‌شود. از نقاط ضعف این مدل این است که مشخص نیست ε باید چقدر کوچک باشد.

اگر DMU_o مورد ارزیابی، کارای قوی باشد و ε به اندازه‌ی کافی کوچک نباشد ممکن است مدل (۱۸.۱) نتواند وزن‌های مثبتی که با آن وزن‌ها، DMU_o کارا می‌شود را پیدا کند. در این وضعیت جواب بهین مدل (۱۸.۱) کوچکتر از یک می‌شود. بهترین راهکار برای آن استفاده از فرم دوگان مدل (۱۸.۱) و به‌کار بردن فاز دوگانه برای حل مدل دوگان آن است. دوگان مدل (۱۸.۱) به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
\text{Min}\quad & \theta - \varepsilon\Big(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\Big) & & \\
s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_{ij} + s_i^- = \theta\, x_{io}, & i = 1, ..., m, & \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, & r = 1, ..., s, & \\
& \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, & j = 1, ..., n, i = 1, ..., m, r = 1, ..., s. &
\end{aligned} \tag{۱۹.۱}$$

حل مدل (۱۹.۱) معادل با این است که ابتدا مدل (۵.۱) حل شود، θ^* را بدست آورده و سپس مدل زیر حل شود.

$$\begin{aligned}
\text{Max}\quad & \Big(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\Big) & & \\
s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_{ij} + s_i^- = \theta^*\, x_{io}, & i = 1, ..., m, & \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, & r = 1, ..., s, & \\
& \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, & j = 1, ..., n, i = 1, ..., m, r = 1, ..., s. &
\end{aligned} \tag{۲۰.۱}$$

اگر در جواب بهین مدل (۵.۱)، $\theta^* = 1$ و مقدار بهین (۲۰.۱) برابر صفر باشد در این‌صورت DMU_o، کارای قوی خواهد بود.

تعریف ۶.۷.۱. مجموعه‌ی مرجع

برای هر DMU_o $(o \in \{1, ..., n\})$ مجموعه‌ی مرجع به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$E_o = \{j :$ در یک جواب بهین مدل (۲۰.۱)، $\lambda_j^* > 0$ باشد. $\}$.

در حقیقت مجموعه‌ی مرجع DMU_o عبارت‌است‌از DMU_jهایی که حداقل در یک جواب بهین مدل (۲۰.۱) در ارزیابی DMU_o، λ_j^* مقدار مثبت اختیار کند.

قضیه ۷.۷.۱. [۲۹، ۲.۷.۱۴] *برای هر* DMU_j $(j = 1, ..., n)$، $E_j \neq \emptyset$.

در ارزیابی DMU_o توسط فرآیند فاز دوگانه CCR، اگر DMU_o، CCR-کارای‌قوی نباشد در این‌صورت در انتهای فاز دوم یک DMU بهبودیافته به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$(\hat{X}_o, \hat{Y}_o) = (\theta^* X_o - S^{-*}, Y_o + S^{+*}) \quad (۲۱.۱)$$

قضیه ۸.۷.۱. [۲۹، ۲.۶.۱۱] *فعالیت بهبودیافته‌ی (۲۱.۱) به مفهوم پاراتوکارا می‌باشد (یعنی کارای‌قوی است) .*

با حل مدل (۵.۱) کارای‌تکنیکی یا ناکارای‌تکنیکی بودن DMU_o مشخص می‌شود و در فاز دوم یعنی با حل (۲۰.۱) معلوم می‌شود که DMU_o چه مقداری از ورودی‌ها را هدر داده و چه مقدار از خروجی‌ها را تولید نکرده است.

قضیه ۹.۷.۱. [۲۹، ۲.۳.۳] *هر عضو E_o (یعنی مجموعه‌ی مرجع DMU_o) به مفهوم پاراتوکارا می‌باشد.*

بنابراین با توجه به قضیه‌های ۷.۷.۱ و ۹.۷.۱ حداقل یکی از DMU_jهای مشاهده شده ($j \in \{۱, ..., n\}$)، به مفهوم پاراتوکارا می‌باشد.

قضیه ۱۰.۷.۱. [۲۹، ۲.۵.۱] *فرم پوششی مدل CCR نسبت به تغییرواحد پایدار[۲۴] می‌باشد. به‌عبارت دیگر اگر*

$$x_{ij} \longrightarrow \alpha_i\, x_{ij}, \quad \alpha_i > ۰, \quad i = ۱, ..., m, \quad j = ۱, ..., n,$$
$$y_{rj} \longrightarrow \beta_r\, y_{rj}, \quad \beta_r > ۰, \quad r = ۱, ..., s, \quad j = ۱, ..., n,$$

آنگاه تغییر در مقدار کارایی حاصل نمی‌شود.

[۲۴] Unit Invariant