بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

عنوان:

# گروه‌های متناهی با تعداد کمی زیرگروه غیر دوری

پژوهشگر:

الهام پاکزاد

استاد راهنما:

دکتر محمد زرین

استاد مشاور:

دکتر محمد نادر قصیری

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر

مهر ماه ۱۳۹۱

## ***تعهد نامه***

اینجانب الهام پاکزاد دانشجوی کارشناسی ارشد  رشته ریاضی محض گرایش جبردانشگاه کردستان، دانشکده علوم پایه گروه ریاضی تعهد می نمایم که محتوای این پایان نامه نتیجه تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی برداری نشده و به پایان رسانیدن آن نتیجه تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی و مشاوره اساتید بوده است.

با تقدیم احترام

الهام پاکزاد

۱۳۹۱/۷/۲۶

**دانشگاه کردستان**

**دانشکده علوم پایه**

**گروه ریاضی**


**پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش جبر**

**عنوان:**

# گروه‌های متناهی با تعداد کمی زیرگروه غیر دوری

**پژوهشگر:**

**الهام پاکزاد**

در تاریخ ۱۳۹۱/۷/۲۶ توسط کمیته تخصصی وهیات داوران زیر مورد بررسی قرار گرفت و با نمره ........ و درجه .............. به تصویب رسید.

| هیات داوران | نام و نام خانوادگی | مرتبه علمی | امضاء |
| --- | --- | --- | --- |
| ۱ـ استاد راهنما | دکتر محمّد زرین | استادیار | |
| ۲ـ استاد مشاور | دکتر محمّد نادر قصیری | دانشیار | |
| ۳ـ استاد داور خارجی | دکتر اشرف دانشخواه | دانشیار | |
| ۴ـ استاد داور داخلی | دکتر منصور دانا | استادیار | |

مهر و امضاء گروه

مهر و امضاء معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده

تقدیم به سه وجود مقدس:

پدر عزیزم و مادر مهربانم

آن دو فرشته ای که از خواسته هایشان گذشتند، سختی ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند

تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده ام برسم.

و استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد زرین.

# تقدیر و سپاس

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

بی شک تحقق این امر و به انجام رساندن این رساله جز با بهره گیری از راهنمایی و همکاری اساتید گرامی، کمک های دلسوزانه ی دوستان و خانواده ی عزیزم امکانپذیر نبود. لذا وظیفه ی خود می دانم که تشکر خود را از تمامی این عزیزان ابراز نمایم.

از زحمات بی دریغ و مساعدت های دلسوزانه ی استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد زرین کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از کمک ها و زحمات استاد مشاور عزیزم جناب آقای دکتر محمد نادر قصیری که علاوه بر این رساله افتخار شاگردی ایشان را در دوران تحصیل داشته ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از همه ی اساتید گروه ریاضی دانشگاه کردستان که در محضر ایشان کسب علم نموده ام صمیمانه سپاسگزاری می نمایم.

در پایان از خانواده ی عزیزم به پاس اینکه همواره در تمامی لحظات زندگی ام حامی و پشتیبان بنده بودند سپاسگزارم..

# چکیده

در این پایان نامه، تعداد کلاسهای مزدوجی از زیرگروه‌های غیردوری برای گروه $H$ را با $\delta(H)$ نشان می‌دهیم. گروه‌هایی که همه‌ی زیرگروه‌های حل‌پذیر آن مانند $H$، در شرط $\delta(H) \leqslant 2$ صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌شوند. همچنین نشان داده می‌شود که طول حل‌پذیری و طول فیتینگ گروه حل‌پذیر $H$، بوسیله توابعی از $\delta(G)$ کران دار می‌باشند.

**واژگان کلیدی:** طول حل‌پذیری، طول فیتینگ، کلاس مزدوجی، گروه حل‌پذیر،گروه غیردوری.

# فهرست مطالب

# پیشگفتار

در این پایان نامه همه‌ی گروه‌ها متناهی هستند. فرض کنید $G$ یک گروه و $F$ کلاس زیرگروهی-بسته غیر تهی از گروه‌ها باشد. تعداد کلاسهای مزدوجی از غیر $F-$زیرگروه‌های $G$ را با $\delta_F(G)$ نشان می‌دهیم. گروه $G$ بطوریکه $\delta_F(G) = ۱$ یعنی، غیر $F-$گروهی که همه‌ی زیرگروه‌های محض آن $F-$گروه هستند، بطور وسیع برای کلاسهای گوناگون $F$ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. گروه‌های غیر آبلی مینیمال ، گروه‌های غیر پوچتوان مینیمال ، گروه‌های غیر ابرحل‌پذیر مینیمال و گروه‌های غیر $p-$پوچتوان مینیمال مثال‌هایی در این زمینه هستند.

در این پایان نامه به این مورد که $F$ کلاسی از گروه‌هایی دوری باشد رسیدگی می‌کنیم، و در این مورد خاص $\delta(G)$ را به جای $\delta_F(G)$ به کار میبریم. گروه‌هایی مانند $H$ که در شرط $\delta(H) = ۱$ صدق می‌کنند سه نوع هستند و ساختار ساده‌ای دارند (لم ۱.۲). گروه‌هایی مانند $H$ بطوریکه $\delta(H) \leqslant ۴$، حل پذیر هستند (لم ۳.۲ را ببینید). اگر برای هر زیرگروه حل‌پذیر دلخواه مانند $H$ از گروه $G$ داشته باشیم $\delta(H) \leqslant ۲$، آنگاه گروه $G$ را $\delta-$گروه گوییم. در فصل سه این پایان نامه به دسته بندی $\delta-$گروه‌ها می‌پردازیم.

با درنظر گرفتن این مورد که $F$ یک تشکل زیرگروهی-بسته از گروه‌های حل‌پذیر حاوی گروه‌های آبلی است،

فرض کنید $G$ یک گروه حل‌پذیر باشد و $G^F$ را $F-$باقی‌مانده از $G$ ، یعنی، اشتراک همه زیرگروه‌های نرمال $N$ از $G$ بطوریکه $\frac{G}{N} \in F$، در نظر بگیرید. برای $i > ۱$ تعریف می‌کنیم $G^{F^i} = (G^{F^{(i-۱)}})^F$. بنابراین برای هر $i$ داریم $G^{F^i} \trianglelefteq G^{F^{i-۱}}$. پس $G$ دارای زنجیری از زیرگروه‌های نرمال

$$G = G^{F^۰} \geqslant G^{F^۱} \geqslant ... \geqslant G^{F^{(r-۱)}} \geqslant G^{F^r} = ۱$$

است. ما $r$ را $F-$طول از $G$ می‌نامیم. هنگامی که $F$ کلاسی از گروه‌های آبلی است، $F-$طول از $G$ همان طول حل‌پذیری $d(G)$ است.

رابطه کلی بین $\delta(G)$ با $d(G)$ و $h(G)$ برای گروه حل‌پذیر $G$ وجود دارد. دو کران بدست آمده برای $d(G)$ و $h(G)$ بر اساس $\delta(G)$ در فصل چهار این پایان نامه بررسی شده است.

$\pi(G)$ مجموعه‌ای از همه‌ی مقسوم علیه‌های اوّل $|G|$، $\mathbb{Z}_p$ گروه دوری از مرتبه‌ی $p$، $\mathbb{Z}_p^۲ = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ و $A \rtimes B$ نشان دهنده‌ی توسیع شکافنده [۱] از زیرگروه نرمال $A$ بوسیله‌ی زیرگروه $B$ است. یعنی، اگر $A$ و $B$ زیرگروه‌هایی از $G$ باشند بطوریکه $G = AB$، $A \cap B = \{۱\}$ و $A$ در $G$ نرمال باشد، آنگاه می‌گوییم $G = A \rtimes B$.

[۱] split extension

# فصل ۱

# قراردادها، تعاریف وقضایای اوّلیه

در این فصل تعاریف و مفاهیم و قضایایی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده می‌باشد بیان می‌کنیم.

**قضیه ۱.۱.** (**قضیه کشی**) *اگر $G$ گروهی از مرتبه $n$ باشد و $p$ عددی اوّل بطوریکه $p \mid n$ آنگاه $G$ شامل عضوی از مرتبه $p$ است.*

**قضیه ۲.۱.** (***قضیه لاگرانژ***) *فرض کنید $G$ یک گروه و $H \leqslant G$. اگر $G$ متناهی باشد، آنگاه $|H| \mid |G|$.*

**تعریف ۳.۱.** گروه $G$ را یک **گروه دوری** می‌نامیم هرگاه $G$ توسط یکی از اعضای خود تولید شود یعنی عضو $x \in G$ وجود داشته باشد بطوری‌که G=<x> .

**نکته ۴.۱.** یک گروه از مرتبه $p^2$، اگر دوری باشد با $\mathbb{Z}_{p^2}$ یکریخت است و اگر غیر دوری باشد با $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p = (\mathbb{Z}_p)^2$ یکریخت است.

**تعریف ۵.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. اگر $\{G_i\}_1^\infty$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های $G$ باشند، بطوریکه

$$G_1 \leqslant G_2 \leqslant G_3 \leqslant \dots$$

آن وقت این خانواده را یک زنجیر صعودی از زیرگروه‌های $G$ می‌نامیم یا اینکه یک **دنباله‌ی افزایشی** از زیرگروه‌های $G$ خواهد بود. در حالتی که

$$G_{۱} \geqslant G_{۲} \geqslant G_{۳} \geqslant ...$$

آن را یک **دنباله‌ی کاهشی** از زیرگروه‌های $G$ می‌نامیم. توجه کنید که لازم نیست $G_{i-۱}$ در $G_i$ نرمال باشد یا برعکس.

**تعریف ۶.۱.** الف) می‌گوییم $G$ در **شرط ماکسیمال بر زیرگروه‌ها** صدق می‌کند هرگاه هر دنباله افزایشی از زیرگروه‌های $G$ ایستا باشد، یعنی وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ بطوریکه برای هر $k \geqslant n$، داشته باشیم $G_k = G_n$.

ب) می‌گوییم $G$ در **شرط مینیمال بر زیرگروه‌ها** صدق می‌کند، هرگاه هر دنباله کاهشی از زیرگروه‌های $G$ ایستا باشد.

اگر $G$ گروهی متناهی باشد، آنگاه از آنجا که تعدادزیرگروه‌های $G$ عددی متناهی است، حتما هر دنباله‌ی افزایشی یا کاهشی از زیرگروه‌ها ایستا خواهد بود. یعنی هر گروه متناهی در شرط ماکسیمال و مینیمال صدق می کند.

**تعریف ۷.۱.** مجموعه تمام جایگشت‌های مجموعه‌ی غیر تهی $\Omega$ که با قانون ترکیب توابع تشکیل گروه می‌دهد، **گروه متقارن** مجموعه $\Omega$ نامیده و آن را با $S_\Omega$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که $\Omega = \{x_{۱}, ...x_n\}$

مجموعه‌ای متناهی و دارای $n$ عضو باشد، آنگاه گروه متقارن $\Omega$ را با $S_n$ نمایش داده و آن را گروه متقارن از **درجه** $n$ می‌خوانیم.

**تعریف ۸.۱.** مجموعه‌ی تمام جایگشت‌های زوج در $S_n$ تشکیل یک گروه می‌دهد، که ما آن را **گروه متناوب** از درجه $n$ می‌نامیم و با $A_n$ نمایش می‌دهیم. داریم: $|S_n : A_n| = ۲$ و درنتیجه $A_n \trianglelefteq S_n$ و $|A_n| = \frac{n!}{۲} (n \geqslant ۲)$.

**تعریف ۹.۱.** گروه غیر آبلی که همه زیرگروه‌های محض آن آبلی باشند را **گروه غیر آبلی مینیمال** گوییم.

**تعریف ۱۰.۱.** گروه $G$ را در نظر می‌گیریم. زیرگروه حقیقی $M$ از $G$ را یک **زیرگروه ماکسیمال** $G$ گوییم، اگر زیرگروهی مانند $L$ وجود نداشته باشد بطوریکه $M < L < G$.

**تعریف ۱۱.۱.** اگر $G \neq ۱$ آنگاه (چون $G$ متناهی است) مسلماً $G$ شامل حداقل یک زیرگروه ماکسیمال است (درواقع هر زیرگروه حقیقی $G$ در یک زیرگروه ماکسیمال $G$ قرار دارد.) اشتراک تمام زیرگروه‌های ماکسیمال $G$ را **زیرگروه فراتینی** $G$ گویند و آنرا با نماد $\Phi(G)$ نشان می‌دهند.

**قضیه ۱۲.۱.** *زیرگروه فراتینی از یک گروه، پوچتوان است.*

**برهان.** رجوع شود به قضیه ۵.۱۱ از [۱۰].

**تعریف ۱۳.۱.** فرض کنید $H \leqslant G$ ، دنباله متناهی $(H_i)_{۰ \leqslant i \leqslant n}$ از زیرگروه‌های $G$ به فرم

$$H = H_۰ \trianglelefteq H_۱ \trianglelefteq H_۲ \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_n = G$$

را در صورت وجود، یک **سری** به طول $n$ از $H$ به $G$ می‌نامیم. گروه خارج قسمتی $\frac{H_i}{H_{i-۱}}$ که

$i = ۱, ۲, ..., n$، را یک **فاکتور** از سری می‌گوییم.

**تعریف ۱.۱۴.** یک سری را در $G$ **سری نرمال** گویند، هرگاه هر جمله آن در $G$ نرمال باشد.

**تعریف ۱.۱۵.** فاکتور $\frac{H}{K}$ از یک سری **فاکتور مرکزی** نامیده می‌شود اگر $K \trianglelefteq G$ و $\frac{H}{K} \leqslant Z(\frac{G}{K})$.

**تعریف ۱.۱۶.** سری را که هر فاکتور آن مرکزی باشد **سری مرکزی** گوییم.

**تعریف ۱.۱۷.** **جابه‌جاگر** زوج $g_۱$ و $g_۲$ از اعضای $G$، عبارت است از عضو

$$[g_۱, g_۲] = g_۱^{-۱} g_۲^{-۱} g_۱ g_۲ \in G$$

به‌موجب این تعریف بلافاصله لم زیر را خواهیم داشت:

**لم ۱.۱۸.** *فرض می‌کنیم که* $g_۱, g_۲ \in G$*، در این صورت داریم:*

*الف)* $[g_۲, g_۱] = [g_۱, g_۲]^{-۱}$.

ب) $[g_۱, g_۲] = ۱$ *اگر و تنها اگر* $g_۱$ *و* $g_۲$ *جابه‌جایی پذیر باشند.*

*اثبات.* الف) $g_۱, g_۲ \in G$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$[g_۱, g_۲]^{-۱} = (g_۱^{-۱} g_۲^{-۱} g_۱ g_۲)^{-۱} = g_۲^{-۱} g_۱^{-۱} g_۲ g_۱ = [g_۲, g_۱]$$

ب) ابتدا فرض می‌کنیم $[g_۱, g_۲] = ۱$، درنتیجه $g_۱^{-۱} g_۲^{-۱} g_۱ g_۲ = ۱$ لذا $g_۲ g_۱ = g_۱ g_۲$. یعنی $g_۱$ و $g_۲$ جابه‌جایی پذیر هستند.

اکنون اگر $g_۱$ و $g_۲$ جابه‌جایی پذیر باشند، آنگاه $[g_۱, g_۲] = g_۱^{-۱} g_۲^{-۱} g_۱ g_۲ = g_۱^{-۱} g_۲^{-۱} g_۲ g_۱ = ۱$ □

**تعریف ۱۹.۱.** فرض می‌کنیم $H, K \leqslant G$، در این صورت **زیرگروه جابه‌جاگر** متناظر با $H, K$ عبارت است

از $[H, K] =< [h, k]; h \in H, k \in K >$.

تأکید می‌کنیم که $[H, K]$ زیرگروهی است، که بوسیله تمام جابه‌جاگرهای $[h, k]$ تولید شده است بطوریکه $h \in H, k \in K$. اتفاقاً ممکن است که حاصل ضرب دو جابه‌جاگر را نتوان به صورت یک جابه‌جاگر نشان داد. زیرگروه خاص $[G, G]$ را که بوسیله تمام جابه‌جاگرهای $G$ تولید می‌شود معمولا با $G'$ نمایش می‌دهند، و **گروه مشتق** $G$ می‌نامند .

**تعریف ۲۰.۱.** گوییم گروه $G$ دارای یک **سری مرکزی پایینی** به طول $r$ است، هر گاه

$$G = \Gamma_{۱}(G) \geqslant \Gamma_{۲}(G) \geqslant \Gamma_{۳}(G) \geqslant ... \geqslant \Gamma_{r}(G) \geqslant \Gamma_{r+۱}(G) = \{۱\}$$

که $\Gamma_{k+۱}(G) = [\Gamma_k(G), G](k = ۱, ۲, ..., r)$.

ب) گوییم گروه $G$ دارای یک **سری مرکزی بالایی** به طول $s$ است، هر گاه:

$$۱ = Z_{۰}(G) \leqslant Z_{۱}(G) \leqslant Z_{۲}(G) \leqslant ... \leqslant Z_s(G) = G$$

که در آن $Z(\frac{G}{Z_{j-۱}(G)}) = \frac{Z_j(G)}{Z_{j-۱}(G)}$ $(j = ۱, ۲, ..., s)$.

باید توجه کرد که دو سری فوق برای هر گروه $G$ وجود دارند، ولی اگر تساوی $G = G^{(۱)}(= \Gamma_{۲})$ و $Z_{۱}(G) = \{۱\}$ به ترتیب برقرار باشند آنگاه، ممکن است این سری‌ها در جمله اوّل مستهلک شوند. ما بیشتر به حالت عکس آن علاقه‌مندیم که در آن این سری‌ها بیشترین مقدار طول خود را پیدا می‌کنند و از خود گروه $G$ شروع و تا گروه واحد $\{۱\}$ کشیده می‌شوند.

**تعریف ۲۱.۱.** سری نرمال $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$، را **سری نرمال دوری** گوییم اگر هر فاکتور $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ برای $1 \leqslant i \leqslant n$ دوری باشد.

**تعریف ۲۲.۱.** الف) گروه $G$ **پوچتوان** است، اگر سری داشته باشد که همه فاکتورهایش مرکزی باشند.

ب) گروه $G$ **حل‌پذیر** است، اگر سری داشته باشد که همه فاکتورهایش آبلی باشند.

با توجه به تعریف چون هر فاکتور مرکزی یک فاکتور آبلی است پس هر گروه پوچتوان، حل‌پذیر است. ولی ممکن است گروهی حل‌پذیر باشد اما پوچتوان نباشد. مثلاً گروه $S_3$ حل‌پذیر است اما پوچتوان نیست.

**تعریف ۲۳.۱.** گروه $G$ را **ابرحل‌پذیر** گوییم اگر دارای سری نرمال دوری باشد، یعنی $G$ دارای یک سری نرمال باشد که فاکتورهای آن دوری هستند. این گروه‌ها البته حل‌پذیر هستند.

**مثال ۲۴.۱.** $A_4$ حل‌پذیر است. چون $N = \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ زیرگروهی نرمال از $A_4$ بوده و $\frac{A_4}{N}$ آبلی است و درنتیجه $A_4' \leqslant N$ و چون $N$ آبلی است پس $A_4'' \leqslant N' = \{1\}$ که از آن حاصل می‌شود $A_4'' = \{1\}$.

**مثال ۲۵.۱.** هر گروه ابرحل‌پذیر حل‌پذیر است ولی عکس آن درست نیست مثلاً $A_4$ حل‌پذیر است ولی ابرحل‌پذیر نیست زیرا زیرگروه نرمال دوری، به جز زیرگروه بدیهی ندارد.

**قضیه ۲۶.۱.** *اگر هر زیرگروه ماکسیمال از گروه متناهی $G$ ابر حل‌پذیر باشد، آن‌گاه $G$ حل‌پذیر است.*

**اثبات.** رجوع شود به قضیه ۱۰.۳.۴ در [۹].

**تعریف ۲۷.۱.** سری $G = G^{(0)} \geqslant G^{(1)} \geqslant G^{(2)} \geqslant \ldots$ را یک **سری مشتق** از $G$ می‌نامیم، که در آن

$G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] = (G^{(n-1)})'$ برای هر $n > 0$. مثلاً $G^{(1)} = [G, G] = G'$ و $G^{(2)} = [G', G'] = G''$.

با توجه به این تعریف، می‌توان نشان داد که:

**لم ۱.۲۸.** *گروه $G$ حل‌پذیر است اگر و تنها اگر $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد، بطوریکه $G^{(n)} = 1$.*

**برهان** رجوع شود به ۱۱.۱.۱۱ در [۱۱].

**تعریف ۱.۲۹.** فرض کنید $G$ گروهی حل‌پذیر است. در این صورت کوچکترین عدد صحیح و نامنفی $n$ که برای آن داشته باشیم $G^{(n)} = 1$، را **رده‌ی حل‌پذیری** $G$ گوییم. در این حالت $G$ را گروهی حل‌پذیر از رده‌ی $n$ می‌نامیم. گروه بدیهی $\{1\}$ از رده‌ی صفر و هر گروه آبلی از رده یک است. هر گروه از رده‌ی دو را **متا آبلی** گوییم.

**تعریف ۱.۳۰.** طول کوتاهترین سری مرکزی گروه پوچتوان $G$ را **رده‌ی پوچتوانی** $G$ می‌گوییم.

**قضیه ۱.۳۱.** *الف) عبارات زیر معادلند:*

(۱) $G$ *پوچتوان است.*

(۲) $\Gamma_n(G) = 1$ *برای یک* $n$ *در* $\mathbb{Z}$.

(۳) $Z_n(G) = G$ *برای یک* $n$ *در* $\mathbb{Z}$.

*ب) فرض می‌کنیم که $G$ پوچتوان باشد. در این صورت برای هر سری مرکزی از $G$ مانند* $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_r = G$ *که* $i = 0, 1, \ldots, r$ *داریم:* $\Gamma_{r-i+1}(G) \leqslant G_i \leqslant Z_i(G)$.

**برهان.** رجوع شود به قضیه‌ی ۷.۵۴ از [۱۰].

**تبصره ۳۲.۱.** کوچکترین عدد صحیح $c$ بطوریکه $\Gamma_{c+1}(G) = 1$، برابر است با کوچکترین عدد صحیح $c$ بطوریکه $Z_c(G) = G$: در حقیقت عدد صحیح $c$ همان **رده‌ی پوچتوانی** گروه $G$ است.

**قضیه ۳۳.۱.** *الف) اگر $G$ پوچتوان باشد، همه زیرگروه‌ها و همه گروه‌های خارج‌قسمتی $G$ نیز پوچتوان‌اند.*

*ب) اگر $G$ حل‌پذیر باشد، همه زیرگروه‌ها و همه گروه‌های خارج قسمتی $G$ نیز حل‌پذیرند.*

**برهان.** رجوع شود به قضیه‌ی ۷.۴۶ از [۱۰].

**قضیه ۳۴.۱.** *حاصل‌ضرب دو گروه حل‌پذیر، حل‌پذیر است.*

**برهان.** رجوع شود به قضیه‌ی ۷.۴۸ از [۱۰].

**قضیه ۳۵.۱.** *اگر $G$ یک گروه پوچتوان باشد بطوریکه $G \neq \{1\}$، آنگاه مرکز $G$ غیربدیهی است.*

*اثبات.* فرض کنید $G$ پوچتوان از رده‌ی $c$ باشد. پس $\Gamma_{c+1}(G) = \{1\}$ و $\Gamma_c(G) \neq \{1\}$، ثابت می‌کنیم $\Gamma_c(G) \leqslant Z(G)$. اگر $u \in \Gamma_c(G)$ آنگاه برای هر $g \in G$ داریم:

$$[u, g] \in [\Gamma_c(G), G] = \Gamma_{c+1}(G) = \{1\}$$

بنابراین $[u, g] = 1$ و $ug = gu$. پس $u \in Z(G)$. چون $u \in \Gamma_c(G)$ دلخواه بود، $\{1\} \neq \Gamma_c(G) \leqslant Z(G)$ لذا $Z(G) \neq \{1\}$. □

**قضیه ۳۶.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $K \trianglelefteq G$ . اگر $K$ و $\frac{G}{K}$ حل‌پذیر باشند، آنگاه $G$ حل‌پذیر است.*

**برهان.** رجوع شود به قضیه ۷.۴۷ از [۱۰].

**تعریف ۳۷.۱. گروه کواترنیون**: گروه تولید شده توسط عناصر $a$ و $b$ که فقط در روابط زیر صدق می‌کند:

$$a^{۴} = ۱, a^{۲} = b^{۲}, b^{-۱}ab = a^{-۱}$$

گروه کواترنیون مرتبه ۸ نامیده و با $Q_{۸}$ نمایش داده می‌شود. در واقع:

$$Q_{۸} =< a, b|a^{۴} = ۱, b^{۲} = a^{۲}, b^{-۱}ab = a^{-۱} >= \{۱, a, a^{۲}, a^{۳}, b, ab, a^{۲}b, a^{۳}b\}.$$

و نیز $Q_{۸} = \{\pm ۱, \pm i, \pm j, \pm k\}$ که آن را گروه یکه‌های کواترنیونی می‌نامند.

**تعریف ۳۸.۱. گروه متقارن یا دو وجهی**: گروه $G$ با مولدهای $a, b$ با روابط $a^n = b^{۲} = ۱$ و $a^b = b^{-۱}ab = a^{-۱}$ گروه دوجهی از مرتبه $۲n$ نامیده و با $D_{۲n}$ نمایش داده می شود.

**لم ۳۹.۱.** *گروه دو وجهی* $D_{۲n} =< a, b : a^n = b^{۲} = ۱, a^b = a^{-۱} >$ *را درنظر می‌گیریم. اگر* $n$ *زوج باشد،* $Z(D_{۲n}) = \{۱, a^{\frac{n}{۲}}\}$ *و اگر* $n$ *فرد باشد،* $Z(D_{۲n}) = \{۱\}$.

*اثبات.* ابتدا نشان می‌دهیم برای $i \leqslant n$ داریم $a^i b = ba^{-i}$. داریم

$$a^b = a^{-۱} \Rightarrow b^{-۱}ab = a^{-۱} \Rightarrow ab = ba^{-۱},$$

و همچنین،

$$(a^b)^i = (a^{-۱})^i \Rightarrow (b^{-۱}ab)^i = a^{-i} \Rightarrow b^{-۱}a^i b = a^{-i} \Rightarrow a^i b = ba^{-i}.$$

حال اگر فرض کنیم $a^i b = ba^i$ آنگاه با توجّه به رابطه‌ی قبل داریم $ba^{-i} = ba^i$. درنتیجه $a^{۲i} = ۱$ پس باید $n \mid ۲i$ یعنی برای $q \in \mathbb{Z}$ داریم $۲i = nq$. حال چون $i = n\frac{q}{۲}$ و $i \leqslant n$، بنابراین $q = ۱$ یا $q = ۲$. اگر