دانشگاه صنعتی شیراز

دانشکده علوم، گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی

نتایجی از فضاهای نرم‌دار احتمالی برداری توپولوژیک

نگارش:

لیلا پورمعمار

استاد راهنما:

دکتر محمود حاجی شعبانی

استاد مشاور:

دکتر محمد جواد مهدی پور

شهریور ماه ۱۳۹۲

تقدیم به خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را و عشق را

و به کسانی که عشقشان را در وجودم دمیدند.

پدر و مادر عزیزتر از جانم

سپاس گزاری...

ای هستی بخش، وجود مرا بر نعمات بی‌کرانت توان شکر نیست ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران. حال که توفیق جمع آوری و تهیه این مجموعه را یافته‌ام بر خود واجب می‌دانم از تمامی عزیزانی که در طی انجام این پژوهش از راهنمایی و یاری شان بهره مند گشته‌ام تشکر و قدردانی کنم و برای ایشان از درگاه پروردگار مهربان آرزوی سعادت و پیروزی نمایم. در ابتدا صمیمانه‌ترین تقدیرها تقدیم به خانواده عزیز و مهربانم که همواره حامی و مشوقم بوده‌اند و پیمودن روزهای سخت و آسان زندگی‌ام بدون دعای خیر و برکت وجودشان غیرممکن بود. از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر محمود حاجی شعبانی که با سعه صدر و صبوری مرا راهنمایی نموده و با ارائه نظرات سازنده و رهنمودهای بی دریغش در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشت، کمال تشکر را دارم. از استاد مشاور ارجمند جناب آقای دکتر محمد جواد مهدی پور که در طول این تحقیق با رهنمودها و تشویق های خود مرا مورد لطف خویش قرار دادند، صمیمانه سپاسگزارم. و در نهایت از تمامی اساتید گروه ریاضی، دوستان و هم کلاسی‌های عزیزم که در طول این مدت افتخار آشنایی و مصاحبت با آنها را داشتم، به پاس محبت‌های بی‌دریغشان سپاسگزارم.

چکیده

نتایجی از فضاهای نرم‌دار احتمالی برداری توپولوژیک

نگارش:
لیلا پورمعمار

فضاهای نرم‌دار احتمالی توسط سراستنف معرفی و توسط آلسینا، شوایزر و اسکلار تعریف جدیدی از آن‌ها ارائه شد. در این پایان‌نامه در ابتدا فضای نرم‌دار احتمالی ارائه شده در سال ۱۹۹۳ را مورد بررسی قرار داده و شرایطی را فراهم می‌کنیم که تحت این شرایط این فضاها، فضاهای برداری توپولوژیک باشند. در فصل پایانی فضای جدیدی تحت عنوان گروه‌های نرم‌دار احتمالی را معرفی می‌کنیم. هم‌چنین دسته‌ای از گروه‌های نرم‌دار احتمالی برداری توپولوژیک را مشخص نموده و بالاخره τ- حاصل‌ضرب و حاصل‌ضرب شمارای این فضاها را معرفی می‌کنیم.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل ۱

تعاریف و پیش‌نیازها

۱−۱ مقدمه

در قرن نوزدهم میلادی پیشرفت‌های زیادی در علوم اندازه‌گیری حاصل شد. این پیشرفت‌ها با خطاهایی همراه بودند. هر چند در اوایل این قرن ریاضی‌دانان بر این باور بودند که با طراحی دقیق و فراوانی داده‌ها، می‌توان خطا را تا حد دلخواه کوچک نمود، اما با پیدایش نظریه مکانیک کوانتوم این باور از بین رفت. عدم قطعیت در اندازه‌گیری جزء لاینفک این نظریه بوده و نمی‌توانست نادیده گرفته شود. امروزه، عدم قطعیت در ذات یک پدیده، خود حقیقتی پذیرفته شده است. این حقیقت نه فقط در علم فیزیک بلکه در حوزه‌های مختلفی از جمله روان‌سنجی، نظریه جابه‌جایی و در ریاضیات در آنالیز خوشه‌ای و آنالیز بازه‌ای کاربرد فراوان دارد. تلاش‌های زیادی برای توصیف و مدل‌بندی این پدیده‌ها انجام شده است. از جمله این تلاش‌ها می‌توان به نظریه فضاهای متریک احتمالی که در سال ۱۹۴۲ توسط منگر [۱] مطرح شد، اشاره کرد [۹]. در حقیقت وی در موقعیت‌هایی که دقیقا فاصله‌ی دو نقطه دقیقا مشخص نیست احتمال مقادیری ممکن از این فاصله‌ها را به عنوان مقدار متریک معرفی کرد.

در این فصل ابتدا به بیان قضایا، تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در فصل‌های آتی به تکرار از آن‌ها استفاده می‌شود، می‌پردازیم. سپس فضای متریک احتمالی را معرفی می‌کنیم و در نهایت با مجهز کردن این فضا به توپولوژی قوی، این فضا را به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌کنیم. لازم به ذکر است که اکثر مطالبی که در این فصل بیان شده برگرفته از مراجع [۱۴]، [۱۲] و [۱۳] است.

---

[۱] Menger

۱-۲ توابع توزیع فاصله و متر سیبلای

توابع توزیع فاصله و متر سیبلای نقشی اساسی در نظریه فضای متریک احتمالی دارند. بدون شک بررسی خواص فضای متریک احتمالی بدون داشتن اطلاعات کامل در مورد توابع توزیع و متر سیبلای امکان پذیر نمی‌باشد. در این بخش به بررسی این دو مفهوم و هم‌چنین قضایایی اساسی در مورد آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱: تابع $F:[-\infty,+\infty]\longrightarrow[۰,۱]$ را تابع توزیع فاصله می‌نامند، هرگاه F صعودی، پیوسته‌ی چپ، $F(+\infty)=۱$ و $F(-\infty)=۰$ باشد. مجموعه‌ی تمام توابع به فرم فوق را فضای توابع توزیع فاصله نامیده و با نماد Δ نشان می‌دهند. به طور خلاصه:

$$\Delta=\{F:[-\infty,+\infty]\longrightarrow[۰,۱]:\ \text{صعودی و پیوسته چپ}\ F,\ F(+\infty)=۱,\ F(-\infty)=۰\}.$$

تعریف ۲.۱: مجموعه‌ی تمام توابع F که در Δ قرار دارند و هم‌چنین دارای خاصیت $F(۰)=۰$ باشند را با نماد Δ^+ نمایش می‌دهند. به طور خلاصه:

$$\Delta^+=\{F\in\Delta:\ F(۰)=۰\}.$$

تعریف ۳.۱: مجموعه‌ی تمام توابع F که در Δ قرار دارند و هم‌چنین دارای خاصیت‌های زیر باشند را با نماد D نمایش می‌دهند.

$$\lim_{t\to+\infty}F(t)=۱,\qquad \lim_{t\to-\infty}F(t)=۰.$$

به طور خلاصه:

$$D=\{F\in\Delta:\ \lim_{t\to+\infty}F(t)=۱,\ \lim_{t\to-\infty}F(t)=۰\}.$$

تعریف ۴.۱: مجموعه‌ی تمام توابع F که در D قرار دارند و دارای خاصیت $F(۰)=۰$ باشند را با نماد D^+ نمایش می‌دهند. به طور خلاصه:

$$D^+=\{F\in D:\ F(۰)=۰\}.$$

تعریف ۵.۱: (متر سیبلای یا متر لوی) [1] فرض کنید G, F دو تابع در Δ و $h \in (۰, ۱]$. گوییم G, F دارای خاصیت $(F, G; h)$ است، هرگاه به ازای هر $x \in (\frac{-۱}{h}, \frac{۱}{h})$ داشته باشیم:

$$F(x-h) - h \leq G(x) \leq F(x+h) + h.$$

متر سیبلای یا لوی را با d_S یا d_L نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_S(F, G) = \inf\{h \in (۰, ۱] : \text{ برقرار باشد } (F, G; h), (G, F; h)\}.$$

در ادامه این بخش به بیان قضایایی مهم در مورد مفاهیم بیان شده در بالا می‌پردازیم.

قضیه ۶.۱: به ازای هر $F, G \in \Delta$، خاصیت‌های $(F, G; ۱)$ و $(G, F; ۱)$ همواره برقرار است و $d_S(F, G) \leq ۱$.

اثبات: ازآن‌جا که اثبات‌های $(F, G; ۱)$ و $(G, F; ۱)$ مشابه می‌باشند، فقط نشان می‌دهیم که $(F, G; ۱)$ برقرار است. برای این امر کافی است نشان دهیم که به ازای هر $x \in (-۱, ۱)$ رابطه زیر برقرار است:

$$F(x-۱) - ۱ \leq G(x) \leq F(x+۱) + ۱.$$

فرض کنید $x \in (-۱, ۱)$. با توجه به صعودی بودن G, F و نامساوی‌های زیر

$$۰ \leq G(x) \leq ۱, \qquad ۰ \leq F(x) \leq ۱$$

داریم:

$$F(x-۱) - ۱ \leq ۱ - ۱ = ۰ \leq G(x) \leq ۱ \leq F(x+۱) + ۱.$$

لذا $d_S(F, G) \leq ۱$. $\square$

قضیه ۷.۱: اگر $(F, G; h)$ برای $h > ۰$ برقرار باشد، آن‌گاه برای هر $h_۱ > h$ رابطه $(F, G; h_۱)$ صحیح خواهد بود. بنابراین به وضوح اگر $d_S(F, G) = ۰$ باشد، آن‌گاه برای هر $h > ۰$، $(F, G; h)$ و $(G, F; h)$ نیز صحیح خواهند بود.

---

[1] Sibly Metric

اثبات: ابتدا قسمت اول قضیه را ثابت می‌کنیم. با توجه به این که $(F, G; h)$ برقرار است، به ازای هر $x \in (\frac{-۱}{h}, \frac{۱}{h})$ داریم:

$$F(x-h) - h \leq G(x) \leq F(x+h) + h.$$

اکنون نشان می‌دهیم به ازای هر $x \in (\frac{-۱}{h_۱}, \frac{۱}{h_۱})$ رابطه زیر برقرار است:

$$F(x-h_۱) - h_۱ \leq G(x) \leq F(x+h_۱) + h_۱.$$

فرض کنیم $x \in (\frac{-۱}{h_۱}, \frac{۱}{h_۱})$. پس داریم $x \in (\frac{-۱}{h}, \frac{۱}{h})$. و بنابراین:

$$F(x-h) - h \leq G(x) \leq F(x+h) + h.$$

اما F تابعی صعودی و در نتیجه:

$$F(x-h_۱) - h_۱ \leq F(x-h) - h \leq G(x) \leq F(x+h) + h \leq F(x+h_۱) + h_۱.$$

بنابراین اثبات قسمت اول پایان می‌یابد. اکنون به سراغ اثبات قسمت دوم قضیه می‌رویم. فرض کنید $d_S(F, G) = ۰$. پس:

$$\inf\{h \in (۰, ۱], \quad \text{برقرار باشد} \quad (F, G; h), (G, F; h)\} = ۰.$$

بنابراین دنباله $h_n \in (۰, ۱]$ یافت می‌شود به‌طوری‌که h_n به سمت صفر میل می‌کند و $(F, G; h_n)$ و $(G, F; h_n)$ برقرار است. فرض کنیم $h > ۰$ باشد. چون h_n به صفر همگراست، $n_۰$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $h_{n_۰} < h$ و رابطه $(F, G; h_{n_۰})$ صحیح می‌باشد. لذا طبق قسمت اول همین قضیه $(F, G; h), (G, F; h)$ برقرار خواهند بود. $\square$

قضیه ۸.۱: اگر $d_S(F, G) = h > ۰$ باشد، در این صورت $(F, G; h)$ و $(G, F; h)$ همواره برقرار خواهند بود.

اثبات: برای هر $t > ۰$ فرض کنید $J_t = (\frac{-۱}{t}, \frac{۱}{t})$. به وضوح اگر $۰ < s \leq t < ۱$، $J_t \subseteq J_s$. فرض کنید $x \in J_h$. از آن‌جا که J_h باز است، $t > ۰$ و $x < y$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $y \in J_{h+t}$. با توجه به فرض قضیه داریم $d_S(F, G) = h$. بنابراین با توجه به قضیه ۷.۱، $(F, G, h+t)$ برقرار

خواهد بود. لذا:

$$F(y-h-t)-(h+t) \leq G(y) \leq F(y+h+t)+(h+t).$$

اکنون t را به سمت صفر میل می‌دهیم. با توجه به پیوستگی چپ F داریم:

$$F(y-h)-h \leq G(y) \leq F(x+h)+h.$$

حال اگر این بار y را به سمت x میل دهیم، در این صورت با توجه به پیوستگی چپ F و G برای هر $x \in J_h$ داریم:

$$F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h)+h.$$

پس $(F, G; h)$ برقرار و لذا حکم قضیه اثبات می‌شود. به طور مشابه $(G, F; h)$ هم برقرار خواهد بود. □

قضیه ۹.۱: زوج (Δ, d_S) یک فضای متریک است.

اثبات: برای اثبات متر بودن d_S روی Δ می‌بایست موارد زیر را ثابت کنیم:

(الف) $d_S(F, F) = \circ$؛

(ب) $d_S(F, G) = \circ \Longrightarrow F = G$؛

(ج) $d_S(F, G) = d_S(G, F)$؛

(د) $d_S(F, H) \leq d_S(F, G) + d_S(G, H)$.

در بررسی خاصیت (الف) داریم:

$$d_S(F, F) = \inf\{h \in (\circ, ۱], \quad \text{برقرار باشد} \quad (F, F; h)\}.$$

فرض کنید $h \in (\circ, ۱]$. از آن‌جا که F صعودی است،:

$$F(x-h)-h \leq F(x) \leq F(x+h)+h.$$

بنابراین:

$$d_S(F, F) = \inf\{h \in (\circ, ۱]: \quad \text{برقرار باشد} \quad (F, F; h)\} = \inf(\circ, ۱] = \circ.$$

برای بررسی خاصیت (ب) فرض کنید:

$$d_S(F,G) = \inf\{h \in (۰,۱] : \quad \text{برقرار باشد} \quad (F,G;h),(G,F;h)\} = ۰.$$

بنابراین برای هر $h \in (۰,۱]$

$$F(x-h) - h \le G(x) \le F(x+h) + h. \qquad (۱-۱)$$

اگر از نامساوی طرف چپ رابطه (۱−۱) استفاده کنیم، در این صورت با توجه به پیوستگی چپ F در x داریم:

$$F(x) \le G(x).$$

از آن‌جا که x دلخواه بود، لذا به ازای هر $x \in (-\infty,+\infty)$، $F(x) \le G(x)$ و در نتیجه:

$$F \le G.$$

اگر روند قبل را در مورد نامساوی سمت راست رابطه (۱−۱) به کار بریم، در این صورت به ازای هر $x \in (-\infty,+\infty)$، $G(x) \le F(x)$. لذا با توجه قسمت قبل $F = G$ می‌باشد.

برای بررسی خاصیت (ج) با توجه به تعریف متر سیبلای داریم:

$$d_S(F,G) = \inf\{h \in (۰,۱] : \quad \text{برقرار باشد} \quad (F,G;h),(G,F;h)\}$$

و

$$d_S(G,F) = \inf\{h \in (۰,۱] : \quad \text{برقرار باشد} \quad (G,F;h),(F,G;h)\}.$$

بنابراین

$$d_S(F,G) = d_S(G,F).$$

برای بررسی خاصیت (د) فرض کنید $F,G,H \in \Delta$ و متمایز با یکدیگر باشند. هم‌چنین اگر $\alpha = d_S(F,G) > ۰$ و $\beta = d_S(G,H) > ۰$، در این صورت مسأله را به دو حالت زیر تفکیک می‌کنیم:

حالت اول: فرض کنیم $\alpha + \beta \geq ۱$. در این حالت چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند و لذا:

$$d_S(F,H) \leq d_S(F,G) + d_S(G,H).$$

حالت دوم: اگر $\alpha + \beta < ۱$. آن‌گاه x را در $J_{\alpha+\beta}$ در نظر می‌گیریم. به وضوح $x+\beta$ و $x-\beta$ در J_α قرار دارند. از آن‌جا که $d_S(F,G) = \alpha > ۰$ پس به ازای هر $\frac{-۱}{\alpha} < x < \frac{۱}{\alpha}$،

$$F(x-\alpha) - \alpha \leq G(x) \leq F(x+\alpha) + \alpha.$$

از طرفی $\frac{-۱}{\alpha} < x+\beta < \frac{۱}{\alpha}$. پس در رابطه قبل به جای x، $x+\beta$ را قرار می‌دهیم. لذا

$$F(x+\beta-\alpha) - \alpha \leq G(x+\beta) \leq F(x+\beta+\alpha) + \alpha.$$

به طرفین رابطه قبل β را اضافه می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$F(x+\beta-\alpha) - \alpha + \beta \leq G(x+\beta) + \beta \leq F(x+\beta+\alpha) + \alpha + \beta. \qquad (۱-۲)$$

اگر روند فوق را برای $x - \beta$ انجام دهیم به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$F(x-\beta-\alpha) - \alpha - \beta \leq G(x-\beta) - \beta \leq F(x-\beta+\alpha) + \alpha - \beta. \qquad (۱-۳)$$

اکنون تعریف متر سیبلای را در مورد $d_S(G,H) = \beta$ می‌نویسیم، در این صورت به ازای هر $\frac{-۱}{\beta} < x < \frac{۱}{\beta}$ داریم:

$$G(x-\beta) - \beta \leq H(x) \leq G(x+\beta) + \beta. \qquad (۱-۴)$$

حال اگر روابط (۱-۲)، (۱-۳) و (۱-۴) را با هم تلفیق کنیم خواهیم داشت:

$$F(x-\alpha-\beta)-\alpha-\beta \leq G(x-\beta)-\beta \leq H(x) \leq G(x+\beta)+\beta \leq F(x+\alpha+\beta)+\alpha+\beta.$$

بنابراین $(F,H;\alpha+\beta)$ برقرار است. با محاسبه‌ای ساده ثابت می‌شود که $x+\alpha$ و $x-\alpha$ هر دو در J_β قرار دارند. اکنون اگر روند قبل را یک بار دیگر تکرار کنیم به طور مشابه $(H,F;\alpha+\beta)$

برقرار خواهد بود. بنابراین:

$$d_S(F,H) \le \alpha + \beta = d_S(F,G) + d_S(G,H).$$

لذا حکم قضیه اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۱۰.۱: فضای (Δ, d_S) فشرده است.

اثبات: برای مشاهده اثبات به نتیجه‌ی ۶ـ۲ـ۴ از مرجع [۱۴] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۱۱.۱: دنباله $\{F_n\}$ در Δ را همگرای ضعیف به تابع $F \in \Delta$ گویند و با نماد $F_n \xrightarrow{w} F$ نمایش می‌دهند، هرگاه به ازای هر $x \in (-\infty, +\infty)$ که F در x پیوسته باشد، دنباله $\{F_n(x)\}$ همگرا به $F(x)$ باشد.

لم ۱۲.۱: فرض کنید تابع f بر بازه (a,b) یکنوا باشد. در این صورت، مجموعه‌ی نقاطی از (a,b) که در آن‌ها f ناپیوسته است، حداکثر شمارش‌پذیر می‌باشد.

اثبات: برای مشاهده اثبات به مرجع [۱۱] رجوع کنید. $\square$

قضیه ۱۳.۱: فرض کنید $\{F_n\}$ دنباله‌ای از اعضای Δ باشد. در این صورت $\{F_n\}$ به طور ضعیف همگرا به F است اگر و تنها اگر وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند، $d_S(F_n, F)$ به صفر همگرا باشد.

اثبات: فرض کنید $d_S(F_n, F)$ به صفر همگرا بوده و x یک نقطه پیوستگی F باشد. اگر $x = \pm\infty$ باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. فرض کنید $x \in (-\infty, +\infty)$. پس برای h های مثبت به قدر کافی کوچک، بازه $(x-h, x+h)$ در بازه $(\frac{-۱}{h}, \frac{۱}{h})$ قرار می‌گیرد. از آن‌جا که $d_S(F_n, F)$ به صفر همگراست، پس $N \in \mathbb{N}$ یافت می‌شود به‌طوری‌که اگر $n > N$، آن‌گاه $d_S(F_n, F) < h$. بنابراین با توجه به قضیه ۷.۱، (F, F_n, h) برقرار خواهد بود. پس به ازای هر $\frac{-۱}{h} < x < \frac{۱}{h}$، رابطه زیر برقرار است:

$$F(x-h) - h \le F_n(x) \le F(x+h) + h.$$

اما از آن‌جایی که $\frac{-۱}{h} < x - h < \frac{۱}{h}$ است لذا رابطه فوق به ازای $x - h$ نیز صحیح خواهد بود.

یعنی:

$$F(x-۲h)-h \leq F_n(x-h) \leq F(x)+h. \qquad (۱-۵)$$

از طرفی $\frac{۱}{h} > x+h > \frac{-۱}{h}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$F(x)-h \leq F_n(x+h) \leq F(x+۲h)+h. \qquad (۱-۶)$$

اکنون از صعودی بودن F_n و روابط (۱−۵) و (۱−۶) خواهیم داشت:

$$F(x-۲h)-h \leq F_n(x-h) \leq F_n(x) \leq F_n(x+h) \leq F(x+۲h)+h.$$

حال با توجه به پیوستگی F در x، $F_n(x) \longrightarrow F(x)$.

اکنون به اثبات عکس قضیه می‌پردازیم. فرض کنید $۰ < h \leq ۱$ و F_n به طور ضعیف به F همگرا باشد. از آن‌جا که F صعودی است، بنا بر لم ۱.۱۲ نقاط پیوستگی تابع F در $\mathbb{R}$ چگال می‌باشد، لذا می‌توان مجموعه‌ی متناهی $A=\{c_۱,\ldots,c_p\}$ از نقاط پیوستگی F را در نظر گرفت، به طوری $c_۰ < \frac{-۱}{h}$، $c_p \geq \frac{۱}{h}$ و به ازای $m=۱,۲,\ldots,p$، $c_{m-۱} < c_m < c_{m-۱}+h$. طبق تعریف ۱.۴۱ به ازای هر $m=۱,۲,\ldots,p$، $F_n(c_m)$ به $F(c_m)$ همگراست. بنابراین نظیر $\epsilon=h$، $N \in \mathbb{N}$ یافت می‌شود، به‌طوری‌که به ازای هر $n \geq N$ داریم:

$$|F_n(c_m)-F(c_m)| \leq h.$$

در نتیجه:

$$F(c_m)-h \leq F_n(c_m) \leq F(c_m)+h. \qquad (۱-۷)$$

فرض کنید $x \in (\frac{-۱}{h},\frac{۱}{h})$. از آن‌جا که x حداقل در یکی از بازه‌های $[c_{m-۱},c_m]$ قرار می‌گیرد، لذا با استفاده از رابطه‌ی (۱−۷) و صعودی بودن F_n داریم:

$$F(x-h)-h < F(c_{m-۱}-h) \leq F_n(c_{m-۱}) \leq F_n(x)$$
$$\leq F_n(c_m) \leq F(c_m)+h < F(x+h)+h.$$

بنابراین برای هر $x \in (\frac{-۱}{h}, \frac{۱}{h})$ و هر $۰ < h \leq ۱$ خواهیم داشت:

$$F(x-h)-h \leq F_n(x) \leq F(x+h)+h.$$

لذا $(F, F_n; h)$ برقرار می‌باشد. حال با تعویض F و F_n در نامساوی‌های بالا با فرآیندی مشابه $(F_n, F; h)$ برقرار خواهد بود. بنابراین:

$$d_s(F_n, F) = \inf\{h \in (۰, ۱]| \quad (F, F_n; h)(F_n, F; h)\} = \inf(۰, ۱] = ۰.$$

پس F_n به F همگراست. $\square$

تعریف ۱۴.۱: فرض کنیم G, F متعلق به Δ باشند. در این‌صورت تعریف می‌کنیم $F \leq G$، هرگاه به ازای هر $t \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$، آن‌گاه $F(t) \leq G(t)$.

در ادامه به معرفی اعضای مهمی از Δ می‌پردازیم که نقش مهمی در بررسی فضاهای نرم‌دار احتمالی دارند. به ازای هر $a \in \overline{\mathbb{R}}$ می‌توان ε_a را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\varepsilon_a(t) = \begin{cases} ۰ & t \leq a, \\ ۱ & t > a. \end{cases}$$

به وضوح هر ε_a عضوی از Δ می‌باشد.

قضیه ۱۵.۱: $\varepsilon_۰$ عضو ماکسیمال $(\Delta^+, \leq)$ می‌باشد.

اثبات: فرض کنید F عضوی از Δ^+ باشد. نشان می‌دهیم $F \leq \varepsilon_۰$. فرض کنید $x \in (۰, \infty]$. از آن‌جا که $\varepsilon_۰(x) = ۱$ و همواره داریم $F(x) \leq ۱$، بنابراین $F(x) \leq \varepsilon_۰(x)$ می‌باشد. $\square$

قضیه ۱۶.۱: ε_∞ عضو مینیمال $(\Delta^+, \leq)$ می‌باشد.

اثبات: فرض کنید F عضوی از Δ^+ باشد. نشان می‌دهیم $\varepsilon_\infty \leq F$. فرض کنید $x \in (\circ, \infty]$، از آن‌جا که $\varepsilon_\infty(x) = \circ$ و $F(x) \geq \circ$، بنابراین $\varepsilon_\infty(x) \leq F(x)$ می‌باشد. $\square$

تمام مطالبی که در مورد متر d_S روی Δ گفته شد، می‌توان به طور ساده‌تر روی Δ^+ به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۱.۱۷: اگر $F, G \in \Delta^+$ در این صورت به ازای هر $x \in (\circ, \frac{1}{h})$، شرط $(F, G; h)$ و $(G, F; h)$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$G(x) \leq F(x+h) + h.$$

اثبات: از آن‌جا که $F(\circ) = G(\circ) = \circ$ و:

$$F(x-h) - h \leq G(x) \leq F(x+h) + h,$$

بنابراین طرف چپ رابطه همواره برقرار می‌باشد. $\square$

قضیه ۱.۱۸: (الف) می‌توان گفت d_S یک متر روی Δ^+ است.

(ب) دنباله $\{F_n\}$ از اعضای Δ^+ همگرای ضعیف به $F \in \Delta^+$ می‌باشد اگر و تنها اگر $\{F_n\}$ در Δ به طور ضعیف به F میل کند.

(ج) زوج (Δ^+, d_S) فشرده و در نتیجه تام می‌باشد.

اثبات: از آنجا که $\Delta^+ \subsetneq \Delta$ است، لذا با توجه به قضیه‌های ۱.۹، ۱.۱۰ و ۱.۱۳ چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. $\square$

گزاره ۱.۱۹: روابط زیر همواره برقرار است:

(الف) به ازای هر $F \in \Delta^+$:

$$d_S(F, \varepsilon_\circ) = \inf\{h : \ F(h+) > 1 - h\}.$$

(ب) برای هر $t > \circ$ همواره $F(t) > 1 - t$ اگر و تنها اگر $d_S(F, \varepsilon_\circ) < t$.

اثبات: برای مشاهده اثبات به لم ۴ـ۳ـ۳ از مرجع [۱۴] رجوع کنید. $\square$

لم ۲۰.۱: فرض کنید که $F,G \in \Delta^+$ و $F \leq G$ در این صورت:

$$d_S(G,\varepsilon_\circ) \leq d_S(F,\varepsilon_\circ).$$

اثبات: فرض کنید $d_S(G,\varepsilon_\circ) = \alpha > \circ$ و $d_S(F,\varepsilon_\circ) = \beta > \circ$. طبق قضیه‌های ۸.۱ و ۱۷.۱ از آن‌جا که $F \leq G$ داریم:

$$\varepsilon_\circ(x) \leq F(x+\beta) + \beta \leq G(x+\beta) + \beta.$$

پس $(\varepsilon_\circ, G, \beta)$ برقرار و با توجه به این که $d_S(G,\varepsilon_\circ) = \alpha$، داریم:

$$\alpha \leq \beta.$$

بنابراین حکم قضیه برقرار است. □

۱−۳ tـنرم‌ها، tـهم‌نرم‌ها و توابع مثلث

در این بخش به بیان مفاهیم و قضایای مهم و اساسی در مورد tـ نرم‌ها، tـ هم‌نرم‌ها و توابع مثلث می‌پردازیم.

تعریف ۲۱.۱: عملگر دوتایی $T : [\circ, ۱] \times [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, ۱]$ را یک tـنرم گویند هرگاه:

(الف) T جابه‌جایی باشد؛ یعنی، به ازای هر y, x در $[\circ, ۱]$،

$$T(x,y) = T(y,x);$$

(ب) T شرکت پذیر باشد؛ یعنی، به ازای هر z, y, x در $[\circ, ۱]$،

$$T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z);$$

(ج) ۱ عضو همانی باشد؛ یعنی، به ازای هر $x \in [\circ, ۱]$،

$$T(x,۱) = T(۱,x) = x;$$

(د) T صعودی باشد؛ یعنی، اگر $x \leq x^*, y \leq y^*$، آن‌گاه

$$T(x,y) \leq T(x^*,y^*).$$

نتیجه ۲۲.۱: صفر عضو پوچ T می‌باشد.

اثبات: نشان می‌دهیم به ازای هر $x \in [0,1]$، $T(x,0) = T(0,x) = 0$. فرض کنید $x \in [0,1]$ بنابراین:

$$0 \leq T(x,0) \leq T(1,0) \leq 0.$$

در نتیجه $T(x,0) = 0$. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که $T(0,x) = 0$ می‌باشد. □

اکنون به معرفی دسته‌ای از t- نرم های مهم می‌پردازیم.

تعریف ۲۳.۱: t-نرم های M, W, Π, Z به صورت زیر تعریف می‌شوند:

(الف) $$\Pi(x,y) = xy;$$

(ب) $$M(x,y) = \min\{x,y\};$$

(ج) $$W(x,y) = \max\{x+y-1, 0\};$$

(د)

$$Z(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \in [0,1) \times [0,1), \\ x & x \in [0,1], y = 1, \\ y & x = 1, y \in [0,1]. \end{cases}$$

اثبات: بررسی t- نرم بودن توابع فوق به سادگی صورت می‌گیرد و از آن‌جا که اثبات t- نرم بودن آن طولانی و ساده می‌باشد لذا به بررسی آن‌ها نمی‌پردازیم. برای اطلاعات بیشتر در مورد آن‌ها می‌توان به مرجع [۱۴] رجوع کرد. □

تعریف ۲۴.۱: فرض کنید T یک t- نرم دلخواه باشد. T را ارشمیدسی گویند هرگاه به ازای هر $0 < x < 1$ همواره $T(x,x) < x$. هم چنین این تعریف قابل گسترش به هر تابع دوتایی روی $\mathbb{R}$ یا زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ می‌باشد.

تعریف ۲۵.۱: عملگر دوتایی $T^* : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ را یک t-هم‌نرم گویند هرگاه:

(الف) T^* جابه‌جایی باشد؛ یعنی، به ازای هر y, x در $[۰, ۱]$،

$$T^*(x, y) = T^*(y, x);$$

(ب) T^* شرکت پذیر باشد؛ یعنی، به ازای هر z, y, x در $[۰, ۱]$،

$$T^*(x, T^*(y, z)) = T^*(T^*(x, y), z);$$

(ج) ۰ عضو همانی باشد؛ یعنی، به ازای هر $x \in [۰, ۱]$،

$$T^*(x, ۰) = T^*(۰, x) = x;$$

(د) T^* صعودی باشد؛ یعنی، اگر $x \leq x^*, y \leq y^*$، آن‌گاه

$$T^*(x, y) \leq T^*(x^*, y^*).$$

قضیه ۲۶.۱: فرض کنیم T یک tـنرم دلخواه باشد. در این صورت نظیر T می‌توان tـهم‌نرم T^* را به صورت زیر تعریف کرد:

$$T^*(x, y) = ۱ - T(۱ - x, ۱ - y).$$

اثبات: برای اثبات، خاصیت‌های tـ هم‌نرم را بررسی می‌کنیم.

(الف) بررسی خاصیت جابه‌جایی:

$$T^*(x, y) = ۱ - T(۱ - x, ۱ - y) = ۱ - T(۱ - y, ۱ - x) = T^*(y, x).$$

(ب) بررسی خاصیت شرکت پذیری:

$$\begin{aligned} T^*(x, T^*(y, z)) =& ۱ - T(۱ - x, T(۱ - y, ۱ - z)) \\ =& ۱ - T(T(۱ - x, ۱ - y), ۱ - z) \\ =& T^*(T^*(x, y), z). \end{aligned}$$

(ج) بررسی خاصیت همانی:

$$T^*(x, ۰) = ۱ - T(۱ - x, ۱ - ۰) = ۱ - (۱ - x) = x$$