دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

پوشش کمینه یک گروه

نگارنده:

شکوفه لطفی

استاد راهنما: **دکتر مسعود آرین‌نژاد**

استاد مشاور: **دکتر سیدمجید جعفریان‌امیری**

بهمن ۱۳۸۷

إنه من سليمان وإنه

بسم الله الرحمن الرحيم

سپاسگزاری

سپاس بی‌کران پروردگار را، که به انسان قدرت اندیشیدن بخشید تا به یاری این موهبت راه ترقی و تعالی را بپیماید.

به ثمر رسیدن این تجربه میسر نمی‌شد مگر به لطف بسیاری از همه کسانی که هیچ‌گاه نمی‌توان آن‌ها را فراموش کرد:

با سپاس از پدر و مادرم، آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر، توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند. آنان که فروغ نگاهشان و گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه‌های جاودانی زندگی من است. آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت. در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می‌زنم و با دلی مملو از عشق و محبت و خضوع بر دستشان بوسه می‌زنم.

با سپاس از همسرم، او که مشوق اصلی من در ادامه تحصیل بود و در پیمودن این راه از هیچ کوششی دریغ نکرد. سختی‌ها را به جان خرید تا راه بر من هموار بماند. او که مصاحبت‌ها و محبت‌هایش، دلگرمی‌های من در این دوران بوده است و در ویرایش و تدوین این رساله همتی بی‌دریغ به من روا داشت.

با سپاس از استاد بزرگوار آقای دکتر آرین نژاد که در تمام مراحل انجام این رساله با مساعدت‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغ خود مرا یاری نمودند.

با سپاس از استاد گرامیم آقای دکتر جعفریان امیری که بی‌شک بدون راهنمایی‌ها و پیشنهادات سودمند ایشان نمی توانستم در پایان رساندن این رساله موفق باشم.

همچنین مراتب تشکر و امتنان خود را از اساتید ممتحن، جناب آقای دکتر اسمخانی و آقای دکتر تفضلیان بیان می‌نمایم.

در پایان لازم می دانم از دوستان عزیزم، خانم بیان نامی و آقای فواد قریشی، که مصاحبت‌هایشان و همراهیشان بخشی از خاطرات و دلگرمی‌های من در این مدت بوده است یاد کنم. باشد که دعای خیرمان بدرقه راهشان باشد.

چکیده

موضوع اصلی این رساله مطالعه n− پوشش‌های یک گروه متناهی می‌باشد. یک n− پوشش گروه مفروض G طبق تعریف عبارت است از اجتماع یک گردایه n عضوی از زیرگروه‌های سره G به طوری که آن گردایه برابر G باشد و دارای هیچ زیر گردایه‌ای با این ویژگی نباشد. در این رساله عمدتاً به مطالعه n− پوشش‌ها تا $n \leq ۶$ می‌پردازیم. این رساله مشتمل بر چهار فصل است:

در فصل اول، تعاریف و قضایای مورد نیاز در رابطه با گروه‌ها ذکر می‌شود. با بیان این مفاهیم زبان دقیقی برای بیان مفاهیم بعدی فراهم می‌آوریم.

در فصل دوم، به بررسی گروه‌های ۳−مجموع پرداخته و نشان می‌دهیم گروه دلخواه G، اجتماع سه زیرگروه سره خود است اگر و تنهااگر ۴− گروه کلاین تصویر همریختی G باشد.

در فصل سوم، به بررسی کلی گروه‌های n−مجموع می‌پردازیم. نشان می‌دهیم گروه ۲−مجموع وجود ندارد و ساختار گروه‌های n−مجموع برای $۳ \leq n \leq ۶$ را بررسی و رده‌بندی می‌کنیم. همچنین گروه‌های n−مجموع اولیه را تعریف و برای $۳ \leq n \leq ۶$، آن‌ها را شناسایی می‌کنیم.

در فصل چهارم، به بررسی گروه‌هایی که دارای یک ۶− پوشش ماکسیمال تقلیل ناپذیر با اشتراک هسته آزاد هستند پرداخته و این گروه‌ها را رده‌بندی می‌کنیم و در طی آن مقدار دقیق بزرگ‌ترین شاخص اشتراک دراین گروه‌ها را محاسبه می‌کنیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

به سادگی قابل بررسی است که هیچ گروهی به صورت اجتماع دو زیرگروه سره خود نیست. لذا این سوال طبیعی به نظر می‌رسد که آیا گروهی یا گروه‌هایی وجود دارند که اجتماع سه یا بیشتر، از زیرگروه‌های سره خود باشند؟

هایمر[۱]، برایان[۲] و مویر[۳]، در سال ۱۹۷۰ [۲]، ساختار گروه‌هایی که اجتماع سه زیرگروه سره خود هستند را مشخص نمودند. آن‌ها نشان دادند که گروه دلخواه G، اجتماع سه زیرگروه سره خود است اگر و تنهااگر G دارای گروه خارج قسمتی یکریخت با ۴− گروه کلاین باشد.

کوهن[۴] در سال ۱۹۹۴ [۵]، یک گروه n−مجموع را بدین صورت تعریف کرد: گروه G را n−مجموع گوییم، هرگاه بتوان G را به صورت اجتماع n زیرگروه سره‌اش نوشت ولی برای هر $m < n$، نتوان آن را به صورت اجتماع m زیرگروه سره‌اش نوشت و در این صورت می‌نویسیم $\sigma(G) = n$. وی توانست ساختار گروه‌های ۳−مجموع، ۴−مجموع، ۵−مجموع و ٦−مجموع را شناسایی و رده‌بندی کند. همچنین گروه‌های n−مجموع اولیه را بدین ترتیب تعریف کرد: G را یک گروه n−مجموع اولیه گوییم هرگاه $\sigma(G) = n$ و دارای هیچ زیرگروه نرمال غیر بدیهی مانند N نباشد به طوری که $\sigma(\frac{G}{N}) = n$. کوهن توانست برای هر $۳ \leq n \leq ٦$، گروه‌های n−مجموع اولیه را شناسایی کند. او در مقاله خود حدس زد که گروه ۷−مجموع وجود ندارد.

تامکینسون[۵] در سال ۱۹۹۷ [۱۷]، حدس کوهن را ثابت کرد و نشان داد اگر گروهی اجتماع هفت زیرگروه سره‌اش باشد، آن‌گاه اجتماع کمتر از ۷ زیرگروه سره‌اش نیز می باشد. به عبارت دیگر گروهی با $\sigma(G) = ۷$ وجود ندارد.

---

[۱] Bruckheimer, M.

[۲] Bryan, A. C

[۳] Muir

[۴] Cohn, J. H. E

[۵] Tomkinson, M. J

یک مفهوم نزدیک به مفهوم $n-$مجموع، تعریف پوشش یک گروه است بدین ترتیب: یک پوشش برای یک گروه مفروض G، گردایه‌ای از زیرگروه‌های G است به طوری که اجتماع آن‌ها برابر G باشد. یک پوشش را تقلیل ناپذیر گوییم هرگاه هیچ زیر گردایه‌ای از گردایه مفروض پوششی برای G نباشد و آن را ماکسیمال نامیم هرگاه تمام زیرگروه‌های پوشش مفروض، زیرگروه ماکسیمال باشند. هرگاه گردایه پوشش مفروض n عضو داشته باشد، آن را یک $n-$ پوشش می‌نامیم. حال اگر G دارای یک $n-$ پوشش باشد ولی برای هر $m < n$، دارای $m-$ پوشش نباشد می‌نویسیم $\sigma(G) = n$. در ضمن اشتراک همه اعضای پوشش را با D نشان داده و هرگاه $core_G D = D_G = ۱$ باشد می‌گوییم پوشش دارای اشتراک هسته آزاد است.

اسکورزا [۶] در سال ۱۹۲۶ [۱۵]، ساختار همه گروه‌هایی که دارای یک ۳− پوشش تقلیل ناپذیر با اشتراک هسته آزاد هستند را رده‌بندی کرد.

گریکو[۷] در سال ۱۹۵۶ [۸]، به بررسی ساختار گروه‌هایی که دارای یک ۴− پوشش تقلیل ناپذیر با اشتراک هسته آزاد هستند پرداخت.

بریس [۸]، فدری [۹] و سرنا[۱۰] در سال ۱۹۹۷ [۴]، توانستند گروه‌هایی که دارای یک ۵− پوشش ماکسیمال تقلیل ناپذیر با اشتراک هسته آزاد D هستند را مشخص کنند.

نیومن [۱۱] در سال ۱۹۵۴ [۱۲]، ثابت کرد اگر G دارای یک $n-$ پوشش تقلیل ناپذیر باشد، آن‌گاه $|G : D|$ توسط تابعی از n کراندار می‌شود. وی از نماد $f(n)$ برای نشان دادن بیشترین مقدار $|G : D|$ استفاده کرد.

بریس [۱۲]، فدری [۱۳] و سرنا[۱۴] در سال ۱۹۹۷ [۴]، توانستند مقدار دقیق $f(۵)$ را محاسبه کنند: $f(۵) = ۱۶$.

[۶] Scorza, G.
[۷] Greco, D.
[۸] Bryce, R. A.
[۹] Fedri, V.
[۱۰] Serena, L.
[۱۱] Neumann, B. H.
[۱۲] Bryce, R. A.
[۱۳] Fedri, V.
[۱۴] Serena, L.

تامکینسون [15] در سال ۱۹۹۷ [۱۶]، نشان داد $۳۶ \leq f(۶) \leq ۳۸۴$.

و عبداللهی، جعفریان امیری، عطایی و محمدی حسن آبادی در سال ۲۰۰۵ [۱]، توانستند مقدار دقیق $f(۶)$ را محاسبه کنند. همچنین ایشان ساختار گروه‌هایی که دارای یک ۶− پوشش ماکسیمال تقلیل ناپذیر با اشتراک هسته آزاد هستند را رده‌بندی کردند.

در این رساله یکی از مباحث اصلی ما، بررسی و مطالعه گروه‌هایی است که دارای یک ۶− پوشش ماکسیمال تقلیل ناپذیر با اشتراک هسته آزاد می‌باشند و در طی آن نشان می‌دهیم $f(۶) = ۳۶$.

---

[۱۵] Tomkinson, M. J

فصل ۱

مقدماتی از نظریه گروه‌ها

۱.۱ تعاریف و پیش نیازها

در این فصل برخی از مفاهیم مقدماتی نظریه گروه‌ها را مرور خواهیم کرد، علاوه بر آن با اصطلاحات، نمادها و مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های آتی نیز آشنا خواهیم شد.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم n عدد صحیح ثابتی باشد، همنهشتی به پیمانه n یک رابطه هم ارزی بر گروه جمعی Z است. فرض کنیم Z_n مجموعه رده‌های این هم‌ارزی روی Z باشد در این صورت Z_n با عمل $a \oplus b = \bar{a} + \bar{b}$ تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد.

تعریف ۲.۱.۱ مجموعه $G = \{e, a, b, ab\}$ با روابط $a^{۲} = b^{۲} = e$ و $ab = ba$ یک گروه از مرتبه ۴ است و گروه چهارتایی کلاین نامیده می‌شود. این گروه را معمولاً با V یا $K_{۴}$ نشان می‌دهیم. نکات زیر در مورد این گروه برقرار است:

الف. $K_{۴}$ دارای تنها ۳ زیرگروه نابدیهی به قرار $H_{۱} = \{e, a\}$ و $H_{۲} = \{e, b\}$ و $H_{۳} = \{e, ab\}$ می‌باشد.

ب. $K_{۴}$ دوری نیست ولی هر سه زیرگروه آن دوری است.

ج. K_4 باگروه $Z_2 \oplus Z_2$ یکریخت است.

نکته ۳.۱.۱ به سادگی ثابت می‌شود که تنها دو گروه از مرتبه ۴ وجود دارد یکی گروه Z_4 و دیگری گروه K_4.

تعریف ۴.۱.۱ هرگاه $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ باشد در این صورت مجموعه تمام توابع دو سویی از مجموعه A به A، با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهد که آن را گروه متقارن از درجه n می‌نامیم و به صورت S_n نشان می‌دهیم. عناصر S_n را جایگشت نامیده و به سادگی دیده می‌شود که مرتبه S_n برابر $n!$ است.

تعریف ۵.۱.۱ مجموعه تمام جایگشت‌های زوج S_n تشکیل یک گروه از مرتبه $\frac{n!}{2}$ می‌دهد این گروه را با A_n نشان داده و آن را گروه متناوب از درجه n می‌نامیم.

قضیه ۶.۱.۱ گروه متناوب A_n برای $n \geq 5$، یک گروه ساده است و به علاوه این گروه تنها زیرگروه نرمال نابدیهی S_n است.

تعریف ۷.۱.۱ گروه تعریف شده با مولدهای a، b و روابط $a^n = b^2 = (ab)^2 = e$ و $ba = a^{-1}b$ گروه دو وجهی D_n است و از مرتبه $2n$ می‌باشد. لذا $D_n =< a, b >= \{a^i b^j \mid 0 \leq i < n; j = 0, 1\}$

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم $G = \{\mp 1, \mp i, \mp j, \mp k\}$ باشد که در آن $-1 = i^2 = j^2 = k^2$ و $i^4 = j^4 = k^4 = 1$ و $ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$، در این صورت G تشکیل یک گروه غیر آبلی می‌دهد این گروه معروف به گروه چهارگان‌ها نیز می‌باشد و آن را بانماد Q_8 هم نشان می‌دهند این گروه دارای خاصیت‌های زیر می‌باشد:

الف. Q_8 دارای سه زیرگروه غیر بدیهی $H_1 =< i >$ و $H_2 =< j >$ و $H_3 =< k >$ می‌باشد.

ب. تمام زیرگروه‌های Q_8، درآن نرمال هستند ولی Q_8 گروهی غیر آبلی است.

ج. $Q_8 =< a, b >$ که $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ و $b = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

تعریف ۹.۱.۱ گروه G را موضعاً دوری گویند هرگاه هر زیرگروه تولید شده با متناهی عنصر آن یک گروه دوری باشد.

لم ۱۰.۱.۱ فرض کنید G یک گروه موضعاً دوری باشد، در این صورت هر گروه خارج قسمتی G که متناهی باشد دوری است [۱۴].

اثبات . فرض کنیم K یک زیرگروه نرمال از G باشد به‌طوری که $|\frac{G}{K}| = n$. لذا $\frac{G}{K} = \{g_1K, \cdots, g_nK\}$، در این صورت $G = K < g_1, \cdots, g_n >$. چون G موضعاً دوری است بنابراین یک $g \in G$ وجود دارد به‌طوری که $< g >=< g_1, \cdots, g_n >$. لذا $\frac{G}{K} = \frac{K<g_1,\cdots,g_n>}{K} = \frac{K<g>}{K} = \frac{<g>}{<g>\cap K}$. بنابراین $\frac{G}{K}$ دوری است. $\square$

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید G یک گروه باشد و $a \in G$، در این صورت $i_a : G \to G$ که $i_a(g) = gag^{-1}$ را خود ریختی درونی متناظر با a از G گویند و مجموعه تمام خود ریختی‌های درونی G را با $Inn(G) = I(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۲.۱.۱ اگر G یک گروه باشد، آن‌گاه $Z(G) \lhd G$ و $\frac{G}{Z(G)} \cong Inn(G)$.

قضیه ۱۳.۱.۱ فرض کنید H و K زیرگروه‌هایی از G باشند به‌طوری که $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$، دراین صورت:

الف. اگر H، K متناهی باشند آن‌گاه $|HK| = \frac{|H||K|}{|H\cap K|}$ و $|HK| = |K||H : H \cap K|$.

ب. $|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|$ و اگر $|G : H|$ و $|G : K|$ متناهی و نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه تساوی در رابطه اخیر رخ می‌دهد.

ج. HK یک زیرگروه G است اگر و تنها‌اگر $HK = KH$.

قضیه ۱۴.۱.۱ تنها دو گروه غیر آبلی از مرتبه ۸ وجود دارد: گروه Q_8 و گروه دو وجهی D_4.

اثبات . $Q_8 \ncong D_4$ زیرا اگر

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

$$D_4 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

آن‌گاه عناصر از مرتبه ۲ در گروه Q_8 و D_4 به ترتیب عبارتنداز: $1 \mp$ و $e, a^2, b, ab, a^2b, a^3b$ یعنی Q_8 دارای ۲ عضو و D_4 دارای ٦ عضو از مرتبه ۲ می‌باشند. هرگاه گروه G از مرتبه ۸ و غیر آبلی باشد آن‌گاه نمی‌تواند عنصری از مرتبه ۸ داشته یا مرتبه هر عنصر غیر همانی آن ۲ باشد [۱۰]. از این رو G شامل عنصری مانند a از مرتبه ۴ است. گروه $< a >$ با شاخص ۲ در G نرمال است. عنصر $b \in < a >$ را اختیار می‌کنیم. پس $b^2 \in < a >$ لذا b^2 برابر با یکی از عناصر e, a, a^2, a^3 می‌باشد اگر b^2 برابر a یا a^3 باشد، آن‌گاه $b^8 = e$. و این غیر ممکن است. لذا b^2 برابر e یا a^2 است. از طرفی برای هر $b \in G$، $bab^{-1} \in < a >$. لذا bab^{-1} برابر یکی از عناصر e, a, a^2, a^3 می‌باشد. به سادگی دیده می‌شود که $bab^{-1} = a^3 = a^{-1}$ یعنی $ba = a^{-1}b$ است. پس نتیجه می‌شود که هر عنصر G را می‌توان به شکل $b^i a^j$ نوشت. از این رو $G = < a, b >$. در یک حالت $|a| = 4, b^2 = a^2, ba = a^{-1}b$ که بنا به ۱۰.۱.۱، $G \cong Q_8$.

در حالت دیگر، $|a| = 4, |b| = 2, ba = a^{-1}b$ که بنا به ۹.۱.۱، $G \cong D_4$. □

تعریف ۱۵.۱.۱ گروه G را متناهی مولد نامیم هرگاه زیرمجموعه‌ای متناهی مانند X داشته باشد به‌طوری که $G = < X >$. در این صورت هر یک از اعضای X را یک مولد G می‌نامیم. گروه G را دوری گوییم هرگاه G با یک عضو تولید شود.

لم ۱٦.۱.۱ هر گروه دوری آبلی است.

قضیه ۱۷.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه دوری باشد. در این صورت:

الف. اگر G نامتناهی باشد، آن‌گاه G با گروه جمعی Z یکریخت است.

ب. اگر G متناهی با n عنصر باشد، آن‌گاه G با گروه جمعی Z_n یکریخت است.

قضیه ۱۸.۱.۱ فرض کنید $G =< a >$ گروهی دوری باشد. هرگاه G نامتناهی باشد، آن‌گاه a و a^{-1} تنها مولدهای G هستند. هرگاه G متناهی و از مرتبه m باشد آن‌گاه a^k یک مولد G است اگر و تنها‌اگر $(k, m) = 1$.

لم ۱۹.۱.۱ همه زیرگروه‌ها و گروه‌های خارج قسمتی از هر گروه دوری، دوری هستند.

قضیه ۲۰.۱.۱ اگر G یک گروه دوری از مرتبه n باشد، آن‌گاه به ازای هر s، که $s \mid n$، G تنها دارای یک زیرگروه H از مرتبه s است. همچنین H دوری و $\frac{G}{H}$ نیز دوری از مرتبه $\frac{n}{s}$ است.

لم ۲۱.۱.۱ هرگاه G گروهی متناهی و از مرتبه عدد اول p باشد، آن‌گاه G گروه دوری است.

قضیه ۲۲.۱.۱ اگر $\frac{G}{Z(G)}$ دوری باشد، آن‌گاه G آبلی است.

قضیه ۲۳.۱.۱ هرگاه G گروهی متناهی و H یکی از زیرگروه‌های G باشد، آن‌گاه مرتبه H، مرتبه G را عاد می‌کند.

قضیه ۲۴.۱.۱ فرض کنیم G گروهی متناهی و از مرتبه pq باشد که p و q اعداد اول هستند و $p > q$، آن‌گاه G نمی‌تواند بیش از یک زیرگروه از مرتبه p داشته باشد.

لم ۲۵.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $p \mid |G|$. در این صورت G عضوی از مرتبه p دارد.

تعریف ۲۶.۱.۱ گروه آبلی G را مقدماتی گوییم اگر عدد اولی مثل p وجود داشته باشد به طوری که برای هر $g \in G$، $g^p = 1$.

تعریف ۲۷.۱.۱ اگر H یک زیرگروه G باشد، شاخص H در G عبات است از تعداد همدسته‌های راست(چپ) متمایز H در G. و آن را با نماد $i(H)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۸.۱.۱ زیرگروه N از G را یک زیرگروه نرمال G نامیم، هرگاه به ازای هر $g \in G$ و هر $n \in N$، $gng^{-1} \in N$.

قضیه ۲۹.۱.۱ هرگاه G گروهی دلخواه و N یک زیرگروه نرمال G باشد، آن‌گاه $\frac{G}{N}$ نیز یک گروه است و آن را گروه خارج قسمتی G بر N می‌نامند.

نکته ۳۰.۱.۱ اگر G گروهی متناهی و N زیرگروه نرمال آن باشد، آن‌گاه $|\frac{G}{N}| = \frac{|G|}{|N|}$.

قضیه ۳۱.۱.۱ هرگاه H یک زیرگروه و N یک زیرگروه نرمال G باشد، آن‌گاه $H \cap N$ یک زیرگروه نرمال H است.

لم ۳۲.۱.۱ هرگاه N زیرگروه نرمال و H یک زیرگروه دلخواه G باشد، آن‌گاه NH زیرگروه G است.

قضیه ۳۳.۱.۱ هرگاه N یک زیرگروه G و $|G:N| = ۲$ باشد، آن‌گاه N در G نرمال است.

قضیه ۳۴.۱.۱ هرگاه H و K زیرگروه‌های نرمال G باشند، آن‌گاه $|H:K| \leq H \cap K$.

تعریف ۳۵.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. H را یک زیرگروه مشخصه[۱] G گوییم در صورتی که به ازای هر خود ریختی G مانند τ، $H\tau \leq H$ باشد. به ویژه هر زیرگروه مشخصه، نرمال هم هست. [۹]

[۱] characteristic subgroup

قضیه ۳۶.۱.۱ فرض کنیم $S = \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x,y \in G\}$. در این صورت زیرگروه تولید شده توسط S را زیرگروه تعویض‌گر G نامیده و آن را با G' نشان می‌دهیم.($G' =< S >$) آن‌گاه:

الف. $G' \lhd G$.

ب. گروه $\frac{G}{G'}$، آبلی است.

ج. گروه $\frac{G}{N}$ آبلی است اگر و تنهااگر $G' \subseteq N$.

د. گروه G آبلی است اگر و تنهااگر $G' = 1$.[۲۰]

نکته ۳۷.۱.۱ $Z(G)$ و G' همواره زیرگروه مشخصه G هستند. [۲۰]

تعریف ۳۸.۱.۱ گروه غیر بدیهی G را مشخصاً ساده گوییم، هرگاه تنها زیرگروه‌های مشخصه آن، ۱ و G باشند. به وضوح گروه‌های ساده در این تعریف صدق می‌کنند. [۱۴]

لم ۳۹.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد، آن‌گاه G مشخصاً ساده است اگر و تنهااگر مقدماتی باشد. [۱۴]

تعریف ۴۰.۱.۱ فرض کنیم H زیرگروه G باشد. قرار می‌دهیم $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$. در این صورت $N(H)$ را نرمال‌ساز H در G نامیده و دارای خاصیت‌های زیر می‌باشد:

الف. $N(H)$ زیرگروه G است.

ب. H در $N(H)$ نرمال است.

ج. H در G نرمال است اگر و تنهااگر $N(H) = G$.

د. $N(H)$ بزرگ‌ترین زیرگروه G است که H در آن نرمال می‌باشد.

تعریف ۴۱.۱.۱ فرض کنیم $x \in G$ باشد. دراین صورت مجموعه $C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$ یک زیرگروه G است و آن را مرکزساز x در G می‌نامند. واضح است که $Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x)$.

تعریف ۴۲.۱.۱ هرگاه $H \leq G$ باشد، آن‌گاه $C_G(H) = \{g \in G : gh = hg\}$ را مرکزساز H در G نامیم و $Z(G) \leq C_G(H) \leq G$.

لم ۴۳.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه و H, K زیرگروه‌های G باشند، در این صورت:

الف. $C(H) \leq N(H)$.

ب. اگر $H \leq K$ آن‌گاه $C_K(H) = C_G(H) \cap K$.

ج. $H \leq Z(G)$ اگر و تنهااگر $G = C_G(H)$.

د. H آبلی است اگر و تنهااگر $H \leq C_G(H)$.

قضیه ۴۴.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه و $H \leq G$. دراین صورت:

الف. $C_G(H) \lhd N_G(H)$.

ب. $\frac{N_G(H)}{C_G(H)} \hookrightarrow Aut(H)$.

این قضیه معروف به قضیه نرمال‌ساز ـمرکزساز می‌باشد.[۱۴]

لم ۴۵.۱.۱ برای هر گروه G:

الف. $Aut(G)$ گروهی آبلی‌است.

ب. اگر $|G| = p$، آن‌گاه $|Aut(G)| = p - ۱$. [۱۴]

نکته ۴۶.۱.۱ $Aut(Z_۲ \times Z_۲) \cong S_۳$.[۱۴]

لم ۴۷.۱.۱ اگر G گروهی متناهی و p کوچک‌ترین عدد اولی باشد که مرتبه G را عاد می‌کند. در این صورت اگر H زیرگروهی از G با شاخص p باشد، آن‌گاه $H \lhd G$.

قضیه ۴۸.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه آبلی و $N \leq G$ باشد، لذا N در G نرمال است. و به علاوه هرگاه $\frac{G}{N}$ دوری باشد، آن‌گاه G آبلی است.

تعریف ۴۹.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه غیربدیهی باشد و M زیرگروه سره G باشد. M را یک زیرگروه ماکسیمال G نامیم در صورتی که از $M \leq L \leq G$ نتیجه شود $L = M$ یا $L = G$.

نکته ۵۰.۱.۱ گروه‌های متناهی غیر بدیهی، همواره دارای زیرگروه ماکسیمال هستند و هر زیرگروه سره مشمول در حداقل یک زیرگروه ماکسیمال است.

قضیه ۵۱.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد. اگر G غیر بدیهی باشد، آن‌گاه هر زیرگروه ماکسیمال G از شاخص عدد اول است.

لم ۵۲.۱.۱ هرگاه H و K دو زیرگروه نرمال ماکسیمال سره G باشند، آن‌گاه $H \cap K$ یک زیرگروه نرمال ماکسیمال سره H و K است.

قضیه ۵۳.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه متناهی غیر بدیهی باشد:

الف. اگر $M \leq G$ و $|G : M| = p$، آن‌گاه M زیرگروه ماکسیمال G است.

ب. G تنها یک زیرگروه ماکسیمال دارد اگر و تنهااگر G یک گروه دوری از مرتبه p^m باشد که p اول است و $m \in N$.

تعریف ۵۴.۱.۱ فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد و $N_1, N_2, \cdots, N_m$، زیرگروه‌های نرمال G با دو خاصیت زیر باشند:

الف. $G = N_1 N_2 \cdots N_m$.

ب. هرگاه $g \in G$ باشد، آن‌گاه g را می‌توان به صورت منحصربه‌فردی به صورت $g = n_1 n_2 \cdots n_m$ نوشت که

در آن هر $m_i \in N_i$.

در این صورت می‌گوییم G حاصل ضرب مستقیم داخلی [۲] $N_۱, N_۲ \cdots N_m$ است. [۹]

لم ۵۵.۱.۱ اگر G حاصل ضرب مستقیم داخلی $N_۱, N_۲, \cdots N_m$ باشد، در این صورت به ازای هر $i \neq j$، $N_i \cap N_j = ۱$ و عناصر N_i و N_j با هم جابه‌جا می‌شوند.[۹]

تعریف ۵۶.۱.۱ فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد و $N_۱, N_۲, \cdots N_m$، زیرگروه‌های نرمال G باشند به طوری که:

الف. $G = N_۱ N_۲ \cdots N_m$.

ب. به ازای هر i که $۱ \leq i \leq m$، $N_i \cap (N_۱ \cdots N_{i-۱} N_{i+۱} \cdots N_m) = ۱$.

در این صورت $G \cong N_۱ \times N_۲ \cdots \times N_m$. و می‌گوییم G حاصل ضرب مستقیم خارجی [۳] $N_۱, N_۲, \cdots N_m$ است و آن را با نماد $G = N_۱ \oplus N_۲ \cdots \oplus N_m$ هم نشان می‌دهیم. [۲۰]

لم ۵۷.۱.۱ هرگاه H و K، زیرگروه‌های G باشند به‌طوری که $G = HK$ و $H \cap K = ۱$. و همچنین عناصر H و K با هم جابه‌جا شوند، آن‌گاه $G = H \times K$. [۱۴]

لم ۵۸.۱.۱ برای هر گروه H و K، $H \times K \cong K \times H$.[۱۴]

لم ۵۹.۱.۱ گروه $H \times K$ آبلی است اگر و تنهااگر H و K هر دو، آبلی باشند. [۱۴]

لم ۶۰.۱.۱ اگر دو گروه H و K دوری و از مرتبه متناهی باشند، آن‌گاه $H \times K$ دوری است اگر و تنهااگر $(|H|, |K|) = ۱$.[۱۴]

---

[۲] internal direct product

[۳] external direct product

قضیه ۶۱.۱.۱ هر گروه آبلی متناهی، حاصل ضرب مستقیم زیرگروه‌های دوری خود می‌باشد.[۹]

لم ۶۲.۱.۱ هرگاه m عدد صحیح مثبتی باشد و $m = p_1^{n_1} \cdots p_t^{n_t}$ که P_i ها اعداد اول متمایز هستند و $n_i > 0$، آن‌گاه $Z_m = Z_{p_1^{n_1}} \cdots Z_{p_n^{n_t}}$.

قضیه ۶۳.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد، $H \leq G$ و $K \lhd G$. در این صورت $H \cap K \lhd H$ و $\frac{HK}{K} \cong \frac{H}{H \cap K}$.

قضیه ۶۴.۱.۱ اگر H و K زیرگروه‌های نرمال G باشند، آن‌گاه $\frac{HK}{H\cap K} \cong \frac{H}{H\cap K} \times \frac{K}{H\cap K}$.

اثبات . تابع $f : \frac{H}{H\cap K} \times \frac{K}{H\cap K} \to \frac{HK}{H\cap K}$ با ضابطه $f(h(H\cap K), k(H\cap K) = hk(H\cap K)$، را در نظر می‌گیریم. به وضوح f یک یکریختی است. □

قضیه ۶۵.۱.۱ اگر H و K در G نرمال باشند، آن‌گاه $H \cap K \lhd G$ و $\frac{G}{H\cap K} \cong \frac{G}{H} \times \frac{G}{K}$.[۱۴]

تعریف ۶۶.۱.۱ فرض کنیم K یک زیرگروه نرمال G باشد. هرگاه یک زیرگروه H از G وجود داشته باشد به طوری که $G = HK$ و $H \cap K = 1$، آن‌گاه G را حاصل ضرب نیم مستقیم [۴] داخلی H و K گوییم و آن را با نماد $G = H \ltimes K$ نشان می‌دهیم. [۱۳]

تعریف ۶۷.۱.۱ با توجه به تعریف فوق، هرگاه $f : H \to K$ یک همریختی باشد. مجموعه $H \times K$ با عمل زیر تشکیل یک گروه می‌دهد:

$$(h, k)(h', k') = (hh', (kf(h'))k')$$

دراین صورت $G = H \times K$ را حاصل ضرب نیم مستقیم خارجی H و K با عمل f می‌نامیم و آن را با نماد $G = H \ltimes_f K$ نشان می‌دهیم. [۱۳]

[۴] semidirect product