دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

درباره ی مسئله ی ازدواج روی بازه ی یکه

نگارش:
محسن حیدری

استاد راهنما:
دکتر سعید مقصودی

دی ۱۳۹۱


بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به بررسی مسئله تراگرد روی یک خانواده از مجموعه‌ها خواهیم پرداخت. مسئله‌ی تراگرد یافتن یک مجموعه‌ی مجزا از عناصر از یک خانواده از زیرمجموعه‌ها است که هر کدام از این عناصر به یکی از اعضای این خانواده متعلق است.

سپس به بررسی مسئله‌ی تزویج روی بازه‌ی یکه تحت اندازه‌ی لبگ می‌پردازیم. مسئله‌ی تزویج عبارت است از یافتن تابعی یک به یک روی مجموعه‌ای که نمودار آن در یک مجموعه‌ی مشخص شده توسط شرطی با اندازه‌ی لبگ قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: مسئله‌ی تزویج روی بازه‌ی یکه، تراگرد، نقطه لبگ.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در فصل اول این پایان‌نامه به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی و در فصل دوم به مسئله‌ی وجود یک تراگرد روی خانواده‌ای از مجموعه‌ها می‌پردازیم. در ادامه این فصل به بررسی قضیه‌ی کلاسیک هال که شرط لازم و کافی را برای وجود چنین تراگرد ارائه می‌دهد می‌پردازیم.

در ادامه فصل به بررسی روش ساختارهای مقدماتی روی یک خانواده می‌پردازیم و اندیس تراگرد را معرفی می‌کنیم.

اگر $\mathfrak{A}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد و $\mathfrak{F}$ خانواده‌ی همه‌ی زیرمموعه‌های متناهی مجموعه‌ی اندیس $\mathfrak{A}$ بوده و برای هر $J \in \mathfrak{F}$، θ_J تابع انتخاب از زیرخانواده‌ی $\mathfrak{A}(J)$ باشد، تابع انتخابی چون θ از $\mathfrak{A}$ وجود دارد که برای هر $J \in \mathfrak{F}$، $K \in \mathfrak{F}$ ای موجود است که $J \subseteq K$ و $\theta|J = \theta_K|J$ (اصل انتخاب رادو).

پس از بیان این اصل سعی خواهیم کرد قضیه‌ی هال را برای خانواده‌های با اندیس دلخواه گسترش دهیم که به نتایج جالبی از جمله به قضیه‌ای از رادو - یونگ (قضیه‌ی ۲.۸.۲) می‌پردازیم و در پایان فصل دوم به کاربردهایی از اصل انتخای رادو اشاره خواهیم کرد.

در فصل سوم به بیان مسئله‌ی تزویج می‌پردازیم. گوییم نگاشت ϕ یک تزویج روی $K \subseteq I$ است، اگر ϕ روی K یک به یک بوده نمودار آن در S واقع شده باشد و برای هر $J \subseteq K$، $\lambda(J) = \lambda(\phi(J))$ (تعریف۵.۰.۳). گوییم نگاشت ϕ یک μ-تزویج روی $K \subseteq I$ به‌توی S است اگر ϕ روی K یک به یک بوده و برای تقریباً هر $x \in K$ داشته باشیم $(x, \phi(x)) \in S$ و برای هر $J \subseteq K$

$$\mu\lambda(J) \leq \lambda(\phi(J)) \leq \lambda(J)$$

به‌عنوان قضیه‌ای از فصل سوم فرض کنید $S \subseteq I \times I$ و هر نقطه از S نقطه‌ی لبگی از S باشد، و برای هر $J \subseteq I$، $\lambda(J) \leq \lambda(E(J))$. فرض کنید $\delta > ۰$ داده شده باشد. در این صورت تزویج ϕ روی $K \subseteq I$ به‌توی S موجود است به‌طوری‌که $\lambda(K) \geq ۱ - \delta$ (قضیه‌ی اصلی ۱).

•

فصل ۱

مقدمات

در این فصل تعاریف، مفاهیم و قضیه‌های مورد نیاز برای فصل‌های بعد را می‌آوریم.

اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، منظور از نماد $B \subset\subset A$ این است که A زیرمجموعه‌ای متناهی از B است. خانواده‌ی $\mathfrak{A} = (A_i : i \in I)$ از مجموعه‌ها را متناهی (نامتناهی) گویند، اگر مجموعه‌ی اندیس آن متناهی (نامتناهی) باشد.

اگر $\mathfrak{A} = (A_i : i \in I)$ و $\mathfrak{B} = (B_j : j \in J)$ دو خانواده از مجموعه‌ها باشند که مجموعه‌های اندیس آنها از هم مجزا هستند، در این‌صورت منظور از $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$، خانواده‌ی $(C_k : k \in I \cup J)$ است که $C_k = A_k$ یا $C_k = B_k$.

تعریف ۱.۰.۱. فرض کنید $A_1, \ldots, A_n$ زیرمجموعه‌هایی از E باشند و $\phi : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow E$ نگاشتی باشد که $\phi(i) \in A_i$ برای هر $i \in \{1, \ldots, n\}$. به این نگاشت یک تابع انتخاب از خانواده‌ی $(A_1, \ldots, A_n)$ گویند.

مثلاً هر n-تایی مرتب $(x_1, \ldots, x_n)$ یک تابع انتخاب از حاصل‌ضرب دکارتی $A_1 \times \ldots \times A_n$ است. اجتماع همه‌ی این توابع را با $\prod_{i=1}^{n} A_i$ نمایش می‌دهیم. اگر خانواده‌ی $\mathfrak{A} = (A_i : i \in I)$ دارای مجموعه‌ی اندیس دلخواه باشد، اجتماع همه‌ی توابع انتخاب را حاصل‌ضرب دکارتی خانواده‌ی $\mathfrak{A}$ می‌نامند و با نماد $\prod_{i\in I} A_i$ نمایش می‌دهند. بوضوح اگر یکی از اعضای این خانواده مجموعه‌ی تهی باشد، آن‌گاه $\prod_{i\in I} A_i = \emptyset$.

تعریف ۲.۰.۱. فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، زیرمجموعه‌ای چون $\leqslant$ از حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ را یک رابطه از A به B می‌نامند. اگر (a, b) عضوی در $\leqslant$ باشد، به‌جای $(a, b) \in \leqslant$ می‌نویسند $a \leqslant b$ و آن‌را به صورت a با b در رابطه‌ی $\leqslant$ است می‌خوانند.

چنانچه $A = B$ گوییم $\leqslant$ یک رابطه روی A است.

تعریف ۳.۰.۱. فرض کنید $\leqslant$ رابطه‌ای روی مجموعه‌ی X باشد. گوییم

الف) $\leqslant$ انعکاسی است اگر $x \leqslant x$ برای هر $x \in X$.

ب) $\leqslant$ متقارن است اگر $x \leqslant y \Rightarrow y \leqslant x$ برای هر $x, y \in X$.

پ) $\leqslant$ متعدی است اگر $x \leqslant y$ و $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ برای هر $x, y, z \in X$.

ت) $\leqslant$ یک رابطه‌ی هم ارزی است، اگر و فقط اگر $\leqslant$ انعکاسی، متقارن و متعدی باشد.

تعریف ۴.۰.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. منظور از یک افراز X مانند $\mathcal{P}$ عبارت است از یک خانواده از زیرمجموعه‌های ناتهی X به‌طوری‌که

الف) اگر $B \in \mathcal{P}$ و A و $A \neq B$، آن‌گاه $A \cap B = \emptyset$.

ب) $\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = X$.

تعریف ۵.۰.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. رابطه‌ی $\leqslant$ روی X یک رابطه‌ی ترتیب جزئی است اگر به‌ازای هر $a, b, c \in X$ داشته باشیم

۱) $a \leqslant a$.

۲) اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant a$، آن‌گاه $a = b$.

۳) اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$، آن‌گاه $a \leqslant c$.

یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب عبارت است از دوتایی $(X, \leqslant)$ است که در آن X یک مجموعه و $\leqslant$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی X است. اگر رابطه‌ی $\leqslant$ روی X یک رابطه‌ی ترتیب جزئی بوده و به‌ازای هر دو عضو a و b در X داشته باشیم $a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$، در این‌صورت $\leqslant$ را یک رابطه‌ی ترتیب کلی می‌نامیم.

تعریف ۶.۰.۱. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد.

الف) اگر $A \subseteq X$ عنصر $d \in X$ را کران بالای A نامند اگر برای هر $b \in A$، $b \leqslant d$.

ب) $d \in X$ را کوچکترین کران بالای A نامند اگر d کران بالای A بوده، و برای هر کران بالای A چون b داشته باشیم $d \leqslant b$.

ج) $d \in X$ را عضو ماکسیمال X می‌نامند، اگر به‌ازای هر عضو X مانند c اگر $d \leqslant c$ آن‌گاه $c = d$.

به‌طور مشابه می‌توان کران پایین، بزرگترین کران پایین و عضو مینیمال را تعریف کرد.

تعریف ۷.۰.۱. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. مجموعه‌ی $A \subseteq X$ را یک زنجیر نامند اگر به‌ازای هر دو عضو از A مانند b_1 و b_2 داشته باشیم $b_1 \leqslant b_2$ یا $b_2 \leqslant b_1$.

قضیه ۸.۰.۱. (لم زرن) فرض کنید$(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد و هر زنجیر از X دارای کران بالایی در X باشد، در این‌صورت X دارای عضو ماکسیمال است.

برهان . به صفحه‌ی ۱۷ از مرجع [۵] مراجعه کنید. □

تعریف ۹.۰.۱. گراف G دوتایی مرتب (N, E) است که N مجموعه‌ای ناتهی و E خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های دو عضوی N است. عناصر N را رأس و عناصر E را یال می‌نامیم. گراف G را متناهی (نامتناهی) گوئیم اگر N متناهی (نامتناهی) باشد. اگر $x, y \in N, x \neq y, e = \{x, y\} \in E$، گوئیم یال e رأس x و y را به هم وصل می‌کند و رأس‌های x و y را دو انتهای e نامیم. دو رأس x, y که توسط یالی به‌هم وصل شده باشند، مجاور نامیده می‌شوند. یالی با دو انتهای یکسان را طوقه و یالی با دو انتهای مجزا را پیوند می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۰.۱. اگر گراف G دارای طوقه نبوده و هیچ دو رأسی توسط بیش از یک یال به هم متصل نباشند، گراف G را ساده می‌گوئیم.

تعریف ۱۱.۰.۱. فرض کنید $G = (N, E)$ گرافی ساده باشد. اگر برای عدد طبیعی چون k، افرازی از N مثل $N = \cup_{i=1}^{k} N_i$ موجود باشد که هیچ دو راسی که به‌هم بوسیله‌ی یالی متصل‌اند، در N_iیی نباشند، به‌عبارت دیگر بتوان هر راس را بوسیله‌ی یکی از k رنگ طوری رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو راس متصل دارای رنگ مشابه نباشند، گوئیم گراف k- رنگ‌آمیزی راسی شده است. کوچکترین عدد صحیح k با این خاصیت را در صورت وجود، عدد رنگی گراف G می‌نامند.

۱.۱ مفهوم اندازه‌پذیری

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد.

الف) خانواده‌ی $\mathfrak{M}$ از زیرمجموعه‌های X را یک σ -جبر در X گوئیم اگر $\mathfrak{M}$ دارای خواص زیر باشد:

(۱) $X \in \mathfrak{M}$.

(۲) اگر $A \in \mathfrak{M}$ آن‌گاه $A^c \in \mathfrak{M}$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است.

(۳) اگر $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{M}$ آن‌گاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

تعریف ۲.۱.۱. اگر $\mathfrak{M}$ یک σ -جبر در X باشد آن‌گاه $(X, \mathfrak{M})$ را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X گوئیم.

گزاره ۳.۱.۱. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک σ-جبر در X باشد. با توجه به خواص (۱)، (۲) و (۳) در تعریف ۱.۱.۱ نکات زیر بی‌درنگ حاصل می‌شوند.

(۱) $\emptyset \in \mathfrak{M}$.

(۲) اگر $A_i \in \mathfrak{M}$ که $1 \leqslant i \leqslant n$ در این صورت $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{M}$.

(۳) $\mathfrak{M}$ تحت اشتراک شمارا (و نیز متناهی) بسته است.

برهان . به صفحه‌ی (۲۲) از [۹] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۴.۱.۱. هرگاه X یک فضای اندازه‌پذیر، Y یک فضای توپولوژیک و f نگاشتی از X به‌توی Y باشد، گوئیم f اندازه‌پذیر است، اگر به‌ازای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر در X باشد.

لم ۵.۱.۱. اگر X یک فضای اندازه‌پذیر باشد در این‌صورت $E \subseteq X$ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر χ_E اندازه‌پذیر باشد.

برهان . به (۹.۱) از [۹] مراجعه کنید. $\square$

قضیه ۶.۱.۱. اگر $\mathfrak{F}$ گردآیه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی X باشد، کوچکترین σ -جبر در X مانند $\mathfrak{M}^*$ موجود است به‌طوری‌که $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}^* = \bigcap_{\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}} \mathfrak{M}$ که در آن $\mathfrak{M}$ در اینجا σ-جبر روی X است. در این حالت $\mathfrak{M}^*$ را σ -جبر تولید شده توسط $\mathfrak{F}$ می‌نامند.

برهان . به قضیه‌ی (۱۰.۱) از [۹] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. بنابر قضیه‌ی قبل کوچکترین σ -جبر همچون $\mathfrak{B}$ در X موجود است به‌طوری‌که هر مجموعه‌ی باز در X متعلق به $\mathfrak{B}$ است، اعضای $\mathfrak{B}$ را مجموعه‌های بورل در X می‌نامیم. همچنین مجموعه‌های بسته، مجموعه‌های بورل هستند. اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته و اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بورل هستند.

تعریف ۸.۱.۱. یک اندازه‌ی مثبت، تابعی مانند μ است که بر یک σ-جبر مانند $\mathfrak{M}$ تعریف شده است و شمارا جمعی است، یعنی اگر $\{A_i\}$ گردایه‌ای شمارا و از هم جدا از اعضای $\mathfrak{M}$ باشد، آن‌گاه $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$ و به‌علاوه $\mu(\emptyset) = 0$.

اکنون به تعریف انتگرال در یک فضای اندازه مانند $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ می‌پردازیم.

اگر $\mathfrak{s} : X \longrightarrow [0, \infty)$ تابعی ساده و اندازه‌پذیر به شکل زیر باشد

$$\mathfrak{s} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

که در آن $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ مقادیر متمایز $\mathfrak{s}$ هستند، و برای $E \in \mathfrak{M}$ تعریف می‌کنیم

$$\int_E \mathfrak{s} \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

حال اگر $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ تابعی اندازه‌پذیر بوده و $E \in \mathfrak{M}$ در این‌صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \sup \int_E \mathfrak{s} \mathrm{d}\mu \tag{1.1}$$

که در آن سوپریمم روی تمام توابع اندازه‌پذیر ساده $\mathfrak{s}$ که $0 \leqslant \mathfrak{s} \leqslant f$ گرفته شده است. طرف چپ (۱.۱) را انتگرال لبگ f روی E نسبت به اندازه‌ی μ می‌نامند.

احکام زیر نتایج آنی از تعاریف هستند. توابع و مجموعه‌های ظاهر شده اندازه‌پذیر فرض می‌شوند.

(آ) هرگاه $0 \leqslant f \leqslant g$، آن‌گاه $\int_E f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \mathrm{d}\mu$.

(ب) هرگاه $A \subset B$ و $f \geqslant 0$، آن‌گاه $\int_A f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_B f \mathrm{d}\mu$.

(پ) هرگاه $f \geqslant 0$ و c ثابت دلخواه بوده و $0 \leqslant c \leqslant \infty$، آن‌گاه $\int_E cf \mathrm{d}\mu = c \int_E f \mathrm{d}\mu$.

گوییم خاصیتی تقریباً همه‌جا (به اختصار ت. ه.) برقرار است، اگر مجموعه‌ی نقاطی که آن خاصیت برای آن‌ها برقرار نیست یک مجموعه با اندازه‌ی صفر باشد. بنابراین اگر μ اندازه‌ای روی σ-جبر $\mathfrak{M}$ از مجموعه‌ی X بوده، به‌ویژه می‌گوئیم $f = g$ ت.ه. اگر f و g دامنه‌ی مساوی داشته باشند و $\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$.

مثلاً گوئیم دنباله‌ی (f_n) تقریباً همه‌جا به g میل می‌کند اگر یک مجموعه‌ی E با اندازه‌ی صفر وجود داشته باشد به‌طوری‌که که $(f_n(x))$ برای هر مقدار که به E تعلق ندارد به $g(x)$ میل کند.

۲.۱ اندازه‌ی لبگ

فضای k-بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^k$ عبارت است از مجموعه‌ی تمام عناصر به‌صورت $x = (x_1, \ldots, x_k)$ که x_iها اعداد حقیقی هستند و دارای ساختار جبری و توپولوژیکی به‌صورت زیر است.

اگر $x = (x_1, \ldots, x_k)$ و $y = (y_1, \ldots, y_k)$ و α عددی حقیقی باشد، $x + y$ و αx را به‌صورت زیر تعریف

می‌کنیم

$$x + y = (x_۱ + y_۱, \ldots, x_k + y_k), \quad \alpha x = (\alpha x_۱, \ldots, \alpha x_k) \tag{۲.۱}$$

واضح است که با این اعمال مجموعه‌ی $\mathbb{R}^k$ یک فضای برداری است.

لم ۱.۲.۱. روی فضای برداری $\mathbb{R}^k$ تعریف کنید $||x|| = (x.x)^{\frac{۱}{۲}}$ و $x.y = \sum x_i y_i$. با توجه به نامساوی شوارتز به‌ازای هر x, y, z در $\mathbb{R}^k$ داریم

$$||x - y|| \leqslant ||x - z|| + ||z - y||$$

که همان نامساوی مثلثی است.

برهان . به (۱۹.۲) از [۹] مراجعه کنید. $\square$

با توجه به لم قبل با تعریف $\rho(x, y) = ||x - y||$، فضای $\mathbb{R}^k$ به یک فضای متریک تبدیل می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. اگر $E \subseteq \mathbb{R}^k$ و $x \in \mathbb{R}^k$ در این صورت انتقال E بوسیله‌ی x عبارت است از مجموعه‌ی

$$E + x = \{y + x : y \in E\}.$$

هرمجموعه به‌صورت

$$\mathbb{W} = \{x = (x_۱, \ldots, x_n) : ۱ \leqslant i \leqslant k, \alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i\} \tag{۳.۱}$$

یا هر مجموعه‌ی حاصل از تعویض یک یا تمام علائم $<$ در (۳.۱) با $\leqslant$ را یک k- سلول می‌نامیم و حجم آن‌را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{W}) = \prod_{i=۱}^{k} (\beta_i - \alpha_i).$$

مجموعه‌ی $\mathbb{Q}(a, \delta) = \{x : ۱ \leqslant i \leqslant k, \alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i + \delta\}$ را δ -جعبه با گوشه‌ی a می‌نامند که در اینجا $a = (\alpha_۱, \ldots, \alpha_k)$.

قضیه ۳.۲.۱. یک اندازه‌ی کامل مثبت مانند λ وجود دارد که بر یک σ- جبر مانند $\mathfrak{M}$ در $\mathbb{R}^k$ تعریف شده است و دارای خواص زیر است

الف) به‌ازای هر k- سلول مانند $\mathbb{W}$ داریم $\lambda(\mathbb{W}) = \mathrm{Vol}(\mathbb{W})$.

ب) $\mathfrak{M}$ شامل تمام مجموعه‌های بورل در $\mathbb{R}^k$ است.

پ) λ انتقال- پایا است، یعنی به‌ازای هر $E \in \mathfrak{M}$ و هر $x \in \mathbb{R}^k$،

$$\lambda(E + x) = \lambda(E)$$

ت) اگر μ یک اندازه‌ی بورل پایای انتقال مثبت بر $\mathbb{R}^k$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر مجموعه‌ی فشرده‌ی K، $\mu(K) < \infty$ آن‌گاه یک ثابت مانند c هست به‌طوری‌که برای هر مجموعه‌ی بورل $E \subseteq \mathbb{R}^k$ ، $\mu(E) = c\lambda(E)$

ث) به هر تبدیل خطی T از $\mathbb{R}^k$ به‌توی $\mathbb{R}^k$ یک عدد حقیقی مانند $\Delta(T)$ نظیر است به‌طوری‌که بازای هر $E \subseteq \mathfrak{M}$ ، $\lambda(T(E)) = \Delta(T)\lambda(E)$.

اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ روی $\mathbb{R}^k$ و اندازه‌λ را اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^k$ می‌نامند.

برهان . به قضیه‌ی (۲۰.۲) از [۹] مراجعه کنید. $\square$

فضای توابع انتگرال‌پذیر لبگ روی $\mathbb{R}^k$ را با $L^1(\lambda)$ یا $L^1(\mathbb{R}^k)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۴.۲.۱. اگر f یک تابع حقیقی- مقدار کراندار روی $[a,b]$ باشد، آن‌گاه انتگرال ریمان f موجود است اگر و تنها اگر انتگرال لبگ f روی $[a,b]$ موجود باشد. در این صورت این دو مقدار یکی هستند.

برهان . به صفحه‌ی (۷۰) از [۹] مراجعه کنید. $\square$

فصل ۲

قضیه هال

در این فصل به مطالعه‌ی برخی مسائل ترکیبیاتی، قضیه‌ی کلاسیک پ. هال، روش ساختارهای مقدماتی و اندیس تراگرد پرداخته و در پایان به کاربردهایی از اصل گزینش رادو می‌پردازیم.

۱.۲ تراگردها

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید $\mathfrak{A} = (A_i : i \in I)$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی E باشد. فرض کنید بتوانیم عنصر x_i از هر A_i را طوری انتخاب کنیم که x_iها مجزا از هم باشند. در این صورت مجموعه‌ی $\{x_i : i \in I\}_{\neq}$ یک تراگرد از $\mathfrak{A}$ نامیده می‌شود.

مثال. فرض کنید $\mathfrak{A} = (A_۱, \ldots, , A_۴)$ خانواده‌ای به‌صورت زیر باشد

$$A_۱ = \{۲, ۳\}, \qquad A_۲ = \{۱, ۳, ۴\}, \qquad A_۳ = \{۳, ۴, ۵\}, \qquad A_۴ = \{۱, ۴\}$$

در این صورت مجموعه‌ی $\{۱, ۳, ۴, ۵\}$ یک تبدیل از خانواده‌ی $\mathfrak{A}$ است. همچنین $\{۲, ۳, ۴, ۵\}$ نیز تراگرد دیگری از این خانواده است.

تعریف قبل را می‌توان به صورت زیر هم بیان کرد.

زیرمجموعه‌ی T از E یک تراگرد از خانواده‌ی $\mathfrak{A} = (A_i : i \in I)$ از زیرمجموعه‌های E است اگر تابع یک به یک و پوشایی چون $\psi : T \longrightarrow I$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$x \in A_{\psi(x)} \qquad (x \in T).$$

بنابر مفهوم بالا عدد اصلی تراگرد یک خانواده برابر عدد اصلی مجموعه‌ی اندیس آن است. همچنین توجه کنید $\mathfrak{A}$ دارای یک تراگرد است اگر تابع $\theta : I \longrightarrow E$ که θ یک به یک است و برای هر $i \in I$، $\theta(i) \in A_i$ موجود باشد که در این حالت $\theta(I)$ تراگردی از $\mathfrak{A}$ است.

تعریف ۲.۱.۲. گوئیم زیرمجموعه‌ی X از مجموعه‌ی E، یک تراگرد جزئی از خانواده‌ی $\mathfrak{A} = (A_i : i \in I)$ است اگر X یک تراگرد از زیرخانواده‌ای از $\mathfrak{A}$ باشد.

این تعریف معادل است با اینکه تابع یک به یکی چون $\psi : X \longrightarrow I$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$، $x \in A_{\psi(x)}$. بوضوح یک تراگرد، تراگرد جزیی است. طبق قرارداد مجموعه‌ی $\varnothing$ یک تراگرد جزئی از خانواده‌ی $\mathfrak{A}$ است. بوضوح زیرمجموعه‌ی یک تراگرد، تراگرد جزئی است.

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید $\mathfrak{A}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های E و d عدد صحیح نامنفی باشد. گوئیم زیرمجموعه‌ی X از مجموعه‌ی E یک تراگرد جزیی با نقص d از خانواده‌ی $\mathfrak{A}$ است، اگر مجموعه‌ی $I_۰ \subseteq I$ وجود داشته باشد که $|I \setminus I_۰| = d$ و X یک تراگرد از زیرخانواده‌ی $\mathfrak{A}(I_۰)$ از $\mathfrak{A}$ باشد .

بوضوح یک تراگرد جزئی با کاستی صفر یک تراگرد است. اگر خانواده مورد بحث متناهی باشد، کاستی هر تراگرد جزئی X عدد منحصر بفرد $|I| - |X|$ است.

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنید $\mathfrak{A} = (A_۱, \dots, A_n)$ یک خانواده‌ی متناهی باشد گوئیم $\mathfrak{A}$ در شرط هال (به‌طور مختصر شرط $\mathcal{H}$) صدق می‌کند اگر برای هر k که $۱ \leqslant k \leqslant n$ اجتماع k-تا از مجموعه‌های A_i حداقل k عضو (مجزا) داشته باشد.

به عبارت دیگر $\mathfrak{A}$ در شرط هال صدق می‌کند اگر و فقط اگر به‌ازای هر $J = \{i_۱, \dots, i_k\} \subseteq \{۱. \dots, n\}$ داشته باشیم

$$|A_{i_۱} \cup \ldots \cup A_{i_k}| = |\cup_{i \in J} A_i| \geqslant k.$$

از این‌رو می‌بینیم $\mathfrak{A}$ در شرط هال صدق می‌کند، اگر

$$|\bigcup_{i \in J} A_i| \geqslant |J|, \qquad (J \subseteq \{۱, \dots, n\}). \tag{۱.۲}$$

به اختصار می‌نویسیم $\cup(A_i : i \in J) = A(J)$. با این نمادگذاری شرط هال می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود،

$$|A(J)| \geqslant |J| \qquad (J \subseteq \{۱, \dots, n\}).$$

واضح است تعریف قبل برای $J=\varnothing$ نیز صدق می‌کند، پس $۲^n-۱$ زیرمجموعه‌ی ناتهی از $\{۱,\dots,n\}$ وجود دارد بنابراین برای برقراری شرط هال برای خانواده‌ی $(A_۱,\dots,A_n)$ باید $۲^n-۱$ شرط بررسی شود.

به‌راحتی می‌توان دید این شرایط مستقل از هم هستند. به‌عبارت دیگر هیچ‌یک از آن‌ها از دیگری نتیجه نمی‌شود. زیرا فرض کنید $J_۰\subseteq\{۱,\dots,n\}$ و خانواده‌ی $(A_۱,\dots,A_n)$ را با برابری زیر تعریف کنید.

$$A_i=\begin{cases}\{۱,۲,\dots,|J_۰|-۱\} & (i\in J_۰)\\ \{۱,۲,\dots,n\} & (i\notin J_۰)\end{cases}$$

که شرط هال برای $J\neq J_۰$ برقرار است ولی برای $J=J_۰$ برقرار نیست.

در بخش‌های بعدی شرط هال را برای یک خانواده‌ی دلخواه بیان خواهیم کرد و خواهیم گفت خانواده‌ی

$$\mathfrak{A}=(A_i:i\in I)$$

در شرط هال صدق می‌کند اگر شرط هال برای هر زیرمجموعه متناهی $J\subset\subset I$ برقرار باشد.

۲.۲ اثبات قضیه‌های بنیادین برای خانواده‌های متناهی

ما کار خود را با اثبات قضایای اساسی و مهم و نتایج خاص آن در مورد تراگردها که در بخش‌های پیش‌رو و قضایای بعدی اساسی و محوری هستند، شروع می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۲. (قضیه‌ی پ. هال) خانواده‌ی متناهی $\mathfrak{A}=(A_i:۱\leqslant i\leqslant n)$ از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی E دارای یک تراگرد است اگر و تنها اگر در شرط هال صدق کند. به‌عبارت دیگر

$$|A(I)|\geqslant|I|\qquad(I\subseteq\{۱,\dots,n\}).$$

برهان . فرض کنید $\mathfrak{A}$ دارای یک تراگرد باشد به‌عبارت دیگر عناصر مجزای $x_۱,\dots,x_n$ موجودند به‌طوری‌که $x_۱\in A_۱,\dots,x_n\in A_n$. اگر $۱\leqslant k\leqslant n$ و $۱\leqslant i_۱<\dots<i_k\leqslant n$، آن‌گاه

$$\{x_{i_۱},\dots,x_{i_k}\}\subseteq A_{i_۱}\cup\dots\cup A_{i_k}$$

بنابراین

$$|A_{i_۱}\cup\dots\cup A_{i_k}|\geqslant k.$$

یعنی $\mathfrak{A}$ در شرط هال صدق می‌کند.

اکنون عکس قضیه را اثبات می‌کنیم. اثبات به روش استقرایی است. برای $n = ۱$ نتیجه واضح است (شرط هال وجود یک تراگرد را نتیجه می‌دهد). لذا فرض کنید $n > ۱$ و قضیه برای هر خانواده از حداکثر $n - ۱$ مجموعه برقرار است، حال فرض کنید $\mathfrak{A} = (A_۱, \ldots, A_n)$ یک خانواده از n مجموعه باشد که در شرط هال صدق کند، به‌عبارت دیگر برای $۱ \leqslant k \leqslant n, ۱ \leqslant i_۱ < \ldots < i_k \leqslant n$ داریم

$$|A_{i_۱} \cup \ldots \cup A_{i_k}| \geqslant k.$$

حالت (۱) فرض کنید $|A_{i_۱} \cup \ldots \cup A_{i_k}| \geqslant k + ۱$ که $۱ \leqslant k < n$ و $۱ < i_۱ < \ldots < i_k \leqslant n$ لذا طبق شرط هال داریم $|A_۱| \geqslant ۱$ بنابراین می‌توان عنصر $x_۱ \in A_۱$ را انتخاب کرد. حال بنویسید $B_i = A_i \setminus \{x_۱\}$که $۲ \leqslant i \leqslant n$. پس

$$\begin{aligned} |B_{i_۱} \cup \ldots \cup B_{i_k}| &= |(A_{i_۱} \cup \ldots \cup A_{i_k}) \setminus \{x_۱\}| \\ &\geqslant |A_{i_۱} \cup \ldots \cup A_{i_k}| - |\{x_۱\}| \\ &= |A_{i_۱} \cup \ldots \cup A_{i_k}| - ۱ \geqslant k. \end{aligned}$$

بنابراین خانواده‌ی $(B_۲, \ldots, B_n)$ در شرط هال صدق می‌کند پس طبق فرض استقرا دارای یک تراگرد است. لذا عناصر $x_۲, \ldots, x_n$ که $x_۲ \in B_n, \ldots, x_n \in B_n$ و $x_۱ \notin B_۲, \ldots, B_n$ و x_iها دو به دو مجزا هستند وجود دارند. پس

$$x_۱ \in A_۱, x_۲ \in B_۲ \subseteq A_۲, \ldots, x_n \in B_n \subseteq A_n.$$

بنابراین $\{x_۱, \ldots, x_n\}_{\neq}$ تبدیلی از $\mathfrak{A}$ است.

حالت (۲) فرض کنید برای kیی که $۱ \leqslant k < n$ و $۱ \leqslant i_۱ < \ldots < i_k \leqslant n$ داشته باشیم

$$|A_{i_۱} \cup \ldots \cup A_{i_k}| = k$$

برای راحتی فرض کنید $i_۱ = ۱, \ldots i_k = k$، بنابراین برای بعضی k که $۱ \leqslant k < n$، داریم

$$|A_{i_۱} \cup \ldots \cup A_{i_k}| = k. \tag{۲.۲}$$

چون $(A_۱, \ldots, A_n)$ در شرط هال صدق می‌کند، پس بنابر فرض استقرا، $(A_۱, \ldots, A_k)$ دارای یک تراگرد است که $x_۱ \in A_۱, \ldots, x_k \in A_k$ که $x_۱, \ldots, x_k$ها مجزا هستند. حال تعریف کنید

$$B_i = A_i \setminus \{A_۱ \cup, \ldots \cup A_k\}, \quad (k + ۱ \leqslant i \leqslant n).$$

فرض کنید $1 \leqslant r \leqslant n-k$ که $k+1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n$، بنابر (۲.۲) و از آنجایی‌که $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ و Bها مجموعه‌های مجزا هستند، داریم

$$\begin{aligned}|B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{i_r}| &= |B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{i_r}| + |A_1 \cup \ldots \cup A_k| - k \\ &= |B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{i_r} \cup A_1 \cup \ldots \cup A_k| - k \\ &= |A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_r} \cup A_1 \cup \ldots \cup A_k| - k.\end{aligned}$$

از آنجایی‌که $i_1, \ldots, i_r, 1, \ldots, k$ مجزا هستند بنابر شرط هال داریم

$$|B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{i_r}| \geqslant (r+k) - k = r.$$

پس خانواده‌ی $(B_{k+1}, \ldots, B_n)$ در شرط هال صدق می‌کند و بنا بر فرض استقرا دارای تراگردی مانند

$$x_{k+1} \in B_{k+1} \subseteq A_{k+1}, \ldots, x_n \in B_n \subseteq A_n$$

است، که $x_{k+1}, \ldots, x_n$ متمایز هستند. به‌علاوه هیچ‌یک از B_iها شامل عناصر $x_1, \ldots, x_k$ نیستند.

پس $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ متمایزند و $\{x_1, \ldots, x_n\}_{\neq}$ یک تراگرد است. □

اکنون دو لم زیر را ثابت می‌کنیم و به کمک آن‌ها اثبات دیگری برای قضیه‌ی هال (طرف عکس) ارائه می‌دهیم.

لم ۲.۲.۲. فرض کنید خانواده‌ی $(A_i : i \in I) + B$ در شرط هال صدق کند (مجموعه‌ی B خانواده‌ی تک‌اندیسی است). اگر $|B| \geqslant 2$، در این‌صورت عنصر $x \in B$ وجود دارد به‌طوری‌که $(A_i : i \in I) + (B \setminus \{x\})$ در شرط هال صدق می‌کند.

برهان . چون $|B| \geqslant 2$ پس دو عنصر $x_1, x_2 \in B$ وجود دارد. حال فرض کنید $x_1 \neq x_2$ و هیچ‌کدام از آن‌ها در شرط مطلوب صدق نکنند. در این صورت وجود دارد $I_1, I_2 \subseteq I$ به‌طوری‌که

$$|A(I_1) \cup (B \setminus \{x_1\})| \leqslant |I_1|, \qquad |A(I_2) \cup (B \setminus \{x_2\})| \leqslant |I_2|$$

اکنون تعریف کنید $S_1 = A(I_1) \cup (B \setminus \{x_1\})$ و $S_2 = A(I_2) \cup (B \setminus \{(x_2\})$ لذا داریم

$$\begin{aligned}|I_1| + |I_2| &\geqslant |S_1| + |S_2| = |S_1 \cup S_2| + |S_1 \cap S_2| \\ &\geqslant |A(I_1) \cup A(I_2) \cup B| + |A(I_1) \cap A(I_2)| \\ &\geqslant |A(I_1 \cup A_2) \cup B| + |A(I_1 \cap I_2)| \\ &\geqslant |I_1| + |I_2| + 1.\end{aligned}$$

که تناقض است بنابراین حداقل یکی از دو عنصر $x_۱$ یا $x_۲$ شرط مورد نظر را دارد. $\square$

لم ۳.۲.۲. اگر B یک مجموعه‌ی متناهی باشد و خانواده‌ی $(A_i : i \in I) + (B)$ در شرط هال صدق کند، در این صورت خانواده‌ی $(A_i : i \in I) + (\{x\})$ نیز برای عضوی چون $x \in B$ در شرط هال صدق می‌کند.

برهان . برای اثبات کافی است لم قبل را $|B| - ۱$ بار تکرار کنیم. $\square$

اکنون می‌توانیم به کمک دو لم قبل اثبات دیگری برای قضیه‌ی هال ارائه دهیم. فرض کنید خانواده $\mathfrak{A} = (A_۱, \ldots, A_n)$ در شرط هال صدق کند، تعریف کنید

$$A_i' := \begin{cases} A_i & A_i \text{ متناهی} \\ n\text{عضوی یک زیرمجموعه‌ی} & A_i \text{ نامتناهی} \end{cases}$$

در این‌صورت $(A_۱', \ldots, A_n')$ در شرط هال صدق می‌کند لذا لم قبل را مکرراً برای B که B یکی از A_i' است به‌کار می‌بریم که در پایان مشاهده می‌کنیم که خانواده‌ی تک‌عضوی‌های $(\{x_۱\}, \ldots, \{x_n\})$ در شرط هال صدق می‌کند به‌طوری‌که

$$x_i \in A_i' \qquad (۱ \leqslant i \leqslant n).$$

در نتیجه $\{x_۱, \ldots, x_n\}_{\neq}$ یک تراگرد برای $\mathfrak{A}$ است.

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید $\mathfrak{A} = (A_۱, \ldots, A_n)$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های E باشد، در این‌صورت مجموعه‌ی E یک تراگرد جزئی از $\mathfrak{A}$ است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ی $F \subseteq E$ حداقل $|F|$تا از A_iها را قطع کند. به‌عبارت دیگر

$$|\{i : ۱ \leqslant i \leqslant n, A_i \cap F \neq \varnothing\}| \geqslant |F| \qquad (F \subseteq E). \tag{۳.۲}$$

برهان . اگر (۳.۲) برقرار باشد (چون $E = F \subseteq E$)، آن‌گاه E متناهی است یعنی $|E| \leqslant n$ و می‌توانیم بنویسیم $E = \{x_۱, \ldots, x_m\}_{\neq}$ که $m \leqslant n$. حال تعریف کنید

$$B_j = \{i : ۱ \leqslant i \leqslant n, x_j \in A_i\} \quad (۱ \leqslant j \leqslant m)$$

بنابراین $\mathcal{B} = (B_۱, \ldots, B_m)$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های $\{۱, \ldots, n\}$ است. فرض کنید $۱ \leqslant k \leqslant m$ و $۱ \leqslant j_۱ < \ldots < j_k \leqslant m$، در این‌صورت

$$B_{j_۱} \cup \ldots \cup B_{j_k} = \{i : ۱ \leqslant i \leqslant n, \{x_{j_۱}, \ldots, x_{j_k}\} \cap A_i \neq \varnothing\}$$

و بنابر (۳.۲)، $|B_{j_۱} \cup \ldots \cup B_{j_k}| \geqslant k$. خانواده‌ی $\mathcal{B}$ در شرط هال صدق می‌کند از این‌رو بنابر قضیه‌ی هال دارای تراگرد است. در واقع $i_۱ \in B_۱, \ldots, i_m \in B_m$ که $\{i_۱, \ldots, i_m\}_{\neq} \subseteq \{۱, \ldots, n\}$، لذا

$$x_۱ \in A_{i_۱}, \ldots, x_m \in A_{i_m}$$