بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه مازندران

دانشکدهٔ علوم پایه

موضوع:

مطالعه وجود و رفتار مجانبی جواب برای یک رده از معادلات بیضوی روی فضای IR^n

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

استاد راهنما:

دکتر قاسم علیزاده افروزی

استاد مشاور:

دکتر منوچهر زند

نگارش:

حمزه قاسمزاده باریکی

دی ۱۳۷۹

(۳)

بسمه تعالی

ارزشیابی پایان نامه کارشناسی ارشد

نام و نام خانوادگی دانشجو حمزه قاسم زاده   شماره دانشجوئی ۷۷۵۲۴۷۸۰۲

رشته تحصیلی: ریاضی محض   سال تحصیلی : ۸۰-۷۹

موضوع پایان نامه : مطالعه وجود رفتارمجانبی جواب برای یک رده از معادلات بیضوی روی تمام فضای IRN

تاریخ دفاع : یکشنبه ۷۹/۱۰/۱۱

نمره پایان نامه به عدد ۱۸٫۷۵ نمره پایان نامه به حروف هجده و هفتاد و پنج صدم

امتیاز :

کمیته داوران :

استاد راهنما : آقای دکتر قاسم علیزاده افروزی

استاد مشاور : آقای دکتر منوچهر زند

استاد مدعو : آقای دکتر اسداله نیکنام

استاد مدعو : آقای دکتر حسن حسین‌زاده

دکترقاسم علیزاده افروزی
رئیس دانشکده علوم پایه

دانشکده علوم پایه: بابلسر ـ کیلومتر ۳ جاده نیروی هوائی ـ ص . پ ۴۵۳ ـ ک . پ ۴۷۴۱۵
تلفن ۷ ـ ۴۲۰۲۵ ـ فاکس ۴۲۰۲۹ ـ ۴۲۱۶۱
سازمان مرکزی: بابلسر ـ خیابان پاسداران ـ تلفن ۵ ـ ۳۲۰۹۱

تقدیر و تشکر

سپاس بیکران وحمدی بی قیاس خداوند متعال را که به اینجانب توان وفرصت ولذت یادگیری عطا فرمود. برخود وظیفه می دانم که از تمامی کسانی که درطول دوره تحصیلی و درانجام این پایان نامه مرا یاری کرده اندتشکر وقدردانی کنم .

تقدیر و تشکر

ازجناب آقای دکتر قاسم علیزاده افروزی استاد راهنما ، که علاوه برتحمل زحمات و راهنمائیهای علمی ، صبر ، ایثار ، انسان دوستی و سایر خصوصیات معنویشان که سرمشقی برای اینجانب شد ، تشکر وقدردانی می‌کنم.

تقدیم به

شهیدان وپویندگان راه حقیقت به آنهایی کـه جـان را بـرای بـه ارمغـان آوردن آزادی وبرقراری عدالت ایثار کردند.

تقدیم به

استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقـای دکـتر قاسـم علـیزاده افـروزی و اسـتاد مشاور جنـاب آقـای دکـترمنوچـهر زنـد وبـه تمـامی اسـتادانی کـه بـه نحـوی ازمحضرشان کسب فیض نمودم.

خلاصه :

در این پایان‌نامه ما وجود جواب را برای معادله بیضوی نیم‌خطی $-\Delta u(x) = \lambda g(x) f(u(x))$ برای هر x در $\mathbb{R}^n$ که در ژنتیک جمعیتی ظاهر می شود و در آن $n \geq 1$ و شرط کوچک بودن g یا g_+ در بی‌نهایت برقرار است ثابت می کنیم. تابع ناشناخته u نشان دهنده کثرت نسبی الل جمعیتی A_1 که در رقابت با الل جمعیتی A_2 می باشد و ما علاقه‌مندیم که جواب u در شرط $0 \leq u \leq 1$ صدق کند. اثبات وجود جواب براساس ساختن جوابهای بالایی و پایینی مناسب می باشد .این نشان داده شده است که نظریه وجود جواب برای $n = 1$ یا 2 کاملاً متفاوت با حالت $n \geq 3$ می باشد.

ل

فهرست مطالب

پیشگفتار

هر معادله مشتمل بر یك متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یك یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل می نامند. بسیاری از قوانـین عمومـی طبیعـت (در فـیزیك ، شـیمی، زیست شناسی و نجوم) طبیعی ترین بیان خود را در زبان معادلات دیفرانسـیل مـی یـابند. کاربردهای معادلات دیفرانسیل همچنـین در خـود ریاضیـات ، خصوصـاً در هندسـه و در مهندسی ، اقتصاد و بسیاری از زمینه های دیگر علوم کار بسته فراوان اند. دلیل این کارایی گسترده معادلات دیفرانسیل به آسانی قابل درك است.

یادآوری می کنیم که چنانچه y=f(x) تابعی مفـروض باشـد، آنـگاه مشـتق آن $\frac{dy}{dx}$ را می‌توان به عنوان میزان تغییر y نسبت به x در نظر گرفت. در هر روند طبیعـی ، متغیرهـای مربوطه و میزان تغییرات آنها به وسیله اصول علمی اساسی حاکم بر آن روند بـه یکدیـگر مربوط می شوند. هنگامی که این ارتباط با علایم ریاضی بیان شود، نتیجه اغلب یك معادله دبفرانسیل است.

یك معادله دیفرانسـیل بـا مشـتقات جزیـی (partial differential equation)یـا (PED) یك معادله شامل تابع u از چندین متغیر و مشتقات جزئی آنها می‌باشـد . بـرای مثال فرض کنید $u = f(x, y, z, t)$ باشد آنگاه

$$a^{2}\left(\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2} u}{\partial z^{2}}\right)=\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (۱)$$

$$a^{2}\left(\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2} u}{\partial z^{2}}\right)=\frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}} \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2} u}{\partial z^{2}}=0 \qquad (۳)$$

نمونه‌هایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشند که به ترتیب معادلات حرارت ، موج ، لاپلاس نامیده می‌شوند . عموماً یك معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای یك تابع n متغیره $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ به صورت زیرمی‌باشد

$$F(x_1, .., x_n, u_{x1}, \ldots, u_{xn}, u, u_{x1x1}, u_{x1x1}, u_{x1x2}, \ldots) = 0 \qquad (۴)$$

هر کدام از معادلات (۱) و (۲) و (۳) در فیزیك نظری اهمیت زیادی دارند و مطالعه آنها موجب ظهور بسیاری از نظریه‌های مهم ریاضی شده است .

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی عموما در فیزیك محیط‌های پیوسته پیش می‌آید مانند مسائل مشتمل بر میدانهای الکتریکی ، دینامیك سیالات ، پخش و حرکت موجی.

نظریه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی خیلی متفاوت و از هر لحاظ بسیار مشکل‌تر می‌باشد .

معادله (۴) خطی نامیده می‌شود اگر به u و مشتقات آن به صورت خطی بستگی داشته باشد .

اگردر معادله (۴) همه مشتقات u به طور خطی ظاهر شوند با ضرایبی که تنها به x بستگی دارند آنگاه معادله را نیم خطی می‌گویند .

فصل اول

یادآوری

مقدمه:

در این فصل سعی می کنیم مفاهیمی همچون دامنه، محمل ، عملـــگر نمیتســکی ، پیوستگی هولدر و مطالب مربوط به آنها بپردازیم. اتحادهای گرین را بیان کرده و از آن برای بیان مفهومی بنام تابع گرین استفاده می کنیم.

در ادامه به بیان فضاهایی همچون فضاهای بانــاخ، هیلــبرت ، L^P، ســوبولف و قضایای مربوط به این فضاها می پردازیم. همچنین صــورت بعضــی از قضایــا همچــون قضیه دیورژانس که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می گیرنــد را خواهیــم آورد. در پایان به تعریف عملگرهای خطی از جمله عملگر خطــی فشــرده و عملــگر همــانی پرداخته و از آنها برای بیان مفهوم نشاندن کمك می گیریم و سپس به بیان یك سری از نامساویها در این زمینه می پردازیم.

قابل ذکر است که تمام مطالب فصــل اول از منــابع [18] ، [19] ، [20] ، [21] گردآوری شده است.

۱-۱- مفاهیم مقدماتی:

۱-۱-۱- تعریف

یك دامنه Ω ($\Omega \subset IR^n$) یك زیر مجموعه باز همبند است. نقاط x و y در Ω با یك منحنی در Ω می‌توانند به هم وصل شوند و برای هر $x \in \Omega$ یك r به اندازه کافی کوچك وجود دارد به طوری که $B_r(x) \subset \Omega$

فرض کنید بستار Ω را با $\overline{\Omega}$ نشان می‌دهیم.

۱-۱-۲- تعریف

مرز Ω را با $\partial\Omega$ نشان می‌دهیم و عبارتست از مجموعه نقاط حدی Ω که در Ω وجود ندارند یعنی داریم $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. اگر $\Omega = IR^n$ آنگاه $\partial\Omega = \Phi$.

۱-۱-۳- تعریف

توابع پیوسته روی Ω را با $C(\Omega)$ نشان می‌دهیم و آنهایی که مشتق اول آنها نیز پیوسته باشد را با $C^1(\Omega)$ نشان می‌دهیم. مشابها برای $K \in N$, $C^k(\Omega)$ نشان دهنده توابعی هستند که همه مشتقات تا مرتبه k ام روی Ω پیوسته‌اند .

فرض می‌کنیم $C^1(\overline{\Omega})$ نشان دهنده توابع $f \in C^1(\Omega)$ می باشد که برای آن f ومشتقات مرتبه اول f به طور پیوسته به $\overline{\Omega}$ توسیع می‌یابند. $C^k(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})$ به طور مشابه قابل تعریف می‌باشند.

گاهی اوقات علاقمند به توابع پیوسته‌ای هستیم که در Ω کراندارند اما به طور پیوسته به $\overline{\Omega}$ توسیع نمی‌یابند اینگونه توابع را با $C_B(\Omega)$ نشان می‌دهیم و مشابهاً $C_B^K(\Omega)$ نیز قابل تعریف می‌باشند .

برای مشتق‌گیری از نمادهایی نظیر $\partial_x u$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, u_x استفاده می‌شود که همگی نشاندهنده مشتق نسبت به x می‌باشند .

$C(\Omega,IR^N)$ نشاندهنده همه توابع N- بردار مقداری پیوسته روی دامنه Ω می‌باشند

۱-۱-۴- تعریف

محمل (support) یك تابع پیوسته f روی IR^n به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sup f = \overline{\{x \in IR^n ; f(x) \neq 0\}}$$

یك مجموعه در IR^n کراندار است اگر آن مجموعه در یك گوی باز $B_R(0)$ با R های به اندازه کافی بزرگ قرار داشته باشد. مجموعه‌های بسته و کراندار همان طور که می‌دانیم در IR^n فشرده می‌باشند. بنابراین می‌گوییم f دارای محمل فشرده می‌باشد اگر محمل f کراندار باشد. توابع با محمل فشرده را با $C_0(IR^n)$ نشان می دهیم .

یعنی برای هر x در IR^n به طوری که $x \notin k = \mathrm{supp} f$ آنگاه $f(x)=0$.

مشابها $C_0(\Omega)$ نشان دهنده توابع پیوسته روی Ω می‌باشد که محمل آنها یك زیر مجموعه فشرده از Ω می‌باشد. همچنین $C_0^k(\Omega)$ نیز به طریق مشابه قابل تعریف می‌باشد.

۱-۱-۵- تعریف:

یك تابع f تعریف شده روی قلمرو Ω انتگرال پذیر است هر گاه $\int_\Omega |f(x)|dx$ تعریف شود و متناهی باشد. چنین توابع را با $L^1(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

گاهی اوقات نیز مفید است تا فضای بزرگتر $L^1{}_{loc}(\Omega)$ را بشناسیم که عبارتند از توابعی که موضعا انتگرال پذیر روی هر زیر مجموعه فشرده از Ω هستند اما روی خود Ω ممکن است انتگرال پذیر نباشند.

چون توابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده مقدار max و min را می‌گیرند بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $C(\Omega) \subset L^1{}_{loc}(\Omega)$.

به طور کلی توابع در $L^1{}_0(\Omega)$ یا $L^1{}_{loc}(\Omega)$ ممکن است روی نقاط تکین دارای ناپیوستگی باشند اما چنان نیست که در همگرایی انتگرال موثر باشند .

۱-۱-۶- تعریف:

فرض کنید $\Omega \subset IR^n$ یك دامنه باشد تابع زیر را در نظر می‌گیرم

$f : \Omega \times IR^m \to IR$

$(x,u) \to f(x,u)$

می‌گوییم f در شرط کارا تئودری صدق می‌کند اگر

(۱) $u \to f(x,u)$ برای تقریبا همه x های در Ω پیوسته باشد.

(۲) $x \to f(x,u)$ برای هر u اندازه پذیرباشد .

۱-۱-۷- تعریف:

فرض کنید f در شرط کاراتئودری صدق کند تابع دیگری با استفاده از ترکیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F(u)(x) = f(x, u(x))$$

که در آن $u : \Omega \to IR^m$ می باشد.

عملگر ترکیبی تعریف شده عملگر نمیتسکی نامیده می‌شود .

۱-۱-۸- تعریف :

تابع حقیقی f تعریف شده در (a,b) را محدب خوانند هر گاه وقتی $0 < \lambda < 1$, $a < y < b$, $a < x < b$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

۱-۱-۹- تعریف:

فرض کنید k مجموعه ای محدب و y یك فضای برداری باشد.

$T:k \to y$ نگاشت آفین نامیده میشود هرگاه

$$T((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)Tx + \lambda Ty$$

$$\forall x, y \in k \quad ,0 < \lambda < 1$$

۱-۱-۱۰- تعریف:

فرض کنید V یك فضای خطی روی IR باشد. یك نرم روی V یك نگاشت $P:V \to IR$ می باشد و می نویسیم $P(X)=\|X\|$. که در شرایط زیر صدق می کند.

الف) $\|x\|\geq 0$ برای هر $x\in V$ و $\|x\|=0$ اگر و فقط اگر $x=0$.

ب) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ برای هر $x\in V$ و $\alpha\in IR$

ج) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ برای هر $x,y\in V$

فضای خطی V با نرم بالا ، فضای خطی نرم دار نامیده می شود.

فضای خطی نرم دار یك فضای متریك تحت متر تعریف شده در زیر می باشد.

$$\rho(x,y)=\|x-y\| \qquad x,y\in V$$

اگر V تحت نرم بالا یك فضای کامل باشد، یعنی هر دنباله کوشی در V دارای حدی در خود V باشدآنگاه V یك فضای باناخ می باشد.

۱-۱-۱۱- تعریف:

یك ضرب داخلی روی فضای خطی V یك تابع $q:V\times V\rightarrow IR$ با تعریف $q(x,y)=(x,y)$ می باشد که در شرایط زیر صدق می کند.

الف) $(x,y)=(y,x)$ برای هر $x,y\in V$.

ب) $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)=\lambda_1(x_1,y)+\lambda_2(x_2,y)$ $\lambda_1,\lambda_2\in IR$ $x_1,x_2,y\in V$.

ج) $(x,x)>0$ برای هر $x\neq 0$ در V.

یك فضای خطی با یك ضرب داخلی ، فضای ضرب داخلی نامیده می شود.

برای هر $x\in V$ می نویسیم $\|x\|^2=(x,x)$.

اگر فاصله بین y,xدر V رابا $\|x-y\|$ تعریف کنیم همه اصول موضوعه برای یك فضای متریك صادق است و بنابراین V یك فضای متریك خواهد بود.