﴿ بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ ﴾

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

مسائل بایهارمونیک و بایهارمونیک معکوس

لیلا علیزاده

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

تابستان ۱۳۷۸

استاد راهنما

پروفسور عبداله شیدفر

تقدیم به پدر و مادرم،

و

آنهائیکه با بهره‌گیری از دانش نوین

در راه نجات انسانهای عصر حاضر کوشیده‌اند.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا حل برخی از انواع مسائل بایهارمونیک بر اساس روش تحلیلی r^2-فرم آلمانسی، فرمولهای گرین، برگمن-شیفر و جواب مسائل هارمونیک در نواحی مختلف بررسی شد؛ سپس با بیان مدلهای فیزیکی خاص، مدلسازی ریاضی مسائل بایهارمونیک معکوس انجام گرفت.

در این نوع مسائل علاوه بر مجهول اصلی (میزان خیز ورق)، عموماً پارامترهایی نظیر بار اعمال شده به ورق، شعاع آن و یا ثابت فنرهای کار گذاشته شده بر کران ورق به عنوان مجهولات اضافی با ارائه شرایط کرانه‌ای اضافی محاسبه شدند. در نهایت روش عددی تفاضلات متناهی برای حل تقریبی مساله بایهارمونیک انتخاب گردید. به این منظور مساله بایهارمونیک از دو روش مستقیم و غیر مستقیم (r^2- فرم آلمانسی) حل و روشهای مذکور از نظر دقت محاسباتی و خطای موضعی با هم مقایسه شدند و برتری حل عددی روش غیر مستقیم به اثبات رسید.

سپاسنامه

جرکت شتابدار بشر برای درک بهتر قوانین و رازهای حاکم بر جهان آفرینش سالهاست که آغاز گردیده است. آدمی اکنون نیک می‌داند که راه رهایی فرار از تاریکی نیست بلکه ورود به آن و فروپاشی آن است و چراغ اوفکر واندیشه اوست. علم ریاضی دریچه‌ای برای ورود به دنیای امروز و نگریستن به آن است. این علم به عنوان یکی از مبانی تمدن بشر، نیز یکی از آلات تربیت فکر، امروزه در جوامع بشری از ابزارهای اساسی توسعه به شمار می‌آید. اکنون که این پایان‌نامه به مراحل پایانی خود رسیده است، بر خود لازم می دانم که صمیمانه‌ترین سپاسها را به استاد ارجمندم جناب آقای دکتر عبداله شیدفر تقدیم نمایم. از ایشان به خاطر قبول زحمت سمت استاد راهنما و همچنین نظارت مستمر ایشان بر این پروژه تشکر می‌نمایم. از جناب آقای دکتر خسرو مالک‌نژاد در سمت استاد مشاور، به خاطر مساعدتهایشان در طول مدت این دوره سپاسگذاری می‌کنم. از حضور اساتید گرانقدر سرکار خانم دکتر بتول جذبی، ریاست محترم دانشکده، جناب آقای دکتر ابوالقاسم امامی‌زاده، از دانشگاه صنعت نفت در جلسهٔ دفاعیه و قبول زحمت داوری تقدیر و تشکر می‌نمایم. از جناب آقای دکتر محمدرضا مختارزاده، آقای علیمردان شاهرضایی و اساتید محترم دانشکده مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران، دکتر هاشمی‌نژاد ، دکتر احمدیان، و مهندس تیموری جهت همفکری صمیمانه‌شان تشکر می‌کنم و سلامتی و سعادت این عزیزان را آرزو دارم. و در آخر از دقت و حوصلهٔ سرکار خانم فرزانهٔ حیدری‌فعال به خاطر قبول زحمت تایپ این پروژه کمال تشکر را دارم.

لیلا علیزاده

تابستان ۱۳۷۸

فهرست مطالب

پیشگفتار

در مدلسازی پدیده‌های مختلف در علوم خصوصاً در علم مکانیک جامدات و در مسائل مربوط به خیز صفحات[1] تحت بارگذاری متفاوت و یا بدون بار با شرایط کرانه‌ای مفروض، با مسائلی موسوم به مسائل بایهارمونیک مواجه هستیم.

مسائل بایهارمونیک[2] از نوع مسائل مقدار کرانه‌ای بیضوی مرتبهٔ چهار می‌باشند؛ بسته به این که صفحه در شرایط بارگذاری و یا بدون بار در نظر گرفته شود، معادله دیفرانسیل مربوط به ترتیب حالت ناهمگن یا همگن خواهد داشت.

در این بحث به این نکته توجه می‌شود که بارگذاری از نوع استاتیک و برای ورقهای با رفتار خاص الاستیک[3]، همگن[4] و ایزوترپ[5] (مشخصات فیزیکی آنها در نقاط و جهات مختلف یکسان می‌باشد)، انجام می‌گیرد.

در اینجا ورق بعنوان سازه‌ای که در آن یک بعد (ضخامت) نسبت به دو بعد دیگر بسیار کوچک است و در ابتدا مسطح می‌باشد، تعریف می‌گردد. با توجه به اینکه هندسه ورقهای مورد استفاده در صنایع بیشتر بصورت گرد و مستطیل شکل است، این هندسه خاص ورق در رساله جایگاه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده است.

ورقها را می‌توان به سه گروه: ورقهای نازک با خیز کم، ورقهای نازک با خیز زیاد، و ورقهای ضخیم

---

[1] Plate bending
[2] Biharmonic problems
[3] Elastic
[4] Homogeneous
[5] Isotropic

تقسیم کرد.

معمولاً به ورقهائی نازک گفته می‌شود که نسبت ضخامت به ضلع کوچکتر آن کمتر از $\frac{۱}{۲۰}$ باشد؛ در این پایان نامه، ورق نازک با خیز کم مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

تا کنون روشهای تحلیلی و عددی مختلفی برای حل مسائل بایهارمونیک در روی نواحی مختلف به کار گرفته شده‌اند؛ از جمله، حل معادله به کمک سری سینوسی دوگانه [۶] [۱]، روش تفکیک متغیرها [۲]، متد آلمانسی[۷] [۳] و روشهای عددی تفاضلات متناهی [۲]، جوابهای بنیادی آلمانسی[۸] [۴]، معادلات انتگرالی [۵] و عناصر متناهی [۶]. به نظر می‌رسد Almansi ریاضی‌دان ایتالیائی اولین کسی باشد که به طور جدی دربارهٔ مسائل بایهارمونیک به تحقیق پرداخته است.در سال ۱۸۹۷ Almansi تئوری معروف خود را مبنی بر نمایش تابع بایهارمونیک بر حسب دو تابع هارمونیک با ضریب $r^۲$ ارائه داد [۳]. بعد از او در سالهای ۱۹۵۳ و ۱۹۸۰به ترتیب، Schiffer و Bergman [۷] و Shidfar و Jaswon [۸] و Adibi و Jaswon روی صورتهای دیگر این نمایش و تعمیم آن کار کردند.

Fairweather و Karageorghis در سال ۱۹۸۷، روش جوابهای بنیادی (MFS) و در سال ۱۹۸۸، روش جوابهای بنیادی آلمانسی (AMFS) را در فضای دو بعدی ارائه کردند [۴]. Bogomolny در سال ۱۹۷۵، روش MFS را برای حل چندین مساله مقدار کرانه‌ای بیضوی فرمولبندی کرد [۹].

از جمله مسائل دیگری که با آنها مواجه هستیم و در صنعت کاربرد زیادی دارند، مسائل معکوس[۹] می‌باشند. این مسائل با دارا بودن بیش از یک مجهول، با ارائه شرایط اضافی قابل حل می‌باشند.

فصل اول رساله اختصاص به حل دو مساله بایهارمونیک مستقیم با شرایط کرانه‌ای مختلف بر اساس نظریه آلمانسی دارد. در فصل دوم مسائل بایهارمونیک در روی ناحیه چهار گوش منظم حل می‌شوند. فصل سوم اختصاص به حل مساله مستقیم در ناحیهٔ مستدیر دارد. در فصل چهارم دربارهٔ مساله بایهارمونیک ناهمگن کار می‌شود.فصل پنجم به حل مسائل بایهارمونیک معکوس در نواحی مختلف اختصاص داده می‌شود. در فصل ششم چند مساله معکوس کاربردی مطرح و حل می‌شوند. فصل هفتم به حل عددی مساله بایهارمونیک به روش تفاضلات متناهی اختصاص دارد.

[۶] این روش برای حل صفحات مستطیل شکل با تکیه‌گاههای ساده به کار می‌رود.
[۷] Almansi method
[۸] Almansi fundamental solution
[۹] Inverse problem

فصل ۱

تحلیل مسائل بایهارمونیک دوبعدی

در این فصل در نظر داریم کاربرد نظریه پتانسیل در تحلیل مسائل بایهارمونیک دوبعدی را نشان دهیم. برای این منظور در ابتدا تابع بایهارمونیک[1] و مساله بایهارمونیک را تعریف کرده، نظریه آلمانسی[2] را شرح داده و سپس شکل کلی یک نوع مساله بایهارمونیک را بیان و به کمک نمایش r^2- فرم آلمانسی و فرمول برگمن-شیفر[3] به حل آن می‌پردازیم. در ادامه فصل نوع دیگری از مساله مستقیم بایهارمونیک را مطرح و به کمک نمایش r^2- فرم و فرمول گرین[4] آن را حل می‌کنیم. منظور از حل، به دست آوردن دو تابع هارمونیک برای هر یک از مسائل است که ترکیب آنها با ضریب r^2، اولاً تابعی بایهارمونیک بوده، ثانیاً در شرایط کرانه‌ای مساله صدق کند؛ اما توابع هارمونیکی که به کمک فرمولهای آلمانسی، گرین و برگمن-شیفر به دست می‌آیند، جواب مسائل مورد نظر را بر روی کران می‌دهند. برای به دست آوردن جواب در داخل ناحیه برای هریک از مسائل باید دو مساله هارمونیک (معادله لاپلاس با شرط دیریکله) حل شود تا توابع هارمونیک در داخل ناحیه به دست آمده و در تعاقب آن، جواب مسائل بایهارمونیک در داخل ناحیه بدست آید.

---

[1] Biharmonic function
[2] Almansi Theory
[3] Bergman-Schiffer
[4] Green formula

۱.۱ توابع بایهارمونیک

تابع Ψ را در ناحیه کراندار Ω با کران بسته $\partial\Omega$ بایهارمونیک گوئیم هر گاه تا مرتبهٔ چهارم به طور پیوسته مشتق‌پذیر بوده و در ناحیه Ω، در معادله بایهارمونیک

$$\nabla^4\Psi = \nabla^2(\nabla^2\Psi) = o \qquad (۱.۱)$$

که در آن $\Delta = \nabla^2$ عملگر لاپلاس[۵] می‌باشد، صدق کند [۸].

۲.۱ مسائل بایهارمونیک

منظور از یک مساله بایهارمونیک یک معادله بایهارمونیک به صورت

$$\nabla^2(\nabla^2\Psi(p)) = \nabla^4\Psi(p) = o, \qquad p \in \Omega \subset R^2 \qquad (۱.۲)$$

با شرایط کرانه‌ای

$$\begin{cases} \Psi(p) = -\alpha(p) & p \in \partial\Omega \\ \nabla^2\Psi(p) = -\beta(p) & p \in \partial\Omega \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \Psi(p) = -\alpha(p) & p \in \partial\Omega \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial n}(p) = -\beta(p) & p \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (۱.۳)$$

یا در حالت کلی تر

$$\begin{cases} B_1\Psi(p) = \alpha(p) + \Psi(p) = o \\ B_2\Psi(p) = \beta(p) + \nabla^2\Psi(p) = o \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} B_1\Psi(p) = \alpha(p) + \Psi(p) = o \\ B_2\Psi(p) = \beta(p) + \dfrac{\partial\Psi}{\partial n}(p) = o \end{cases} \qquad (۱.۴)$$

می‌باشد. که در آن Ω یک ناحیه کراندار با کران بسته $\partial\Omega$ و $\Delta = \nabla^2$ عملگر لاپلاس، $\frac{\partial}{\partial n}$ نماد مشتق سوئی در جهت بردار قائم یکه خارجی $\vec{n}$ و α و β توابع معین وابسته به نقاط کرانه‌ای و عملگر بایهارمونیک ∇^4 می‌باشد [۴].

۳.۱ نظریه آلمانسی

آلمانسی در سال ۱۸۹۷ نشان داد که هر جواب عمومی معادله بایهارمونیک موسوم به

$$\nabla^2(\nabla^2\Psi) = \nabla^4\Psi = o, \qquad \text{در } \Omega \qquad (۱.۵)$$

---

[۵] Laplace's operator

به شکل زیر می‌باشد

$$\Psi = r^{۲}\phi^{(۱)} + \phi^{(۲)}; \quad \nabla^{۲}\phi^{(۱)} = \nabla^{۲}\phi^{(۲)} = o, \quad r^{۲} = x^{۲} + y^{۲} \quad \Omega \text{ در} \quad (۱.۶)$$

نمایش حاصل برای برخی نواحی یکتا هستند [۳].

۴.۱ مسائل بایهارمونیک مستقیم

در این بخش درباره دو نوع از مسائل بایهارمونیک بحث می‌شود. اولین مساله به معین کردن تابع نامعلوم خیز صفحه در داخل ناحیه Ω اختصاص دارد و به شکل زیر است:

$$\begin{array}{ll} \nabla^{۴}W = o & in\ \Omega, \\ W(p) = f(p) & p \in \partial\Omega, \\ \nabla^{۲}W(p) = g(p) & p \in \partial\Omega, \end{array} \qquad (۱.۷)$$

این مساله مدل ریاضی خمش یک صفحه نازک بدون بار[۶] می‌باشد [۱۰].

برای حل مساله نیاز به یافتن دو تابع هارمونیک $\phi^{(۱)}$ و $\phi^{(۲)}$ است، به طوری که $W = r^{۲}\phi^{(۱)}+\phi^{(۲)}$ در Ω، بایهارمونیک بوده و در شرایط کرانه‌ای مساله (۱.۷) صدق کند.

با استفاده از نظریه آلمانسی نمایش به صورت $r^{۲}\phi^{(۱)} + \phi^{(۲)}$ جواب معادله بایهارمونیک می‌باشد تنها مساله‌ای که می‌ماند این است که توابع هارمونیک $\phi^{(۱)}$ و $\phi^{(۲)}$ را طوری بیابیم که $W = r^{۲}\phi^{(۱)} + \phi^{(۲)}$ در شرایط کرانه‌ای صدق کند.

در این جا $\phi^{(۱)}$ کرانه‌ای را بر حسب دومین شرط کرانه‌ای مساله (۱.۷) به دست می‌آوریم؛ توجه می‌کنیم که به ازاء هر تابع بایهارمونیک W؛

$$\begin{aligned} \nabla^{۲}W &= \nabla^{۲}(r^{۲}\phi^{(۱)} + \phi^{(۲)}) = \nabla^{۲}(r^{۲}\phi^{(۱)}) + \nabla^{۲}(\phi^{(۲)}) = \nabla^{۲}(r^{۲}\phi^{(۱)}) \\ \nabla^{۲}W &= ۴\phi^{(۱)} + ۴(x\frac{\partial\phi}{\partial x} + y\frac{\partial\phi}{\partial y}) = ۴\phi^{(۱)} + ۴r\frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad (۱.۸) \\ & \phi^{(۱)} + r\frac{\partial\phi^{(۱)}}{\partial r} = \frac{\nabla^{۲}W}{۴} \qquad (۱.۹) \end{aligned}$$

که معادلهٔ دیفرانسیلی برای $\phi^{(۱)}$ بر حسب تابع هارمونیک $\nabla^{۲}W$ می‌باشد.

---
[۶] Unloaded thin plate

این معادله یک جواب عمومی[۷]: به شکل زیر دارد [۸].

$$\phi^{(1)} = \frac{r^{-1}}{4} \int_o^r \nabla^2 W \, dr + r^{-1} g(\theta) \tag{1.10}$$

در اینجا در واقع $g(\theta)$ تابعی دلخواه از θ، باید طوری تعیین شود که $\phi^{(1)}$ یک تابع هارمونیک باشد. جواب خصوصی[۸]

$$\phi_p^{(1)} = \frac{r^{-1}}{4} \int_o^r \nabla^2 W \, dr \tag{1.11}$$

وجود دارد که با وجود هارمونیک بودن $\nabla^2 W$، $\phi_p^{(1)}$ به جز چند مورد خاص هارمونیک خواهد بود. پس اگر با آن موارد خاص مواجه نشویم برای پیدا کردن جواب معادله (۱.۹) از دستور (۱.۱۱) استفاده می‌کنیم که می‌دانیم هارمونیک است. در غیر این صورت از دستور جواب عمومی یعنی (۱.۱۰) استفاده می‌کنیم تا جواب تابعی هارمونیک باشد.

در دستور $\phi_p^{(1)}$ اگر $\nabla^2 W$ را برابر $r^v \cos v\theta$ (که یک تابع هارمونیک است) در نظر بگیریم، هر گاه $v \neq -1$ باشد پس $\phi_p^{(1)}$ حتماً هارمونیک است [۱۱] و از دستور (۱.۱۱) استفاده می‌کنیم و اگر $v = -1$ باشد، $\phi_p^{(1)}$ هارمونیک نیست در این صورت از دستور جواب عمومی برای تعیین $g(\theta)$ استفاده می‌شود و برای این که $\phi^{(1)}$ هارمونیک باشد، قرار می‌دهیم:

$$\nabla^2 \phi^{(1)} = o \tag{1.12}$$

از آنجا

$$\nabla^2(r^{-1} g(\theta)) = -\nabla^2\left(\frac{r^{-1}}{4} \int_o^r \nabla^2 W \, dr\right) \tag{1.13}$$

عبارت (۱.۱۳) یک معادله پواسون[۹] برای g است که یک جواب دارد پس همیشه تابع هارمونیک $\phi^{(1)}$ وجود دارد. با فرض

$$\nabla^2 W = r^{-1} \cos\theta \tag{1.14}$$

$$\frac{r^{-1}}{4} \int_o^r r^{-1} \cos\theta \, dr = \frac{r^{-1}}{4} \cos\theta \log r \neq o \tag{1.15}$$

---

[۷] General solution
[۸] particular solution
[۹] Poisson equation

$$\nabla^{۲}(\frac{r^{-۱}}{۴}\cos\theta\log r) = -\frac{\cos\theta}{۲r^{۳}} \quad (۱.۱۶)$$

$$\nabla^{۲}(r^{-۱}g(\theta)) = -\frac{g}{r^{۳}} - \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲}g}{\partial\theta^{۲}} \quad (۱.۱۷)$$

از (۱.۱۳) داریم:

$$-\frac{g}{r^{۳}} - \frac{۱}{r^{۳}}\frac{\partial^{۲}g}{\partial\theta^{۲}} = -\frac{\cos\theta}{۲r^{۳}} \quad (۱.۱۸)$$

جواب خصوصی معادله بالا عبارت است از:

$$g_p(\theta) = \frac{۱}{۴}\theta\sin\theta \quad (۱.۱۹)$$

در نتیجه $\phi^{(۱)}$ عبارت است از:

$$\phi^{(۱)} = \frac{r^{-۱}}{۴}[\cos\theta\log r + \theta\sin\theta] \quad (۱.۲۰)$$

$$\phi^{(۱)} = \frac{r^{-۲}}{۴}[x\log r + y\theta] \quad (۱.۲۱)$$

اگر ناحیه مورد نظر یک ناحیه همبند ساده باشد که شامل مبدأ یعنی $r = o$ است جواب بالا غیر قابل قبول بوده و تابع هارمونیکی نخواهیم داشت. در غیر این صورت جواب بالا یک تابع هارمونیک خواهد داد.

اگر

$$\nabla^{۲}W = r^{-۱}\sin\theta \quad (۱.۲۲)$$

آنگاه

$$\phi^{(۱)} = r^{-۱}(\sin\theta\log r - \theta\sin\theta) \quad (۱.۲۳)$$

یا

$$\phi^{(۱)} = r^{-۲}(y\log r - y\theta) \quad (۱.۲۴)$$

خواهد بود.