بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی (جبر و توپولوژی)

مدول های بئر و شبه بئر

توسط:

ملیحه کشاورز

استاد راهنما:

دکتر مجید ارشاد

شهریور ماه ۱۳۸۶

به نام خدا

حلقه‌ها و مدول‌های بئر و شبه‌بئر

به وسیله‌ی:

ملیحه کشاورز

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی
از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: ....عالی..................

دکتر مجید ارشاد، دانشیار ریاضی (رئیس کمیته).......................................

دکتر حبیب شریف، استاد ریاضی..

دکتر شهره نمازی، استادیار ریاضی ....

دکتر غلامحسین اسلام‌زاده، دانشیار ریاضی ....

دکتر محسن تقوی، دانشیار بخش ریاضی، نماینده تحصیلات تکمیلی

شهریور ماه ۱۳۸۶

تقدیم به:

پدر عزیزم

و

مادر دلسوزم

سپاسگزاری

و آنگاه که لحظه‌ها به یاد توست لحظه‌ها همه زیباست، الهی ادای شکر تو را هیچ زبان نیست و دریای فضل تو را هیچ کران نیست پس تو را می‌ستایم که شایسته ستایشی. وظیفه خود می‌دانم که از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر **مجید ارشاد** دانشیار محترم بخش ریاضی دانشگاه شیراز که با به کارگیری بهترین روش قدم به قدم دسترنج خود را به من آموختند صمیمانه تشکر کنم.

لازم است از اساتید مشاور محترم جناب آقای دکتر شریف، جناب آقای دکتر اسلام‌زاده و سرکار خانم دکتر نمازی، همچنین از پرفسور Rizavi از دانشگاه اُهایو که مرا از نظرات مفیدشان آگاه ساختند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

همچنین از دوستانم در مقاطع کارشناسی ارشد و دکترای بخش ریاضی که همراهان علمی بسیار خوبی برای من در این دوره بوده‌اند سپاسگزاری می‌کنم.

در پایان ضمن تشکر از تمام کسانی که تا به امروز مرا در تحصیل علم یاری کرده‌اند به خصوص پدر و مادر، برادر و خواهرانم که همواره مشوق من در این راه بوده‌اند و به راستی فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنایی رویشان سرمایه‌های جاودانی زندگی من است، مایلم از کلیه اساتید محترم بخش ریاضی دانشگاه شیراز و دانشگاه باهنر کرمان و کادر اداری بخش ریاضی دانشگاه شیراز که همواره در طول دوره تحصیل از وجودشان بهره‌ها بردم تشکر و قدردانی کنم.

چکیده

مدول‌های بئر و شبه‌بئر

به وسیله‌ی:

ملیحه کشاورز

در این پایان‌نامه مفاهیم بئر و شبه بئر در تئوری عمومی مدول‌ها بیان و خواص آنها بررسی شده است. مدول M_R بئر (شبه بئر) نامیده می‌شود هر گاه پوچ‌کننده‌ی راست هر ایده‌آل چپ (ایده‌آل دو طرفه) از $End(M)$ جمعوند مستقیمی از M باشد. نشان می‌دهیم که جمعوند مستقیم یک بئر (شبه بئر) مدول خواص بئر (شبه بئر) را به ارث می‌برد و هر گروه آبلی متناهی تولید شده بئر است هر گاه دقیقاً نیم‌ساده یا عاری از تاب باشد. ارتباط نزدیک خواص بئر و شبه بئر با خاصیت FI_توسیعی بررسی و نشان داده خواهد شد که یک مدول بئر (شبه بئر) و $(_FI)\mathcal{K}$_هم نامنفرد است اگر و فقط اگر $(\_FI)$ توسیعی و $\mathcal{K}\ (_FI)$_نامنفرد باشد. ثابت می‌کنیم که مدول آزاد (تصویری) روی حلقه‌ی شبه بئر، شبه بئر است. در میان بقیه نتایج همچنین نشان خواهیم داد که حلقه‌ی درونریختی‌های یک بئر (شبه بئر) مدول، یک حلقه‌ی بئر (شبه بئر) می‌باشد در حالی که عکس آن در حالت کلی درست نیست و کاربردهایی از نتایج بیان خواهد شد.

فهرست

عنوان | صفحه

۱ مقدمه‌ای بر مدول‌های بئر ۱
۱.۱ تاریخچه و هدف ۲
۲.۱ مقدمه ۵
۳.۱ تعاریف و مثال‌ها ۶
۴.۱ چند لم مقدماتی ۱۰

۲ مدولهای بئر ۱۴
۱.۲ تعاریف و مثال‌ها ۱۵
۲.۲ مدول‌های $\mathcal{K}$_نامنفرد و $\mathcal{K}$_هم نامنفرد و ارتباط آنها با بئرمدول‌ها . . . ۱۸
۳.۲ مدول‌های توسیعی و ارتباط آن بامدول‌های‌بئر ۲۴
۴.۲ جمعوند مدول‌های بئر ۳۳
۵.۲ مجموع مستقیم مدول‌های‌بئر ۳۷
۶.۲ مدول‌های $\mathcal{K}_FI$_نامنفرد و $\mathcal{K}_FI$_هم نامنفرد و ارتباط آنها با مدول‌های بئر ۴۲

۳ مدول‌های شبه بئر ۴۸
۱.۳ تعاریف و مثال‌ها ۴۹
۲.۳ ارتباط مدول‌های شبه بئر با مدول‌های FI_توسیعی و مدول‌های $\mathcal{K}-FI$_نامنفرد ۵۰
۳.۳ جمعوند مستقیم و مجموع مستقیم مدول‌های شبه بئر ۵۴

۴ حلقه‌های درونریختی ۶۲
۱.۴ مقدمه ۶۳
۲.۴ مدول‌های تراکم‌پذیر ۶۶

۳.۴ ارتباط جمعوندهای یک مدول با تعداد خودتوان‌های حلقه درونریختی‌های آن مدول ۷۱

مراجع ۷۹

فصل ۱

مقدمه‌ای بر مدول‌های بئر

۱ — مقدمه‌ای بر مدول‌های بئر

۱.۱ تاریخچه و هدف

در این پایان‌نامه حلقه‌ها و مدول‌های بئر و شبه بئر، مدول‌های توسیعی و FIـتوسیعی مفاهیم کلیدی می‌باشند که در طول پایان‌نامه تعریف شده‌اند. مفاهیم حلقه‌های بئر (۱۹۶۸ ,Kaplansky) و حلقه‌های شبه بئر (۱۹۶۷ ,Clark) موضوع اصلی بسیاری از مقاله‌های اخیر بوده است. حلقه‌ی R بئر (شبه بئر) نامیده می‌شود هر گاه پوچ‌کننده‌ی راست هر ایده‌آل چپ (ایده‌آل) به عنوان یک ایده‌آل راست توسط یک عنصر خودتوان از حلقه‌ی R تولید شود. به آسانی مشاهده می‌شود که خواص بئر و شبه بئر برای هر حلقه تقارن چپ و راست دارند. این مفاهیم در آنالیز تابعی (۱۹۷۲ ,Berberian و ۱۹۶۸ ,Kaplansky) ریشه دارند، همچنین این مفاهیم ارتباط نزدیکی با جبر C^* و جبر فون نیومن دارند.

نظریه‌ی حلقه‌های بئر و شبه بئر در سال‌های اخیر توسط دانشمندان زیادی از جمله Brikenmeier، Chatters، Khuri، Kim، Hirano و Park مطرح شده است. به عنوان مثال می‌توانید [۳ تا ۵]، [۹]، [۲۲] و [۲۳] را ببینید. Chatters و Khuri در سال ۱۹۸۰ [۱۳] نشان دادند که هر حلقه‌ی نامنفرد راست و توسیعی راست می‌تواند به عنوان یک حلقه‌ی بئر که هم نامنفرد راست نیز می‌باشد مورد بررسی قرار گیرد، در حالی که Brikenmeier در [۱۰] نشان داد که هر حلقه‌ی نامنفرد راست و FIـتوسیعی راست شبه بئر می‌باشد. خواص دیگر حلقه‌های بئر و شبه بئر مورد بررسی قرار گرفته و نتایج جالب زیادی در نظریه‌ی حلقه‌ها بدست آمده است که در مورد خیلی از این نتایج در نظریه کلی مدول‌ها اطلاع زیادی نداریم، به عنوان مثال سؤالاتی که به طور طبیعی به ذهن می‌رسند از جمله: اگر $e = e^2$ خودتوان دلخواهی در یک حلقه‌ی بئر (شبه بئر) باشد آیا Rـمدول راست eR خواص بئر (شبه بئر) را

به ارث می‌برد؟

در این پایان‌نامه خواص بئر و شبه بئر برای مدول‌های دلخواه ارائه داده شده است. فرض کنید M یک R_مدول باشد و $S = End(M)$، M را یک مدول بئر می‌نامیم اگر پوچ‌کننده‌ی راست (چپ) هر ایده‌آل چپ (راست) S توسط یک عنصر خودتوان S تولید شود و M یک مدول شبه بئر نامیده می‌شود هر گاه پوچ‌کننده‌ی راست (چپ) هر ایده‌آل S توسط یک عنصر خودتوان S تولید شود. به آسانی مشاهده می‌شود زمانی که $M = R_R$ مفاهیم فوق (بئرمدول و شبه بئرمدول) بر تعاریف موجود از حلقه‌های بئر و شبه بئر منطبق می‌باشند. در میان مثال‌هایی از بئرمدول‌ها می‌توان مدول‌های توسیعی راست و نامنفرد راست، هر R_مدول نیم‌ساده، هر Z_مدول متناهی تولید شده‌ی فارغ از تاب، هر ایده‌آل راست که جمعوند مستقیم یک حلقه‌ی بئر باشد (به عنوان مدول روی خودش) را نام برد و در میان مثال‌هایی از شبه بئرمدول‌ها می‌توان هر R_مدول تصویری (در حالت خاص هر ایده‌آل راست که جمعوند R باشد.) جایی که R شبه بئر باشد، هر مدول نامنفرد که FI_توسیعی نیز می‌باشد و هر گروه آزاد را نام برد. به وضوح هر حلقه‌ی بئر (شبه بئر)، به عنوان R_مدول بئر (شبه بئر) می‌باشد.

بعد از مقدماتی در فصل اول، مدول‌های بئر را در فصل دوم بررسی می‌کنیم، چون به خوبی دانسته می‌شود که هر حلقه‌ی بئر، نامنفرد می‌باشد شرایطی را برای بعضی نمونه‌های نامنفرد و هم نامنفرد که یک مدول را به حلقه‌ی درونریختی‌اش مرتبط می‌کند بررسی می‌کنیم. به طور مؤثری از این شرایطِ نامنفرد و هم نامنفرد برای دسته‌بندی بئرمدول‌های $\mathcal{K}$_هم نامنفرد به عنوان یک مدول توسیعی که $\mathcal{K}$_نامنفرد باشد استفاده می‌کنیم و نتایج (۱۹۸۰)Khuri و Chatters را به نظریه‌ی مدول‌ها توسیع می‌دهیم. سؤال طبیعی برای هر خاصیت جبری مدول‌ها این است که آیا آن خاصیت به جمعوندهای آن مدول‌ها به ارث می‌رسد؟ در فصل ۲ به این سؤال در مورد مدولهای بئر و در فصل ۳ برای شبه بئرمدول‌ها پاسخ مثبت می‌دهیم و در نتیجه منبع عظیمی از مثال‌ها (از جمله تمام جمعوندهای هر حلقه‌ی بئر، تمام مدول‌های تصویری روی حلقه‌ی شبه بئر) را بدست می‌آوریم، همچنین دسته‌بندی از بئرمدول‌ها که خاصیت جمعوند اشتراکی تعمیم‌یافته دارند را بررسی می‌کنیم (Wilson, ۱۹۸۶) را ببینید).

در میان بقیه‌ی نتایج شرط لازم برای اینکه مجموع مستقیمی از مدولهای بئر، بئر باشد را بدست می‌آوریم، همچنین کاربردهایی از این نتایج در فصل‌های بعدی پایان‌نامه ارائه

خواهد شد.

در فصل ۲ ثابت می‌کنیم که هر مدول بئر، $\mathcal{K}$_نامنفرد است و به دنبال پیدا کردن شرطی هستیم که تحت آن یک مدول $\mathcal{K}$_نامنفرد، بئر می‌باشد.

در فصل ۳ مدول‌های شبه بئر را بررسی می‌کنیم و چون مفاهیم مدول‌های شبه بئر و مدول‌های FI_توسیعی هر دو به رفتار زیرمدول‌های به طور کلی پایا بستگی دارند ارتباط نزدیکی بین آنها بدست می‌آید، همچنین در این فصل ثابت می‌کنیم که مجموع مستقیم R_مدول‌های تصویری در صورتی که حلقه‌ی R، شبه بئر باشد شبه بئر است و نشان خواهیم داد که هر زیرمدول یک مدول آزاد روی دامنه‌ی ایده‌ال اصلی، شبه بئر است.

همچنین در این فصل ثابت خواهیم کرد که مجموع دلخواهی از مدولهای شبه بئر دو به دو زیریکریخت (mutually subisomorphic) شبه بئر می‌باشد همچنین هر جمعوند از یک مدول شبه بئر خاصیت شبه بئر را به ارث می‌برد، در نتیجه هر مدول (آزادو) تصویری روی یک حلقه‌ی شبه بئر، شبه بئر می‌باشد. نتایجی از قبیل اینکه چه زمانی جمع مستقیم مدولهای شبه بئر، شبه بئر است آورده شده است.

در فصل ۴ نشان داده می‌شود که هر حلقه‌ی نامنفرد راست و FI_توسیعی راست شبه بئر می‌باشد. نامنفرد بودن را ضعیف و اصلاح کرده تا ارتباط با زیرمدول‌های به طور کامل پایا (ایده‌آل‌ها) را به کار ببریم و برای این کار مفاهیم $\mathcal{K}_FI$_نامنفرد و $\mathcal{K}_FI$_هم نامنفرد را معرفی کرده و از این مفاهیم برای دسته‌بندی کلی یک مدول شبه بئر که $\mathcal{K}_FI$_هم نامنفرد باشد استفاده می‌کنیم.

در واقع در فصل ۴ تمرکز اصلی روی حلقه‌ی درونریختی‌های یک مدول بئر (شبه‌بئر) می‌باشد، در قضیه‌ای در این فصل ثابت می‌کنیم که حلقه‌ی درونریختی‌های یک مدول بئر (شبه بئر) همیشه بئر (شبه بئر) می‌باشد.

(نشان می‌دهیم که عکس این قضیه در حالت کلی برقرار نیست و به دنبال شرطی هستیم که تحت آن عکس قضیه برقرار باشد، برای این منظور مدول‌های کمی تراکم‌پذیر را معرفی کرده و ثابت می‌کنیم که یک مدول تراکم‌پذیر، بئر (شبه بئر) است اگر و فقط اگر حلقه‌ی درونریختی‌های آن بئر (شبه بئر) باشد.

هدف اصلی بخش ۳ این فصل بدست آوردن شرایطی است که تحت آن یک حلقه‌ی منظم، حلقه‌ی آرتینی نیم‌ساده شود، در واقع به دنبال پاسخی برای سوال «چه موقع یک حلقه‌ی منظم، یک حلقه‌ی آرتینی نیم‌ساده می‌شود؟» هستیم. براستی مدول‌های بئر می‌توانند در یافتن پاسخ سوال فوق به ما کمک کنند! با تعاریف و مثال‌هایی مقدماتی بحث خود را شروع می‌کنیم.)

مرجع اصلی در نوشتن این پایان‌نامه مرجع [۲۹] بوده است.

۲.۱ مقدمه

دسته‌ی وسیعی از حلقه‌ها در خاصیت بئر صدق می‌کنند. به عنوان مثال حلقه‌ی درونریختی‌های مدول‌های نیم‌ساده بئر می‌باشد. مثال‌هایی از حلقه‌های شبه بئر شامل دسته‌های وسیعی از جمله حلقه‌های اول و حلقه‌ی ماتریسها روی حلقه‌های بئر می‌باشند.

در این پایان‌نامه فرض می‌کنیم که R یک حلقه‌ی یکدار (نه لزوماً جابجایی)، M یک R مدول راست یکانی و $S = \mathrm{End}_R(M)$ حلقه‌ی R_درونریختی‌ها روی M باشد که از نماد $\mathrm{End}\ (M)$ به جای $\mathrm{End}_R(M)$ استفاده می‌کنیم. منظور از زیرمدول‌های M، R_زیرمدول‌های راست می‌باشد در حالی که ایده‌آل‌های یک طرفه برای این حلقه‌ها ایده‌آل‌های راست برای R و ایده‌آل‌های چپ برای S خواهند بود. از اصطلاح ایده‌آل برای ایده‌آل‌های دوطرفه در هر دو حلقه استفاده می‌کنیم. به وضوح مدول M، S_مدول چپ و R_مدول راست می‌باشد. پوچ‌کننده‌ی راست $X \subseteq M$ در R (یعنی تمام عناصر $r \in R$ به طوری که $Xr = 0$) را با $r_R(X)$، پوچ‌کننده‌ی چپ $X \subseteq M$ در S (یعنی تمام درونریختی‌های $\varphi \in S$ به طوری که $\varphi X = 0$) را با $l_S(X)$، پوچ‌کننده‌ی راست $T \subseteq S$ در M (یعنی تمام عناصر $m \in M$ به طوری که $Tm = 0$) با $r_M(T)$ و پوچ‌کننده‌ی چپ $p \subseteq R$ در M (یعنی تمام عناصر $m \in M$ به طوری که $mp = 0$) را با $l_M(p)$ نشان می‌دهیم.

نمادگذاری: نماد $\leq$ بیانگر زیرمدول، $\leq^{\oplus}$ بیانگر جمعوند، $\leq^{e}$ بیانگر زیرمدول اساسی، $\not\leq^{e}$ بیانگر زیرمدول‌هایی که اساسی نیستند و $\trianglelefteq$ بیانگر زیرمدول‌های به طور کامل پایا خواهند بود.

عبارات درونریختی و ریخت و به طور مشابه جمعوند مستقیم و جمعوند قابل تعویضند. با تعاریف پایه‌ای و مثال‌هایی از آنها این فصل را آغاز می‌کنیم.

۳.۱ تعاریف و مثال‌ها

در این بخش تعاریف مورد نیاز و مثال‌هایی از آنها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱: مدول M را نیم‌ساده[۱] گوییم هر گاه بتوان آن را به صورت مجموع مستقیمی از زیرمدول‌های ساده‌اش نوشت، یا می‌توان گفت مدول M را نیم‌ساده گوییم هر گاه به ازای هر زیرمدول از M مثل K، زیرمدولی از M مثل P موجود باشد که $M = K \oplus P$.

مثال ۲.۳.۱: به وضوح هر مدول ساده، نیم‌ساده می‌باشد بنابراین برای هر حلقه مدول‌های نیم‌ساده وجود دارند اما مدول‌های نیم‌ساده، لزوماً ساده نیستند.

تعریف ۳.۳.۱: عضو خودتوان $e \in R$ را اولیه[۲] گوییم هر گاه $e \neq 0$ و برای هر دو عنصر خودتوان عمود بر هم e_1 و e_2 $(e_1e_2 = e_2e_1 = 0)$ از $e = e_1 + e_2$ نتیجه بگیریم $e_1 = 0$ یا $e_2 = 0$.

مثال ۴.۳.۱: عنصر خودتوان $(1, 0)$ در $Q \times Q$، اولیه است.

تعریف ۵.۳.۱: عنصر خودتوان $e \in R$ را عنصر خودتوان نیم‌مرکزی[۳] چپ (راست) گویند هر گاه $(Re)eR$ یک ایده‌آل دوطرفه حلقه R شود.

مثال ۶.۳.۱: به وضوح عناصر خودتوان حلقه‌های جابجایی نیم‌مرکزی هستند. به عنوان مثال در Z_6، ۳ عنصر خودتوان نیم‌مرکزی چپ است زیرا $3Z_6$ و $Z_6 3$ ایده‌آل‌های دوطرفه‌ی Z_6 هستند.

---
[۱] semisimple
[۲] primitive
[۳] semicentral

تعریف ۷.۳.۱: زیرمدول N از M را اساسی (بزرگ)[۴] گوییم هر گاه اشتراکش با هر زیرمدول مخالف صفر از M، مخالف صفر باشد.

مثال ۸.۳.۱: تمام زیرمدول‌های Z_{p^∞} اساسی هستند.

تعریف ۹.۳.۱: زیرمدول N از M را کوچک[۵] گوییم هر گاه به ازای هر زیرمدول N' از M اگر $N' + N = M$ داشته باشیم $N' = M$.

مثال ۱۰.۳.۱: تمام زیرمدول‌های Z_{p^∞} کوچک هستند.

تعریف ۱۱.۳.۱: به ازای هر مدول M، ساکل[۶] M بزرگترین زیرمدول نیم‌ساده از M می‌باشد. به عبارت دیگر ساکل M مجموع زیرمدول‌های مینیمال M و یا اشتراک زیرمدول‌های اساسی M می‌باشد که با $\text{Soc } M$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۲.۳.۱: $\text{Soc } Z = 0$.

نکته ۱۳.۳.۱: به وضوح در مدول‌های نیم‌ساده $M = SocM$.

مثال ۱۴.۳.۱: $\text{Soc } Z_p = Z_p$.

تعریف ۱۵.۳.۱: دوگان ساکل M را رادیکال[۷] M گوییم که برابر است با اشتراک زیرمدول‌های ماکسیمال M و یا مجموع زیرمدول‌های کوچک M که با $\text{Rad } M$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۶.۳.۱: $\text{Rad } Z = 0$، $\text{Rad } (Q)_Q = 0$ است.

نکته ۱۷.۳.۱: $\text{Rad } M = M$ اگر و فقط اگر مدول M زیرمدول ماکسیمال نداشته باشد.

مثال ۱۸.۳.۱: $\text{Rad} Q_Z = Q$ چون Q به عنوان Zـمدول زیرمدول ماکسیمال ندارد.

---

[۴] essential
[۵] small
[۶] socle
[۷] Radical

تعریف ۱.۳.۱۹: زیرمدول N از M را به طور کامل پایا[۸] گوییم هر گاه به ازای هر $h \in$ End (M) داشته باشیم $h(N) \subseteq N$.

مثال ۱.۳.۲۰: رادیکال ژاکبسون، ساکل، به طور کامل پایا هستند. (رجوع شود به گزاره‌های ۹.۱۴ و ۹.۸ از [۱])

تعریف ۱.۳.۲۱: زیرمدول N از مدول M را زیرمدول منفرد گوییم هر گاه

$$Z(N) = \{n | r_R(n) \leq^e R\} = N.$$

مثال ۱.۳.۲۲: $Z \oplus Z_p$ را به عنوان Z مدول در نظر بگیرید، Z_p زیرمدول منفرد آن است.

نکته ۱.۳.۲۳: زیرمدول‌های منفرد، زیرمدول‌های به طور کامل پایا هستند. زیرا اگر N زیرمدولی منفرد از مدول M باشد به ازای هر $n \in N$، $r_R(n) \leq^e R$ و چون به ازای هر $\varphi \in$ End (M)، $r_R(n) \leq Ar_R(\varphi(n))$، پس $r_R(\varphi(n)) \leq^e R$. در نتیجه $\varphi(n) \in N$. یعنی $\varphi(N) \subseteq N$. بنابراین N به طور کامل پایا است.

تعریف ۱.۳.۲۴: Rـمدول M را یک مدول آزاد [۹] گوییم، در صورتی که $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$ که در آن به ازای هر $i \in I$ یکریختی Rـمدولی $M_i \cong R$ را داشته باشیم.

تعریف ۱.۳.۲۵: مدول P روی حلقه‌ی R تصویری[۱۰] است اگر به ازای هر نمودار

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "f"] & \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

از همریختی‌های Rـمدول‌ها که سطر پایین آن کامل باشد (یعنی g برورریختی باشد)، یک همریختی Rـمدول‌ها مانند $h : P \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار

---

۸ fully invariant
۹ free
۱۰ Projective

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

تعویض‌پذیر باشد (یعنی $gh = f$).

تعریف ۲۶.۳.۱: مدول E روی حلقه‌ی R را اینژکتیو[۱۱] گوییم اگر به ازای هر نمودار

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\
 & E &
\end{tikzcd}
$$

از همریختی‌های Rـمدول‌ها با سطر بالای کامل (یعنی g یک تکریختی باشد)، یک همریختی از Rـمدول‌ها مانند $h : B \longrightarrow E$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, "h"] \\
 & E &
\end{tikzcd}
$$

تعویض‌پذیر باشد (یعنی $hg = f$).

تعریف ۲۷.۳.۱: هر گاه در تعریف فوق به جای B مدول E را قرار دهیم، به مدول E شبه اینژکتیو[۱۲] می‌گوییم.

تذکر ۲۸.۳.۱: به وضوح هر مدول اینژکتیو، شبه اینژکتیو است، اما عکس آن برقرار نیست. برای مثال $Z_۲$ به عنوان Zـمدول شبه اینژکتیو است، اما اینژکتیو نیست.

[۱۱] Injective
[۱۲] quasi injective

تعریف ۲۹.۳.۱: حلقه‌ی R را اول [۱۳] گوییم، هر گاه ایده‌آل صفر در آن اول باشد.

تعریف ۳۰.۳.۱: حلقه‌ی R را نیم اول[۱۴] گوییم، هر گاه اشتراک ایده‌الهای اولش صفر باشد.

مثال ۳۱.۳.۱: Z یک حلقه‌ی نیم‌اول است.

۴.۱ چند لم مقدماتی

در این بخش چند لم مقدماتی را بیان و ثابت می‌کنیم.

لم ۱.۴.۱:فرض کنید $N \leq M$ ،$I \subseteq R_R$ ،$K \leq_S S$ ،$P \trianglelefteq M$ ،$J \trianglelefteq M$ ،$L \trianglelefteq S$ باشد.
آنگاه موارد زیر برقرار است:

۱) $l_M(r_R(l_M(I)) = l_M(I)$

۲) $r_R(l_M(r_R(N))) = r_R(N)$

۳) $l_S(r_M(l_S(N))) = l_S(N)$

۴) $r_M(l_S(r_M(K))) = r_M(K)$

۵) $l_M(J) \trianglelefteq M$

٦) $r_R(P) \trianglelefteq R$

۷) $l_S(P) \trianglelefteq S$

۸) $r_M(L) \trianglelefteq M$

---

[۱۳] Prime
[۱۴] Semiprime

برهان: برهان ۱ تا ۴ بدیهی است (می‌توان به گزاره ۱۵.۲ [۱] مراجعه کرد.) برای اثبات (۵) می‌دانیم که به ازای هر $x \in l_M(J)$

$$xJ = \circ \qquad (۱-۱)$$

حال باید ثابت کنیم به ازای هر $\varphi \in \mathrm{End}(M)$، $\varphi(x)$ عضوی از $l_M(J)$ می‌باشد، یا به طور معادل کافی است نشان دهیم $\varphi(x)J = \circ$. چون φ همریختی است داریم:

$$\varphi(x)J = \varphi(xJ) \overset{(۱-۱)}{=} \varphi(\circ) = \circ$$

یعنی $l_M(J)$ زیرمدول به طور کامل پایای M می‌باشد. اثبات مورد (۸) لم به طریق مشابه می‌باشد، اثبات (۶) و (۷) بدیهی است. □

حال در دو لم زیر نتایجی را بدست می‌آوریم که مرتبط با زیرمدول‌های به طور کامل پایا می‌باشند و بعداً مورد استفاده قرار خواهند گرفت:

لم ۲.۴.۱:فرض کنید $M = M_۱ \oplus M_۲$ تجزیه‌ی مستقیمی از مدول M باشد. اگر $N \trianglelefteq M$ باشد، آنگاه $N = N_۱ \oplus N_۲$ که به ازای $i = ۱, ۲$ داریم $N_i = N \cap M_i \trianglelefteq M$.

برهان: فرض کنید π_i تصویر کانونی M روی M_i به ازای $i = ۱, ۲$ باشد. چون $N \trianglelefteq M$ است داریم $\pi_i(N) \subseteq N$ و در نتیجه $\pi_i(N) = N \cap M_i = N_i$ به ازای $i = ۱, ۲$. بنابراین $N \subseteq \pi_۱(N) + \pi_۲(N) = N_۱ + N_۲$، اما چون $N_i \subseteq N$ به ازای $i = ۱, ۲$ داریم $N_۱ + N_۲ \subseteq N$ بنابراین $N = N_۱ + N_۲$ و چون با توجه به $N_i = N \cap M_i$ داریم: $N_۱ \cap N_۲ = N \cap M_۱ \cap M_۲ = \circ$ می‌توان گفت: $N = N_۱ \oplus N_۲$.

نکته ۳.۴.۱: توجه کنید که حلقه‌ی درونریختی‌های مدول $M = M_۱ \oplus M_۲$ به صورت ماتریس‌هایی است که (i,j) امین مؤلفه‌ی آنها ریخت‌هایی از $M_j \longrightarrow M_i$ می‌باشند زیرا:

به ازای هر $\varphi \in End(M)$ مؤلفه‌های ماتریس φ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\varphi_{۱۱} : M_۱ \xrightarrow{l_۱} M_۱ \oplus M_۲ \xrightarrow{\varphi} M_۱ \oplus M_۲ \xrightarrow{\pi_۱} M_۱ \Longrightarrow \varphi_{۱۱} = \pi_۱ \varphi l_۱$$

$$\varphi_{۱۲} : M_۲ \xrightarrow{l_۲} M_۱ \oplus M_۲ \xrightarrow{\varphi} M_۱ \oplus M_۲ \xrightarrow{\pi_۱} M_۱ \Longrightarrow \varphi_{۱۲} = \pi_۱ \varphi l_۲$$

$$\varphi_{۲۱} : M_۱ \xrightarrow{l_۱} M_۱ \oplus M_۲ \xrightarrow{\varphi} M_۱ \oplus M_۲ \xrightarrow{\pi_۲} M_۲ \Longrightarrow \varphi_{۲۱} = \pi_۲ \varphi l_۱$$

$$\varphi_{۲۲} : M_۲ \xrightarrow{l_۲} M_۱ \oplus M_۲ \xrightarrow{\varphi} M_۱ \oplus M_۲ \xrightarrow{\pi_۲} M_۲ \Longrightarrow \varphi_{۲۲} = \pi_۲ \varphi l_۲$$

حال باید نشان دهیم اثر ماتریس $\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$ روی هر عنصر دلخواه (x_1, x_2) برابر است با $\varphi(x_1, x_2)$. داریم:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \pi_1\varphi l_1(x_1) + \pi_1\varphi l_2(x_2) \\ \pi_2\varphi l_1(x_1) + \pi_2\varphi l_2(x_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \pi_1\varphi(x_1, 0) + \pi_1\varphi(0, x_2) \\ \pi_2\varphi(x_1, 0) + \pi_2\varphi(x_2, 0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \pi_1\varphi(x_1, 0) \\ \pi_2\varphi(x_1, 0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_1\varphi(0, x_2) \\ \pi_2\varphi(0, x_2) \end{pmatrix} \\
&= \varphi(x_1, 0) + \varphi(0, x_2) = \varphi(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $\varphi \in \mathrm{End}\ (M)$ و هر عنصر دلخواه $(x_1, x_2) \in M_1 \oplus M_2$ داریم:

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

پس هر درونریختی حلقه‌ی $EndM$ به صورت یک ماتریس می‌باشد، به طریق مشابه می‌توان این موضوع را به هر تعداد دلخواه تعمیم داد و فرم ماتریسی حلقه $\mathrm{End}\ (\oplus M_i)$ را بدست آورد.

لم ۴.۴.۱:فرض کنید $M = N_1 \oplus N_2$ قرار دهید $F_1 \trianglelefteq N_1$. در این صورت وجود دارد $N_2 \trianglerighteq F_2$ به گونه‌ای که $F_1 \oplus F_2 \trianglelefteq M$.

برهان: قرار دهید $F_2 = \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}(N_1, N_2)} \varphi(F_1)$. بنابراین $F_2 \leq N_2$. حال $\psi \in \mathrm{End}\ (N_2)$ را دلخواه در نظر بگیرید. چون به ازای هر $\varphi \in \mathrm{Hom}\ (N_1, N_2)$، $\psi\varphi \in \mathrm{Hom}\ (N_1, N_2)$ با توجه به تعریف F_2 داریم $\psi(F_2) = \psi(\sum\varphi(F_1)) = \sum\psi\varphi(F_1) \subseteq F_2$. بنابراین $F_2 \trianglelefteq N_2$. حال کافی است ثابت کنیم $F_1 \oplus F_2 \trianglelefteq M$. برای این منظور $\mathcal{X} \in \mathrm{End}\ (M)$ را دلخواه در نظر بگیرید. در این صورت طبق نکته (۳.۴.۱) $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_{ij})_{i,j=1,2}$ که $\mathcal{X}_{ij} := N_j \longrightarrow N_i$. توجه کنید که $\mathcal{X}_{ii}(F_i) \subseteq F_i$ زیرا $F_i \trianglelefteq N_i$ به ازای $i = 1, 2$. همچنین با توجه به تعریف F_2 داریم $\mathcal{X}_{21}(F_1) \subseteq F_2$. برای هر $\varphi \in \mathrm{Hom}(N_1, N_2)$ داریم $\mathcal{X}_{12}\varphi \in \mathrm{End}\ (N_1)$ و در نتیجه $\mathcal{X}_{12}(F_2) = \mathcal{X}_{12}(\sum\varphi(F_1)) = \sum\mathcal{X}_{12}\varphi(F_1) \subseteq F_1$ و چون هر مؤلفه‌ی $\mathcal{X}$، $F_1 \oplus F_2$ را به $F_1 \oplus F_2$ می‌نگارد داریم: $F_1 \oplus F_2 \trianglelefteq M$. □

لم ۵.۴.۱:فرض کنید e یک عنصر خودتوان حلقه‌ی R باشد. در این صورت $r(Re) = (1 - e)R$.