دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

گراف های جابه جایی و ناجابه جایی گروه های متناهی

تحقیق و نگارش:

علیرضا کیوان

اساتید راهنما:

دکتر عباس جعفرزاده
دکتر سید مجید جعفریان امیری

مهر ۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

به پاس تقدیر عظیم انسانی شان از کلمه ایثار، به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است، به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این رساله را تقدیم می کنم به پدر و مادر عزیزم.

تقدیر و تشکر

خداوند بزرگ را شاکرم که لطف بی پایانش همواره شامل حال من بوده است از خانواده عزیزم بویژه همسر مهربانم که همیشه همراه و پشتیبان من بوده اند بی نهایت سپاسگزارم. از اساتید راهنمای عزیزم جناب آقایان دکتر عباس جعفرزاده و سید مجید جعفریان امیری که از راهنمایی های ایشان بسیار بهره برده ام سپاسگزارم.

در پایان از پدر و مادر عزیزم که همواره در دوران تحصیل و مراحل مختلف زندگی مشوق و پشتیبان اینجانب بودند سپاسگزارم.

علیرضا کیوان

مهر ۱۳۹۱

چکیده

گراف جابه‌جایی Γ_G از گروه غیرآبلی G را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$G \setminus Z(G)$ مجموعه رئوس $\Gamma(G)$ است جائیکه $Z(G)$ مرکز G است و دو راس x, y مجاورند هرگاه $xy = yx$ و گراف ناجابه‌جایی $\bigtriangledown(G)$ از G را به شکل زیر تعریف می‌کنیم. رئوس آن $G \setminus Z(G)$ است و دو راس x, y با یالی به هم وصل می‌شوند هرگاه $xy \neq yx$.

در پایان نیز قطر گراف جابه‌جایی حاصل‌ضرب بعضی گروه‌ها را بررسی خواهیم کرد.

کلمات کلیدی: گراف جابجایی، عدد خوشه، عدد استقلال، اندازه پوششی، محیط.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

پیشگفتار

مطالعه ساختارهای جبری با استفاده از خواص گراف یک موضوع پرطرفدار در ۲۰ سال اخیر بوده است که موجب سوالات و نتایج بسیاری شده است. مقاله‌های زیادی در مورد تخصیص یک گراف به گروه و حل و بررسی خواص جبری حلقه یا گروه با استفاده از گراف نسبت داده شده نوشته شده است.

در پایان نامه حاضر به هر گروه غیرآبلی G گراف جابه‌جایی $\Gamma(G)$ و گراف ناجابه‌جایی $\bigtriangledown(G)$ را به روش ذیل نسبت می‌دهیم و خواص مسیری آن گروه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم؛ و قطر حاصلضرب جابجایی بعضی گروه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$G \setminus Z(G)$ را رئوس $\Gamma(G)$ در نظر می‌گیریم جائی که $Z(G)$ مرکز گروه G است و دو راس متمایز x, y را هرگاه $xy = yx$ باشد به هم وصل می‌کنیم.

$G \setminus Z(G)$ را رئوس $\bigtriangledown(G)$ در نظر می‌گیریم جائی که $Z(G)$ مرکز گروه G است و دو راس متمایز x, y را هرگاه $xy \neq yx$ باشد به هم وصل می‌کنیم.

گراف جابه‌جایی Γ_G اولین بار توسط اردوش [1] به‌صورت سوال زیر مطرح شد. " اگر G گروهی باشد که گراف جابه‌جایی آن هیچ زیرگراف کامل نامتناهی نداشته باشد آیا کران متناهی روی اندازه زیرگراف‌های القای کامل از Γ_G وجود دارد؟"

بی.اچ.نیومن [2] در سال ۱۹۷۲ به این سوال پاسخ مثبت داد و بدین ترتیب سوال اردوش و جواب نیومن سرآغاز سوالات مشابه بسیاری بود و افراد زیادی سوالهای متنوعی که مشابه به آن بودند را ارائه دادند.

---

[1] Paul Erdös

[2] B.H.Neu-mann

فصل ۱

گراف‌های جابه‌جایی

۱.۱ تعاریف

گروه

تعریف ۱.۱.۱. گروه G متناهی (یا از مرتبه متناهی) نامیده می‌شود اگر دارای تعدادی متناهی عضو باشد، در این حالت، تعداد عناصر G را مرتبه G نامیده و با $|G|$ نمایش می‌دهیم. یک گروه با تعداد نامتناهی عضو را از مرتبه نامتناهی می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. $D_{2n} =< a, b | b^2 = a^n = 1, b^{-1}ab = a^{-1} >$ را گروه دووجهی از مرتبه $2n$ می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. هر تابع دوسویی روی مجموعه A را یک جایگشت روی A می نامیم. مجموعه همه جایگشت‌های روی A را با S_A نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۱.۱. *اگر A یک مجموعه غیرتهی باشد، آنگاه S_A با عمل ترکیب جایگشت‌ها یک گروه تشکیل می‌دهد.*

اثبات. به مرجع [۲۱] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۱.۱. اگر A متناهی و دارای n عنصر یعنی $A = \{1, 2, ..., n\}$ باشد، در این‌صورت S_A را گروه متقارن از درجه n نامیده و به‌صورت S_n می‌نویسیم.

تعریف ۶.۱.۱. مجموعه تمام جایگشت‌های زوج در S_n را که با نماد A_n نشان می‌دهیم را گروه متناوب از درجه n می‌نامیم.

قضیه ۷.۱.۱. *مرتبه گروه S_n برابر با $n!$ و مرتبه گروه A_n برابر $\frac{n!}{۲}$ است.*

اثبات. به مرجع [۲۱] مراجعه شود. $\square$

تذکر ۸.۱.۱. مجموعه تمام ترانهش‌ها در S_n را با T_n نشان می‌دهیم.

مثال ۹.۱.۱. برای گروه $S_۴$ داریم:

$$S_۴ = \{(۱۲), (۱۳), (۱۴), (۲۳), (۲۴), (۳۴), (۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴), (۱۴)(۲۳)\}.$$

توجه: هر عنصر S_n را یک جایگشت نامیده و معمولاً با حروف $\sigma, \mu, ...$ به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\sigma = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & \dots & n \\ \sigma(۱) & \sigma(۲) & \sigma(۳) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

وارون عناصر در S_n :

فرض کنید $\sigma \in S_n$. چون S_n گروه است پس $\sigma^{-۱} \in S_n$ و

$$\sigma^{-۱} = \begin{pmatrix} \sigma(۱) & \sigma(۲) & \sigma(۳) & \dots & \sigma(n) \\ ۱ & ۲ & ۳ & \dots & n \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. برای هر $\sigma \in S_n$، $supp(\sigma)$ عبارت است از مجموعه تمام حروف $k \in \{۱, ۲, ..., n\}$ که $\sigma(k) \neq k$. اگر σ در S_n دوری باشد در این صورت طول σ را با $l(\sigma)$ نشان می‌دهیم که برابر است با $|supp\sigma|$.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید G گروهی متناهی و $S \subseteq G$ زیرمجموعه غیرآبلی و ناتهی G باشد به‌طور معمول $Z(S)$ را همان مرکز S به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Z(S) = \{x \in S : xa = ax, \forall x \in S\}.$$

برای هر $x \in S$، مرکزساز x در S را با نماد $C_S(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت

$$C_S(x) = \{y \in S : xy = yx\}$$

تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۱۲. (*قضیه اول یکریختی*) *اگر* $f : G_1 \to G_2$ *یک همریختی از گروه* G_1 *به گروه* G_2 *باشد، آنگاه*

$$ker f = \{g_1 \in G_1 | f(g_1) = e\}$$

زیرگروه نرمال G *می‌باشد، همچنین داریم*

$$\frac{G_1}{ker f} \cong Im(f)$$

.

اثبات. به مرجع [۲۰] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۱۳. گروه G را که مرتبه هر عضو آن توانی از عدد اول p باشد یک p -گروه نامند.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید G گروهی متناهی و $|G| = p^n m$ ، p عددی اول و $(m, p) = 1$ در این صورت هر زیرگروه مرتبه p^n از G یک سیلو p-زیرگروه G نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۱.۱۵. (*قضیه اول سیلو*) *فرض کنید* G *گروهی متناهی از مرتبه* $p^n.m$ *باشد که در آن* p *اول بوده و* $p \nmid m$ *. در این صورت* G *زیرگروهی از مرتبه* p^n *دارد و نیز برای هر* $i = 1, 2, ..., n$ *گروه* G *حداقل دارای یک زیرگروه از مرتبه* p^i *خواهد بود.*

اثبات. به مرجع [۲۲] مراجعه شود. □

قضیه ۱.۱.۱۶. (*قضیه دوم سیلو*) *فرض کنید* G *گروهی متناهی و عدد اول* p *مرتبه* G *را عاد کند. آنگاه همه* p*- زیرگروه سیلوهای* G *مزدوج یکدیگرند.*

اثبات. به مرجع [۲۲] مراجعه شود. □

قضیه ۱.۱.۱۷. (*قضیه سوم سیلو*) *فرض کنید* G *گروهی متناهی باشد بطوریکه عدد اول* p *مرتبه* G *را عاد می‌کند در این صورت تعداد زیرگروه‌های* G *از مرتبه* p^n *(تعداد* p *سیلو زیرگروه‌های* G*) برابر* $kp + 1$ *بوده که مرتبه* G *را نیز عاد می‌کند.*

اثبات. به مرجع [۲۲] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنیم F یک میدان و n عدد طبیعی باشد. مجموعه همه ماتریسهای معکوس‌پذیر $n \times n$ را که درایه‌های هر یک از آنها در F اند، با $GL(n, F)$ نمایش می‌دهیم. هر عضو $GL(n, F)$ را

معمولاً به صورت $A = (a_{ij})$ می‌نویسیم که در آن a_{ij} درایه واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس A است. معلوم است که دترمینان هر عضو $GL(n, F)$ ناصفر است. $GL(n, F)$ با عمل ضرب ماتریسها تشکیل یک گروه می‌دهد. گروه $GL(n, F)$ را گروه خطی عام (از درجه n بر F) نامند.

تعریف ۱.۱.۱۹. مجموعه همه اعضایی از $GL(n, F)$ که دترمینان هر یک از آنها برابر ۱ (عضو واحد میدان F) است زیرگروهی از $GL(n, F)$ است. این زیرگروه را با $SL(n, F)$ نشان می‌دهند و آن را گروه خطی خاص می‌نامند.

لم ۱.۱.۲۰. *الف) تنها دو کلاس تزویج از عناصر مرتبه ۶ در $SL(۲, ۳)$ موجود است و اگر g عنصری از مرتبه ۶ باشد در این صورت g , $g^{-۱}$ در دو کلاس تزویج مختلف قرار می‌گیرند.*

ب) تنها یک کلاس تزویج از عناصر مرتبه ۴ در $SL(۲, ۳)$ موجود است.

ج) اگر $g \in SL(۲, ۳)$ دارای مرتبه ۴ یا ۶ باشد در اینصورت $C_{SL(۲,۳)}(g) =< g >$.

اثبات. به مرجع [۱۹] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۲۱. فرض کنید G یک گروه و $\{G_i\}_{۱\leq i\leq n}$ خانواده‌ای متناهی از زیرگروه‌های G باشد. G حاصلضرب مستقیم خارجی خانواده فوق یا حاصلضرب مستقیم داخلی G_i ها نامیده می‌شود هرگاه

الف) $G_i \trianglelefteq G$ به ازای تمام $۱ \leq i \leq n$

ب) هر عضو $g \in G$ به طور یکتایی به شکل $g = g_۱g_۲...g_n$ نوشته شود $(g_i \in G_i, ۱ \leq i \leq n)$

تعریف ۱.۱.۲۲. فرض کنیم G یک گروه دلخواه وHیک گروه جایگشتی روی مجموعه Ω باشد (یعنی روی مجموعه Ω عمل می کند)در این صورت حاصلضرب حلقوی $H \wr K$ عبارت است از مجموعه تمام زوج های مرتب (f, k) به طوری که $f, k \in K$ نگاشتی از Ω به گروه H است.

قضیه ۱.۱.۲۳. *حاصلضرب حلقوی $H \wr K$ با قانون زیر یک گروه است $(f_۱, k_۱)(f_۲, k_۲) = (g, k_۱k_۲)$ به طوریکه $g : \Omega \longrightarrow H$ نگاشتی است با ضابطه $g(i) = f_۱(i)f_۲(i^{k_۱})$ به ازای تمام $i \in \Omega$ ها. گروه $H \wr K$ را حاصلضرب حلقوی گروه H توسط K می‌نامیم.*

گراف

تعریف ۱.۱.۲۴. یک گراف Γ، عبارت است از یک زوج $(V(\Gamma), E(\Gamma))$ که در آن $V(\Gamma)$ یک مجموعه متناهی ناتهی از رئوس و $E(\Gamma)$ خانواده‌ای متناهی از زوج‌های نامرتب از اعضای $V(\Gamma)$ به نام یالهاست.

تعریف ۲۵.۱.۱. تعداد راس‌های یک گراف Γ را مرتبه Γ می‌نامیم و با $n(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. دو راس ν, ω از گراف Γ را مجاور گوئیم هرگاه یالی بین آن دو وجود داشته باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱. یک یال از یک راس به خودش را طوقه می‌نامیم.

تعریف ۲۸.۱.۱. زیرگراف همبندی که زیرگراف هیچ زیرگراف همبندی دیگر نیست را زیرگراف همبند ماکسیمال نامیم.

تعریف ۲۹.۱.۱. اگر بین دو راس بیش از یک یال موجود باشد، آن یال‌ها را یال‌های چندگانه می‌نامیم.

تعریف ۳۰.۱.۱. در گراف $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ اگر $E(\Gamma)$ خانواده‌ای متناهی از زوج‌های مرتب از اعضای $V(\Gamma)$ باشد، گراف $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ را گراف جهتدار می‌نامیم.

تعریف ۳۱.۱.۱. گراف بدون جهت، بدون طوقه و بدون یال چندگانه را گراف ساده گوئیم.

تذکر ۳۲.۱.۱. همه گراف‌ها در این رساله ساده هستند.

تعریف ۳۳.۱.۱. یک زیرگراف القایی از Γ_1 زیرگرافی مانند Γ_2 است به طوریکه هر یال Γ_1 با دو انتها در $V(\Gamma_2)$، متعلق به $E(\Gamma_2)$ باشد.

تعریف ۳۴.۱.۱. فرض کنید $k > 0$ عدد صحیحی باشد، یک k-رنگ آمیزی راسی از یک گراف Γ تخصیص دهی k رنگ به راسهای Γ است به طوریکه دو راس مجاور هم نباشند. عدد رنگی راس یک گراف Γ، $\chi(\Gamma)$ کمترین k ای است که Γ یک k رنگ آمیزی راسی داشته باشد.

تعریف ۳۵.۱.۱. دو گراف $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ و $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ را یکریخت گوئیم (می‌نویسیم $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$) هرگاه نگاشت یک‌به‌یک و پوشایی چون

$$\varphi : V_1 \longmapsto V_2$$

وجود داشته باشد که برای هر $u, v \in V_1$

$$u \sim v \Longleftrightarrow \varphi(u) \sim \varphi(v)$$

نگاشت φ را یکریختی گرافی می‌نامیم. توجه می‌کنیم که برای گراف‌های یکریخت Γ_1, Γ_2، $|V_1| = |V_2|$ و برای هر $v \in V_1$، $d(v) = d(\varphi(v))$ خواهد بود.

تعریف ۳۶.۱.۱. یک گراف $\Gamma = (V, E)$ یک گراف k -بخشی است ($k > ۱$) هرگاه V به k زیرمجموعه ی $V_۱, V_۲, ..., V_k$ افراز شده باشد. (که آنها را مجموعه‌های بخشی نامیم) که هر یال از E یک راس از V_i را به راسی از V_j که $j \neq i$ وصل می‌کند.

در این فصل، تمام گراف‌ها ساده، بی‌جهت بدون طوقه با یالهای چندگانه هستند. برای گراف Γ، مجموعه رئوس و یالهای Γ را به ترتیب با $V(\Gamma)$ و $E(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. تعداد رئوس را با $n(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۷.۱.۱. زیرمجموعه X از رئوس Γ، خوشه نامیده می‌شود هرگاه زیرگراف القای روی X، گراف کامل باشد. بزرگترین اندازه k از یک خوشه در گراف Γ، عدد خوشه نامیده می‌شود و با نماد $\omega(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۸.۱.۱. زیرمجموعه X از رئوس Γ، مجموعه مستقل نامیده می‌شود هرگاه زیرگراف القایی روی X هیچ یالی نداشته باشد. عدد استقلال گراف Γ، بزرگترین اندازه از یک مجموعه مستقل از رئوس بوده و با $\alpha(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳۹.۱.۱. اگر $X = \{(۱۲), (۱۳), (۲۳)\}$ گراف القا شده روی X در گروه $S_۳$ فاقد یال بوده و لذا X یک مجموعه مستقل است و داریم $\alpha(\Gamma(S_۳)) = ۴$.

تعریف ۴۰.۱.۱. یک پوشش راس از یک گراف Γ مجموعه $\varphi \subseteq V(\Gamma)$ است که شامل حداقل یک نقطه منتهی به هر یال باشد. کوچک‌ترین اندازه از یک پوشش راس را با $\beta(G)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴۱.۱.۱. *فرض کنید Γ یک گراف کامل باشد. در این صورت* $\alpha(\Gamma) + \beta(\Gamma) = n(\Gamma)$

اثبات. اگر S یک مجموعه مستقل باشد آن گاه هیچ یالی در S وجود ندارد پس هر یال متصل به حداقل یک راس از $\overline{S}$ است. برعکس اگر $\overline{S}$ همه یالها را بپوشاند آنگاه هیچ یالی میان راس‌های S نیست. از اینرو هر مجموعه مستقل ماکسیمم، مکمل یک پوشش راسی مینیمم است بنابراین $\alpha(\Gamma) + \beta(\Gamma) = n(\Gamma)$. □

تعریف ۴۲.۱.۱. دو گراف $\Gamma_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $\Gamma_۲ = (V_۲, E_۲)$ را یکریخت گوئیم (می‌نویسیم $\Gamma_۱ \cong \Gamma_۲$) اگر نگاشت یک‌به‌یک و پوشا

$$\varphi : V_۱ \longmapsto V_۲$$

وجود داشته باشد که برای هر $u, v \in V_۱$

$$u \sim v \Longleftrightarrow \varphi(u) \sim \varphi(v)$$

نگاشت φ را یکریختی گرافی می‌نامیم. توجه می‌کنیم که برای گرافهای یکریخت Γ_1, Γ_2، $|V_1| = |V_2|$ و برای هر $v \in V_1$، $d(v) = d(\varphi(v))$ خواهد بود.

تعریف ۴۳.۱.۱. یک گراف $\Gamma = (V, E)$ یک گراف K بخشی است ($K > 1$) هرگاه V به K زیرمجموعه ی $V_1, V_2, ..., V_K$ افراز شده باشد. (که آنها را مجموعه‌های بخشی نامیم) که هر یال از E یک راس از V_1 را به راسی از V_j که $j \neq i$ وصل می‌کند.

در این فصل، تمام گرافها ساده، بی‌جهت بدون طوقه با یالهای چندگانه هستند. برای گراف Γ، مجموعه رئوس و یالهای Γ را به ترتیب با $V(\Gamma)$ و $E(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. تعداد رئوس را با $n(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴۴.۱.۱. زیرمجموعه X از رئوس Γ، خوشه نامیده می‌شود هرگاه زیرگراف القای روی X، گراف کامل باشد. بزرگترین اندازه k از یک خوشه در گراف Γ، عدد خوشه نامیده می‌شود و با نماد $\omega(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴۵.۱.۱. زیرمجموعه X از رئوس Γ، مجموعه مستقل نامیده می‌شود هرگاه زیرگراف القایی روی X هیچ یالی نداشته باشد. عدد استقلال گراف Γ، بزرگترین اندازه از یک مجموعه مستقل از رئوس بوده و با $\alpha(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۴۶.۱.۱. اگر $X = \{(۱۲), (۱۳), (۲۳)\}$ گراف القا شده روی X در گروه $S_۳$ فاقد یال بوده و لذا X یک مجموعه مستقل است و داریم $\alpha(\Gamma(S_۳)) = ۴$.

تعریف ۴۷.۱.۱. یک پوشش راس از یک گراف Γ مجموعه $\varphi \subseteq V(\Gamma)$ است که شامل حداقل یک نقطه منتها به هر یال باشد. کوچکترین اندازه از یک پوشش راس را با $\beta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴۸.۱.۱. گراف جابجایی یک گروه G که با نماد $\Gamma(G)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از گراف بی‌جهت و ساده که راس‌هایش تمام عناصر غیرمرکزی G هستند و دو راس مجزا x, y مجاورند هرگاه $xy = yx$. گراف ناجابجایی از یک مجموعه از یک گروه نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

مرتبه Γ برابر $|V(\Gamma)|$ است که ماکسیمم و مینیمم درجه‌هایش را به ترتیب با $\Delta(\Gamma)$، $\delta(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴۹.۱.۱. یک گراف Γ منظم است هرگاه همه راسهایش درجه یکسانی داشته باشند.

تعریف ۵۰.۱.۱. گرافی که در آن هر جفت راس متمایز را دقیقا یک یال به هم وصل می‌کند و طوقه وجود ندارد را گراف کامل گویند.

از

تعریف ۵۱.۱.۱. یک مسیر P عبارت است از یک دنباله از رئوس مجزا $v_0v_1...v_k$ که عناصرش متناوباً مجاور هستند. در این حالت P را مسیر بین v_0v_k گویند و k را طول مسیر می‌نامند. علاوه بر آن اگر v_0, v_k در Γ مجاور باشند در این صورت $v_0v_1...v_k$ دور به طول $k+1$ نامیده می‌شود. طول کوتاهترین دور در Γ را محیط Γ نامیده و با $girth(\Gamma)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۵۲.۱.۱. گراف Γ همبند نامیده می‌شود هرگاه بین دو رأس متمایز Γ مسیری وجود داشته باشد و در غیر این صورت آن را غیرهمبند گویند.

تعریف ۵۳.۱.۱. یک مؤلفه از یک گراف، زیر گراف همبند ماکسیمالی از آن است.

تذکر ۵۴.۱.۱. اگر ω, ν رأس‌هایی در Γ باشند، آنگاه فاصله بین ω, ν را با نماد $d(\nu, \omega)$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از طول کوتاه‌ترین مسیر بین ω, ν (اگر مسیری بین آن دو وجود داشته باشد) و در غیر این صورت قرار می‌دهیم $d(\nu, \omega) = \infty$.

تعریف ۵۵.۱.۱. قطر گراف Γ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$diam(\Gamma) = max\{d(u,v) \neq \infty : u, v \text{راسهای مجزا در} \Gamma \text{هستند.}\}$$

فصل ۲

گراف جابه‌جایی گروه‌های متقارن و متناوب

گراف جابه‌جایی یک گروه G که با نماد $\Gamma(G)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از گراف بی‌سو و ساده که راس‌هایش تمام عناصر غیرمرکزی G هستند و دو راس مجزا x, y مجاورند اگر $xy = yx$. در این فصل ویژگی‌های گراف جابه‌جایی از گروه‌های متقارن و متناوب و زیرمجموعه‌های ترانهش‌ها و عناصر برگشت در گروه‌های متقارن را بررسی می‌کنیم. می‌توانیم گراف را به یک گروه یا یک زیرمجموعه از یک گروه مربوط کنیم و به راه‌های مختلفی ویژگی‌های جبری یک گروه را با استفاده از کاربردهای یک گراف بررسی کنیم.

حدس نخست: فرض کنید M یک گروه ساده و متناهی باشد. اگر G گروهی دلخواه باشد به طوری که $\Gamma(M) \cong \Gamma(G)$ در اینصورت $M \cong G$.

حدس دوم: یک عدد طبیعی مثل b وجود دارد به طوری که اگر G یک گروه غیرآبلی متناهی و $\Gamma(G)$ همبند باشد در این صورت قطر $\Gamma(G)$ کمتر یا مساوی b است یعنی $diam(\Gamma(G)) \leq b$.

۱.۲ گراف جابه‌جایی گروه‌های متقارن

برای عدد طبیعی $m > ۱$ که اول نباشد، فرض کنید g_m بزرگ ترین مقسوم علیه سره m باشد. به‌وضوح $\sqrt{m} \leq g_m < m$ و اگر $d > ۱$ یک مقسوم علیه سره m باشد $\frac{m}{d} \leq g_m$، چون $\frac{m}{d}$ نیز مقسوم علیه سره m است. (زیرا $d \geq ۱$)

قضیه ۱.۱.۲. *برای $n \geq ۳$، $\Gamma(s_n)$ همبند است اگر و تنها اگر n و $n - ۱$ اول نباشد. در این حالت* $diam(\Gamma(S_n)) \leq ۵$.

اثبات. فرض کنید $p \geq 3$ یک عدد اول باشد. واضح است که $\Gamma(s_p)$ و $\Gamma(s_{p+1})$ همبند نیستند.

برعکس: فرض کنید n و $n-1$ اعداد غیر اول باشند. ثابت می‌کنیم $\Gamma(s_n)$ همبند است. به‌وضوح $n \geq 9$. فرض کنید $\sigma \in S_n$ ادعا می‌کنیم مسیری به طول حداکثر ۲ در $\Gamma(S_n)$ بین σ و یک دور بطول حداکثر $\frac{n}{3}$ وجود دارد.

حالتهای زیر می‌تواند اتفاق بیفتد:

۱) σ یک دور است. در این حالت فرض می‌کنیمσ دوری بطول حداکثر $n-2$ است. در این صورت حروف متمایز a,b وجود دارند به طوری که $a,b \notin Supp(\sigma)$ و لذا $\sigma(a,b) = (b,a)\sigma$ مدعی هستیم $\sigma - (a,b)$ مسیر مورد نظر در $\Gamma(s_n)$ است. اگر σ دوری بطول $n-1$ باشد در این صورت فرض کنید $g_\sigma = g_{l(\sigma)} = g_{n-1}$. در این صورت $g_\sigma \geq 3$ و σ^{g_σ} حاصل ضربی از دورهای مجزای $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{g_\sigma}$ بطول $\frac{n-1}{g_\sigma}$ و $\frac{n-1}{g_\sigma} \leq \frac{n}{3}$ است. داریم $\sigma\sigma^k = \sigma^k\sigma$ و $\sigma_1\sigma^k = \sigma^k\sigma_1$ و بنابراین مسیر $\sigma - \sigma^k - \sigma_1$ را در $\Gamma(s_n)$ داریم به طوری که مسیر ادعا شده است زیرا $l(\sigma_1) \leq \frac{n}{3}$ اگر σ بطول n باشد با برهان مشابه برای $n-1$، مسیری با ویژگی های ادعا شده بدست می آوریم.

۲) σ حاصل ضرب دو یا بیش از دو دور است. در این حالت فرض کنید σ_1 دور با کوچکترین طول است که در σ ظاهر می‌شود. در این صورت $l(\sigma_1) \leq \frac{n}{2}$ و داریم $\sigma\sigma_1 = \sigma_1\sigma$. چون $n \geq 9$، حروف متمایز a,b وجود دارند به طوری کهa,b وجود دارند به طوری که $a,b \notin Supp(\sigma_1)$ و لذا $\sigma_1(a,b) = (a,b)\sigma_1$. بنابراین $\sigma - \sigma_1 - (a,b)$ مسیر ادعا شده در $\Gamma(S_n)$ است.

حال فرض کنید σ, μ دو عنصر غیربدیهی در S_n باشند. اگر σ دور بطول حداکثر $n-1$ باشد در این صورت جایگشت های دورهای (a,b) و μ_1, μ_2 در S_n وجود دارند که $l(\mu_2) \leq \frac{n}{3}$ به طوری که $\sigma - (a,b)$ و $\mu - \mu_1 - \mu_2$ مسیرهایی در $\Gamma(S_n)$ هستند. از این رو حروف مجزای c,d وجود دارند به طوری که $\sigma - (a,b) - (c,d) - \mu_2 - \mu_1 - \mu$ مسیری در $\Gamma(S_n)$ است و لذا $d(\sigma,\mu) \leq 5$. فرض کنید σ و μ دورهایی بطول حداکثر $n-2$ نیستند. اگر C_1, C_2, C_3 مجموعه دورهایی بطول $n-1$، دورهایی بطول n و جایگشت‌هایی در S_n که حاصل‌ضرب دو یا بیشتر دور مجزا هستند. بنابراین $\sigma, \mu_1\mu_2 \in C_1 \cup C_2 \cup C_3$. اگر $\sigma, \mu_1\mu_2 \in C_1 \cup C_2$ در این صورت بدون کاستن از کلیت مسأله، می‌توان فرض کرد که $g_\sigma \leq g_\mu$. فرض کنید $\sigma^{g_\sigma} = \sigma_1\sigma_2...\sigma_{g_\sigma}$ و $\mu^{g_\mu} = \mu_1\mu_2...\mu_{g_\mu}$ دورهای مجزای بطول $\frac{l(\sigma)}{g_\sigma}$ و $\frac{l(\mu)}{g_\mu}$ باشند. داریم $l(\sigma_1) = \frac{l(\sigma)}{g_\sigma} \leq g_\sigma \leq g_\mu$. چون $\frac{l(\sigma)}{g_\sigma}$ یک مقسوم علیه سره $l(\sigma)$ است.

اگر $l(\sigma_1) < g_\mu$، دراین صورت طبق اصل لانه کبوتر $1 \le j \le g_\mu$ وجود داند به طوری که $\sigma_1\mu_j = \mu_j\sigma_1$. بنابراین $\sigma - \sigma^{g_\sigma} - \sigma_1 - \mu_j - \mu^{g_\mu} - \mu$ مسیری در $\Gamma(S_n)$ است و بنابراین $d(\sigma,\mu) \le 5$. اگر $l(\sigma_1) = g_\mu$، دراین صورت $g_\sigma = g_\mu$ و $l(\sigma) = (g_\sigma)^2$، بنابراین $l(\sigma) = l(\mu)$. اگر $\sigma_i\mu_j = \mu_j\sigma_i$ برای $1 \le i, j \le g_\sigma$ در اینصورت $\sigma - \sigma^{g_\sigma} - \sigma_i - \mu_j - \mu^{g_\mu} - \mu$ مسیری در $\Gamma(S_n)$ است و بنابراین $d(\sigma.\mu) \le 5$. در غیراین صورت بدون کاستن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که $\sigma_1 = (12...l)$ که $l = l(\sigma)$ و $\mu_j(j) \neq j$ برای هر $1 \le j \le l$. فرض کنید $\mu_j = (ja_{j,2}...a_{j,l})$ برای هر $1 \le j \le l$ و فرض کنید $\alpha = \sigma_1(a_{1,2}a_{2,2}...a_{l,2})(a_{1,l}...a_{l,l})$. به سادگی می‌توان بررسی کرد که $\alpha\mu^{g_\mu} = \mu^{g_\mu}\alpha$. بنابراین $\sigma - \sigma^{g_\sigma} - \sigma_1 - \alpha - \mu^{g_\mu} - \mu$ مسیری در S_n است و بنابراین $d(\sigma,\mu) \le 5$.

اگر $\sigma \in C_1$ و $\mu \in C_3$، آنگاه قرار دهید $\sigma^{g_\sigma} = \sigma_1\sigma_2...\sigma_{g_\sigma}$و $\mu = \mu_1\mu_2...\mu_s$ دورهای مجزا با $l(\mu_1) \le ... \le l(\mu_s)$ هستند. در این صورت حروف متمایز c, d موجودند به طوری که $\sigma - \sigma^{g_\sigma} - \sigma_1 - (cd) - \mu_1 - \mu$ مسیری در $\Gamma(S_n)$ هستند و بنابراین $d(\sigma,\mu) \le 5$. برهان مشابه برای $\sigma \in C_2$ و $\mu \in C_3$ می‌توان بکار برد.

اگر $\sigma, \mu \in C_3$، در این صورت قرار دهید $\sigma = \sigma_1\sigma_2...\sigma_r$ به طوری که $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r$ دورهای مجزای با $l(\sigma_1) \le ... \le l(\sigma_s)$ و $\mu = \mu_1\mu_2...\mu_s$ به طوری که $\mu_1, ..., \mu_s$ دورهای مجزا به شکل $l(\mu_1) \le ... \le l(\mu_s)$ هستند. فرض کنید a, b دو حرف مجزا به طوری که $\sigma_1(a,b) = (a,b)\sigma_1$ باشند. در این صورت حروف مجزای c, d هستند به طوری که $\sigma - \sigma_1(ab) - (cd) - \mu_1 - \mu$ مسیری در $\Gamma(S_n)$ است و لذا $d(\sigma,\mu) \le 5$. بنابراین $\Gamma(S_n)$ همبند است و $diam(\Gamma(S_n)) \le 5$ و این کران قوی است.

زیرا اگر $\sigma = (12345678)$ و $\mu = (123456789)$ در این صورت با استفاده از نرم افزار GAP، $d_{\Gamma(S_q)}(\sigma,\mu) = 5$ و لذا $diam(\Gamma(S_q)) = 5$. $\square$

تذکر: قضیه فوق نشان می‌دهد برای هر عدد اول $p \ge 3$، گراف $\Gamma(S_p) = \Gamma(S_{p+1})$ ناهمبند هستند. با یک محاسبه ساده، $\Gamma(S_3)$ دارای چهار مولفه $\{(123), (132)\}, \{(23)\}, \{(13)\}, \{(12)\}$ و $\Gamma(S_4)$ دارای ۵ مولفه به صورت $\{(234)\}, \{(124)\}, \{(134)\}, \{(123)\}, \{(12)\}$ است و این مولفه ها به ترتیب ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱۵ راس دارند.

در لم بعدی تعداد مولفه های $\Gamma(S_p)$ و $\Gamma(S_{p+1})$ برای هر عدد اول $p \ge 5$ بدست می‌آوریم.

لم ۲.۱.۲. *فرض کنید $p \ge 5$ یک عدد اول باشد دراینصورت $\Gamma(S_p)$ و $\Gamma(S_{p+1})$ به ترتیب دقیقاً $(p-2)!+1$ و $(p+1)(p-2)!+1$ مولفه دارند.*

اثبات. قرار دهید $S_p^p = S_p \setminus \{\sigma \in S_p | \sigma^p = 1\}$ و $S_{p+1}^p = S_{p+1} \setminus \{\sigma \in S_{p+1} | \sigma^p = 1\}$ با برهانی مشابه قضیه ۲.۱.۱ می‌توان ثابت کرد که گراف‌های $\Gamma(S_p)$ و $\Gamma(S_{p+1})$ همبند و دارای قطر حداکثر ۵ هستند. از طرف دیگر اگر $\sigma \in S_p \setminus \{1\}$ یا $\sigma \in S_{p+1} \setminus \{1\}$ و $\sigma^p = 1$ ، در این صورت زیر گراف القا شده با مجموعه رئوس $\{\sigma, \sigma^2, ..., \sigma^{p-1}\}$ یک مولفه در $\Gamma(S_p)$ یا $\Gamma(S_{p+1})$ می‌سازند.

چون $|\{\sigma \in S_p | \sigma^p = 1\} \setminus \{1\}|$ و $\{\sigma \in S_{p+1} | \sigma^p = 1\} \setminus \{1\}$ شامل $(p-1)!$ و $(p+1)(p-1)!$ عنصر هستند. بنابراین $\Gamma(S_p)$ و $\Gamma(S_{p+1})$ به ترتیب دقیقاً $(p-2)! + 1$ و $(p+1)(p-2)!$ مولفه دارند. □

لم ۳.۱.۲. *فرض کنید* $n \geq 5$ *عددی طبیعی باشد و فرض کنید* $M = N \cup \{0\}$ *مجموعه اعداد صحیح نامنفی و* M^n *نمایش حاصل‌ضرب دکارتی* n *نسخه از* M *باشد* $(M^n = M \times ... \times M)$

تابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$f_n : M^n \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f_n(k_1, ..., k_n) \longmapsto 1^k k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n! \quad k_1, ..., k_n \in M$$

فرض کنید

$$X_n = \{(k_1, ..., k_n) \in M^n | k_1 < n, \Sigma_{i=1}^n i k_i = n\}$$

در این صورت

$$max_{K \in X_n} f_n(K) = 2(n-2)! = f_n(n-2, 1, 0, ..., 0)$$

$$min_{K \in X_n} f_n(K) = n - 1 = f_n(1, 0, ..., 0, 1, 0)$$

اثبات. توجه کنید که برای یک $(k_1, ..., k_2) \in X_n$ دلخواه باید داشته باشیم $k_1 \leq n - 2$. زیرا اگر $k_1 = n - 1$ دراین صورت $2k_2 + ... + nk_n = 1$ که در M جواب ندارد و داریم $f_n(n-2, 1, 0, ..., 0) = 2(n-2)!$. بنابراین کافی است ثابت کنیم $max_{K \in X_n} f_n(K) = 2(n-2)!$.

به استقرا روی n برهان را کامل می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود

$$max_{K \in X_5} f_5(K) = 12$$

. حال فرض کنید رابطه برای $n \geq 5$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم

$$max_{K \in X_{n+1}} f_{n+1}(K) = 2(n-1)!$$

. باید ثابت کنیم اگر $K = (k_1, ..., k_{n+1}) \in X_{n+1}$ عنصر دلخواه باشد، در این صورت $f_{n+1}(K) = 2(n-1)!$. اگر $k_{n+1} = 1$ ، در این صورت $k_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$ و از این رو $f_{n+1}(K) = n + 1 < 2(n-1)!$