دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

شبه میانگین پذیری مشخصه‌ای جبرهای باناخ و کاربردهای آن

رساله‌ی دکتری ریاضی محض، آنالیز هارمونیک،

مهدی نعمتی

استاد راهنما

دکتر رسول نصر اصفهانی

فروردین ماه ۱۳۹۰

چکیده

در این رساله، برای جبر باناخ A و مشخصه‌ی ناصفر φ روی A، مفهوم شبه $\varphi-$میانگین‌پذیری و شبه میانگین‌پذیری مشخصه‌ای A را معرفی و مطالعه می‌کنیم. همچنین شرایط لازم و کافی را برای شبه $\varphi-$میانگین‌پذیری A به دست می‌آوریم و به خواص موروثی آن می‌پردازیم. در ادامه شبه میانگین‌پذیری مشخصه‌ای جبرهای گروهی وابسته به گروه فشرده‌ی موضعی G را مطالعه می‌کنیم. در آخر به بررسی رابطه‌ی مفهوم شبه $\varphi-$میانگین‌پذیری و $\varphi-$انقباض‌پذیری جبر باناخ دلخواه A و جبرهای سگال مجرد آن می‌پردازیم.

رده‌بندی موضوعی: اولیه 43A07، 46H25. ثانویه 46H05.

کلمات کلیدی: جبر باناخ، شبه میانگین‌پذیر مشخصه‌ای، انقباض‌پذیر مشخصه‌ای، مدول چپ باناخ، گروه فشرده‌ی موضعی، جبر سگال مجرد.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $\mathcal{X}$ یک $\mathcal{A}-$ مدول چپ باناخ باشد. در این صورت $\mathcal{X}^*$، دوگان فضای باناخ $\mathcal{X}$، یک $\mathcal{A}-$ مدول راست باناخ با ضرب زیر است

$$\langle \xi, \Lambda \cdot a \rangle = \langle a \cdot \xi, \Lambda \rangle \qquad (a \in \mathcal{A}, \xi \in \mathcal{X}, \Lambda \in \mathcal{X}^*).$$

به طور مشابه هرگاه $\mathcal{X}$ یک $\mathcal{A}-$ مدول راست باناخ باشد، $\mathcal{X}^*$ یک $\mathcal{A}-$ مدول چپ باناخ با ضرب

$$\langle \xi, a.\Lambda \rangle = \langle \xi \cdot a, \Lambda \rangle \qquad (a \in \mathcal{A}, \xi \in \mathcal{X}, \Lambda \in \mathcal{X}^*)$$

است. بالاخره، هرگاه $\mathcal{X}$ یک $\mathcal{A}-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ باشد، $\mathcal{X}^*$ یک $\mathcal{A}-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ با ضرب‌های فوق است.

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. برای یک $\mathcal{A}-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ $\mathcal{X}$، نگاشت خطی $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ یک مشتق نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$D(ab) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b).$$

مشتق D را داخلی می‌نامیم هرگاه عنصر $\xi \in \mathcal{X}$ موجود باشد به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$D(a) = a \cdot \xi - \xi \cdot a.$$

جبر باناخ $\mathcal{A}$ را میانگین‌پذیر می‌گوییم هرگاه برای هر $\mathcal{A}-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ $\mathcal{X}$، هر مشتق پیوسته‌ی $D:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{X}^*$، داخلی باشد. همچنین جبر باناخ $\mathcal{A}$ انقباض پذیر نامیده می شود هرگاه برای هر $\mathcal{A}-$مدول $\mathcal{X}$، هر مشتق پیوسته $D:\mathcal{A}\to\mathcal{X}$ داخلی باشد.

مفهوم میانگین‌پذیری جایگاه مهمی در جبرهای باناخ و آنالیز هارمونیک به خود اختصاص داده است. این مفهوم برای اولین بار در سال ۱۹۷۲ توسط جانسون در [۲۹] معرفی شد. در واقع هدف جانسون، یافتن خاصیت مناسبی روی جبر گروهی $L^1(G)$ از یک گروه فشرده‌ی موضعی G بود که با میانگین‌پذیری G معادل باشد. وی پس از یافتن این خاصیت، آن را میانگین‌پذیری $L^1(G)$ نام نهاد و این مفهوم را به کلیه‌ی جبرهای باناخ تعمیم داد.سپس ضمن اثبات قضایای بسیاری در این زمینه، معادل‌های متعددی برای میانگین‌پذیری جبرهای باناخ ارایه کرد. بنابراین نه تنها یک خاصیت، بلکه خواص معادل بسیاری از $L^1(G)$ یافت که با میانگین‌پذیری G معادلند. به دنبال آن این مفهوم برای جبرهای باناخ متفاوتی بررسی شد. برای نمونه می‌توان به کارهای [۱۰] و [۱۳] اشاره کرد.

در ادامه، ریاضیدانان انواع مفاهیم میانگین‌پذیری و شرایط معادل آن‌ها را بررسی کردند.

از جمله جانسون در [۳۰] نشان داد که جبر باناخ $\mathcal{A}$ میانگین پذیر است اگر و تنها اگر یک قطر تقریبی کراندار داشته باشد؛ یعنی تور $(\mathbf{m}_\alpha)\subset\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}$ موجود باشد به طوری که برای هر $a\in\mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\pi(\mathbf{m}_\alpha)a\to a,\quad a\cdot\mathbf{m}_\alpha-\mathbf{m}_\alpha\cdot a\to 0.$$

به طور مشابه جبر باناخ $\mathcal{A}$ انقباض پذیر است اگر و تنها اگر یک قطر داشته باشد؛ یعنی یک عنصر $\mathbf{m}\in\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}$، به طوری که برای هر $a\in\mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\pi(\mathbf{m})a=a,\quad a\cdot\mathbf{m}=\mathbf{m}\cdot a$$

که در این‌جا π نگاشتی خطی از $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ است که برای هر $a,b\in\mathcal{A}$ با ضابطه‌ی $\pi(a\otimes b)=ab$ تعریف می‌شود.

به هر حال، اهمیت و جذابیت این موضوع سبب شد که ریاضی‌دانان بسیاری به سمت آن گرایش یابند. از جمله بادِ، کرتیز و دیلز[٦] که مفهوم میانگین‌پذیری ضعیف را در سال ۱۹۸۷ برای جبرهای باناخ جابه‌جایی معرفی کردند. همچنین در سال ۲۰۰۴ قهرمانی و لوی، مفهوم میانگین‌پذیری تقریبی را معرفی و مطالعه نمودند. در سال ۲۰۰۷ نیز قهرمانی و ژانگ در مقاله‌ی [۲۲]، مفهوم دیگری از میانگین‌پذیری به نام شبه میانگین‌پذیری را معرفی و مطالعه نمودند؛ درواقع، جبر باناخ $\mathcal{A}$ را شبه میانگین پذیر نامیدند هرگاه یک قطر تقریبی داشته باشد. همچنین جبر باناخ $\mathcal{A}$ را شبه انقباض پذیر نامیدند هرگاه یک قطر تقریبی مرکزی داشته باشد؛ یعنی تور $(\mathbf{m}_\alpha)\subset\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}$ موجود باشد به طوری که برای هر $a\in\mathcal{A}$ داشته

باشیم

$$\pi(\mathbf{m}_\alpha)a \to a, \quad a\cdot \mathbf{m}_\alpha - \mathbf{m}_\alpha \cdot a = \circ.$$

توجه کنیم که قطر تقریبی در این حالات ممکن است بی‌کران باشد. بدیهی است که هر جبر باناخ میانگین‌پذیر (انقباض پذیر) ، شبه میانگین‌پذیر (شبه انقباض پذیر) نیز است. مفهوم شبه میانگین‌پذیری روی جبرهای مختلفی مورد مطالعه قرار گرفت؛ بعنوان مثال برای یک گروه فشرده‌ی موضعی G این مفهوم روی جبرهای گروهی مانند $L^{1}(G)$، $M(G)$، $LUC(G)^*$، $L^\infty(G)^*$ و $L^\infty_\circ(G)^*$ با مفهوم میانگین‌پذیری معادل است اما روی بسیاری از جبرهای باناخ متفاوت می‌باشد. در ادامه کارهای متفاوتی در ارتباط با این مفهوم انجام گرفت از جمله در مقاله‌ی [۴۷]، این مفهوم روی جبرهای سگال مجرد بخصوص جبرهای سگال یک گروه فشرده موضعی مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت.

نتیجه‌ی جانسون برای ساختارهای جبری ضعیف‌تر از گروه‌ها لزوماً برقرار نبود. برای مثال نیم گروه جمعی $\mathbb{N}$ میانگین‌پذیر است، در حالی که جبر باناخ $\ell^{1}(\mathbb{N})$ میانگین‌پذیر نیست. بنابراین در سال ۱۹۸۳ لائو در [۳۴]، یک مفهوم میانگین‌پذیری مناسب به نام میانگین‌پذیری چپ را برای جبرهای لائو طوری معرفی کرد که مشکل مذکور را برطرف می‌کند. یک جبر باناخ $\mathcal{L}$ را یک $F-$ جبر می‌نامند اگر پیش دوگان یکتایی از یک W^*- جبر $\mathcal{M}$ باشد به طوری که عضو همانی u از $\mathcal{M}$ (که همواره وجود دارد) متعلق به $\Delta(\mathcal{L})$ باشد. این جبرها در سال ۱۹۸۸ توسط پیر [۴۵]، جبرهای لائو نامیده شدند و توسط ریاضیدانان متعددی از جمله لائو و قهرمانی [۲۰] و نصر [۴۰] مورد مطالعه قرار گرفتند. لائو، $\mathcal{L}$ را میانگین‌پذیر چپ نامید هرگاه برای هر $\mathcal{L}-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ $\mathcal{X}$ با عمل مدولی چپ

$$a\cdot\xi = u(a)\xi,$$

برای هر $\xi \in \mathcal{X}$ و $a \in \mathcal{L}$، هر مشتق پیوسته $D:\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{X}^*$، داخلی باشد. میانگین‌پذیری چپ بسیاری از ساختارهای جبری با میانگین‌پذیری چپ جبرهای لائو روی آن‌ها معادل است. برای مثال نیم گروه گسسته S میانگین‌پذیر چپ است اگر و تنها اگر $\ell^{1}(S)$ میانگین‌پذیر چپ باشد. در حالت خاص $\ell^{1}(\mathbb{N})$ میانگین‌پذیر چپ است. میانگین‌پذیری چپ جبرهای لائو به طور وسیعی مورد بررسی قرار گرفت؛ برای مثال مقالات لائو [۳۴]، لائو و وانگ [۳۶] و نصر [۴۱] را ببینید.

بالاخره لائو، کانیوت و پیم [۳۲، ۳۳] برای تابعک خطی و ضربی φ، مفهوم $\varphi-$ میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را ارایه کردند؛ جبر باناخ $\mathcal{A}$ را $\varphi-$ *میانگین‌پذیر* می‌نامند هرگاه تابعک $m \in \mathcal{A}^{**}$ موجود باشد به طوری که برای هر $f \in \mathcal{A}^*$ و $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$m(f\cdot a) = \varphi(a)m(f), \quad m(\varphi) = 1.$$

آنها m را یک φ–میانگین نامیدند. این تعریف معادل است با این‌که برای هر $\mathcal{A}$–مدول دوطرفه‌ی باناخ $\mathcal{X}$ با عمل مدولی چپ $a \cdot \xi = \varphi(a)\xi$ برای $a \in \mathcal{A}$ و $\xi \in \mathcal{X}$، هر مشتق پیوسته $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}^*$، داخلی باشد. همچنین $\mathcal{A}$ را میانگین‌پذیر مشخصه‌ای می‌نامند هرگاه برای هر $\varphi \in \Delta(\mathcal{A}) \cup \{۰\}$، جبر باناخ $\mathcal{A}$، φ–میانگین‌پذیر باشد. در واقع این تعریف به نوعی تعمیمی از مفهوم میانگین‌پذیری چپ جبرهای لائو است. در این مفهوم، همان طور که اشاره شد، به جای جبر لائو، جبر باناخ دلخواه $\mathcal{A}$ و به جای همانی u، تابعک $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ در نظر گرفته شده است. این مفهوم همزمان توسط منفرد در مقالات [۳۸] و [۳۹] معرفی و مطالعه گردید.

در ادامه منفرد به همراه هو و تراینر در [۲۷]، به بررسی دقیق‌تر این مفهوم پرداخت و یک دسته از ویژگی‌های موروثی آن را ارایه نمود. همچنین مفهوم قویتری را به عنوان φ–انقباض‌پذیری و انقباض‌پذیری مشخصه‌ای تعریف نمود؛ جبر باناخ $\mathcal{A}$ را φ–انقباض‌پذیر نامیدند هرگاه برای هر $\mathcal{A}$– مدول دوطرفه‌ی باناخ $\mathcal{X}$ با عمل مدولی راست $\xi \cdot a = \varphi(a)\xi$ برای $a \in \mathcal{A}$ و $\xi \in \mathcal{X}$، هر مشتق پیوسته $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$، داخلی باشد. جبر باناخ $\mathcal{A}$ را انقباض‌پذیر مشخصه‌ای نامیدند هرگاه برای هر $\varphi \in \Delta(\mathcal{A}) \cup \{۰\}$، جبر باناخ $\mathcal{A}$، φ– انقباض‌پذیر باشد. لازم به ذکر است که این مفهوم را منفرد به عنوان φ– انقباض‌پذیر راست (انقباض‌پذیر مشخصه‌ای راست) بیان نمود. آنها معادلهای بسیاری برای این مفاهیم به دست آوردند؛ به عنوان مثال نشان دادند که $\mathcal{A}$، φ– میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر یک φ–قطر تقریبی داشته باشد؛ یعنی تور $(\mathbf{m}_\alpha) \subset \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ موجود باشد به طوری که برای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\varphi(\pi(\mathbf{m}_\alpha)) \to ۱, \quad a \cdot \mathbf{m}_\alpha - \varphi(a)\mathbf{m}_\alpha \to ۰.$$

به‌طور مشابه جبر باناخ $\mathcal{A}$، φ–انقباض پذیر است اگر و تنها اگر یک φ–قطر داشته باشد؛ یعنی یک عنصر $\mathbf{m} \in \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$، موجود باشد به طوری که برای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\varphi(\pi(\mathbf{m})) = ۱, \quad a \cdot \mathbf{m} = \varphi(a)\mathbf{m}.$$

هدف این رساله، معرفی و مطالعه‌ی مفاهیم جدیدی از میانگین‌پذیری است که اساس آن وجود φ–قطرهای تقریبی در جبر باناخ $\mathcal{A}$ است که لزوماً کران‌دار نیستند. در واقع، ما در این رساله دو مفهوم جدید *شبه φ– میانگین‌پذیری* و *شبه میانگین‌پذیری مشخصه‌ای* را معرفی و مطالعه می‌کنیم. همچنین رابطه‌ی آنها با مفهوم φ– میانگین‌پذیری و سایر مفاهیم میانگین‌پذیری را بررسی می‌کنیم. در ادامه خواص موروثی این مفهوم را به دست می‌آوریم. همچنین سعی می‌کنیم اختلاف شبه φ– میانگین‌پذیری با دیگر مفاهیم میانگین‌پذیری و بخصوص φ– میانگین‌پذیری را مطالعه کنیم و با مثال‌هایی آنها را

از یکدیگر تفکیک کنیم. در این راستا مفاهیم جدید را به صورتهای مختلفی مشخصه‌سازی کرده و معادل‌هایی برای آنها پیدا می‌کنیم و با استفاده از این معادل‌ها به مقایسه با دیگر مفاهیم می‌پردازیم.

این رساله شامل پنج فصل است. در فصل بعد، به معرفی و مطالعه‌ی مفهوم شبه φ−میانگین‌پذیری جبرهای باناخ می‌پردازیم و شرایط معادل متعددی برای این مفهوم ارایه می‌کنیم. در ادامه با ارایه مثالی اختلاف شبه φ−میانگین‌پذیری و φ−میانگین‌پذیری را نشان می‌دهیم. همچنین ویژگی‌های موروثی شبه φ−میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را نیز بررسی می‌کنیم. برای نمونه نشان می‌دهیم که خاصیت شبه φ−میانگین‌پذیری جبر باناخ $\mathcal{A}$ تحت چه شرایطی به ایده‌آل‌های بسته‌اش منتقل می‌شود. همچنین نشان می‌دهیم دو مفهوم φ− میانگین‌پذیری و شبه میانگین‌پذیری مفهوم شبه φ−میانگین‌پذیری را نتیجه می‌دهد. سپس ارتباط شبه φ−میانگین‌پذیری $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}^{**}$ را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم، مشخصه‌سازی هایی برای مفهوم شبه φ−میانگین‌پذیری به دست می‌آوریم که در ارتباط با مشتقات از $\mathcal{A}$ به توی $\mathcal{A}$−مدولهای دو طرفه‌ی خاصی می‌باشند؛ به عنوان مثال ثابت می‌کنیم که $\mathcal{A}$، شبه φ−میانگین‌پذیر است هرگاه برای هر $\mathcal{A}$− مدول دو طرفه‌ی باناخ $\mathcal{X}$ با عمل مدولی چپ $a \cdot \xi = \varphi(a)\xi$ برای هر $a \in \mathcal{A}$ و $\xi \in \mathcal{X}$، هر مشتق کران‌دار $D : \mathcal{A} \to \mathcal{X}^*$ داخلی تقریبی باشد. با توجه به این نوع از مشخصه سازی می‌توانیم این مفهوم را با مفهوم میانگین‌پذیری تقریبی مقایسه کنیم و با ارایه مثالی اختلاف آنها را نشان دهیم. همچنین نشان می‌دهیم تحت شرایطی دو مفهوم شبه φ−میانگین‌پذیری و φ− میانگین‌پذیری معادلند.

در فصل چهارم، شبه میانگین‌پذیری مشخصه‌ای جبرهای گروهی را مطالعه می‌کنیم. در واقع شرایط لازم و کافی را روی گروه فشرده‌ی موضعی G بررسی می‌کنیم که تحت آن شبه میانگین‌پذیری مشخصه‌ای جبرهای گروهی $L^1(G)$، $M(G)$، $L_0^\infty(G)^*$، $L^1(G)^{**}$ و $LUC(G)^*$ برقرار باشد.

در نهایت در فصل پنجم، به بررسی مفهوم شبه φ−میانگین‌پذیری و φ−انقباض‌پذیری جبرهای سگال مجرد $\mathcal{A}$ می‌پردازیم. همچنین ارتباط فضای مشخصه‌ای جبرهای سگال مجرد $\mathcal{A}$ و فضای مشخصه‌ای $\mathcal{A}$ را به دست می‌آوریم تا به وسیله‌ی آن نشان دهیم به چه شکل این مفاهیم روی این گونه از جبرهای خاص انتقال پیدا می‌کند.

تمام نتایج همراه با اثبات آن‌ها از نگارنده و در فصل آخر همراه با همکاران پژوهشی است مگر برخی از نتایج دیگران که صرفاً به صورت آن‌ها اشاره شده و مراجع آن‌ها نیز صریحاً ذکر شده است.

فصل ۲

شبه میانگین پذیری مشخصه‌ای جبرهای باناخ

در این فصل به معرفی و مطالعه‌ی مفهوم شبه φ– میانگین‌پذیری جبرهای باناخ می‌پردازیم و شرایط معادل متعددی را برای این مفهوم ارایه می‌کنیم. همچنین ویژگی‌های موروثی شبه φ– میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم.

میانگین‌پذیری جبرهای باناخ یکی از مهمترین مباحث آنالیز روی جبرهای باناخ است که اولین بار توسط جانسون در سال ۱۹۷۲ در مقاله‌ی [۲۹] معرفی و مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. در ادامه ریاضیدانان متعددی انواع مفاهیم میانگین‌پذیری و شرایط معادل آن‌ها را بررسی کردند. یکی از این مفاهیم، φ– میانگین‌پذیری جبرهای باناخ است که در سال ۲۰۰۸ توسط لائو، کانیوت و پیم در [۳۲] و[۳۳]، تعریف شده است. این مفهوم، در واقع تعمیمی از مفهوم میانگین‌پذیری چپ جبرهای لائو، معرفی شده در [۳۴] می‌باشد؛ در ادامه با این مفهوم آشنا می‌شویم و مفهوم جدیدی به نام شبه φ–میانگین‌پذیری را معرفی و مطالعه می‌کنیم که در واقع تعمیمی از مفهوم φ– میانگین‌پذیری است؛ مراجع [۴۲] و [۴۳] را ببینید.

در این پایان‌نامه منظور از $\Delta(\mathcal{A})$، مجموعه‌ی متشکل از تمام تابعک‌های ناصفر خطی و ضربی روی $\mathcal{A}$ است. این پایان‌نامه را با تعریف اساسی زیر که نقش مهمی در ادامه‌ی کار دارد شروع می‌کنیم.

۲–۱ **تعریف.** فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. در این صورت تور $(\mathbf{m}_\alpha) \subseteq \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ را

یک φ–قطر تقریبی برای $\mathcal{A}$ گوییم هرگاه

$$\varphi(\pi(m_\alpha)) \longrightarrow ۱, \quad \|a \cdot m_\alpha - \varphi(a)m_\alpha\| \longrightarrow ۰ \quad (a \in \mathcal{A}).$$

توجه کنیم که تور $(\mathbf{m}_\alpha)$ در اینجا ممکن است بی‌کران باشد.

۲–۲ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. در این صورت

(الف) $\mathcal{A}$ را شبه φ– میانگین‌پذیر گوییم هرگاه یک φ–قطر تقریبی داشته باشد.

(ب) $\mathcal{A}$ را شبه ۰–میانگین پذیر گوییم هرگاه یک همانی تقریبی راست داشته باشد.

(ج) $\mathcal{A}$ را شبه میانگین پذیر مشخصه‌ای گوییم هرگاه برای هر $\varphi \in \Delta(\mathcal{A}) \cup \{۰\}$ شبه φ–میانگین‌پذیر باشد.

۲–۳ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. در این صورت تور $(a_\alpha) \subseteq \mathcal{A}$ را یک φ–میانگین تقریبی برای $\mathcal{A}$ گوییم هرگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\varphi(a_\alpha) \longrightarrow ۱, \quad \|aa_\alpha - \varphi(a)a_\alpha\| \longrightarrow ۰ \quad (a \in \mathcal{A}).$$

توجه کنیم (a_α) در اینجا ممکن است بی‌کران باشد.

به طور مشابه می‌توان مفهوم φ–میانگین تقریبی ضعیف را با گذاشتن شرط همگرایی ضعیف بجای همگرایی در نرم در تعریف بالا تعریف کرد.

۲–۴ قضیه (مازور). *اگر $\mathcal{X}$ یک فضای نرم‌دار و $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ یک تور در $\mathcal{X}$ باشد به طوری که $\xi_\alpha \xrightarrow{w} \xi$، آن‌گاه $\xi \in \overline{\mathrm{co}(\{\xi_\alpha \ : \ \alpha \in D\})}^{\|\cdot\|}$.*

اثبات. به بخش ۳–۳ از [۴] رجوع کنید. □

در قضیه‌ی زیر شرایط معادل با مفهوم φ– میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را از [۳۲]، قضیه‌ی ۱.۴ بیان می‌کنیم.

۲–۵ قضیه. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. در این صورت $\mathcal{A}$، φ– میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر یک φ–میانگین تقریبی کران‌دار داشته باشد.*

در قضیه‌ی زیر نیز شرایط معادل با مفهوم شبه φ- میانگین‌پذیری جبرهای باناخ که در ارتباط با وجود φ-میانگین‌های تقریبی است را بیان می‌کنیم و به طور مکرر در اثبات قضیه‌های این رساله از آن استفاده می‌کنیم.

۲-۶ قضیه. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند.*

(الف) *$\mathcal{A}$، شبه φ- میانگین‌پذیر است.*

(ب) *$\mathcal{A}$، یک φ-میانگین تقریبی ضعیف دارد.*

(ج) *$\mathcal{A}$، یک φ-میانگین تقریبی دارد.*

اثبات. (الف)⇐(ب). فرض کنیم $\mathcal{A}$، شبه φ-میانگین‌پذیر باشد. در این‌صورت یک φ-قطر تقریبی مثل $(\mathbf{m}_\alpha)$ برای $\mathcal{A}$ وجود دارد. اکنون برای هر α قرار می‌دهیم

$$a_\alpha := \pi(\mathbf{m}_\alpha)$$

و نشان می‌دهیم تور (a_α) یک φ-میانگین تقریبی ضعیف برای $\mathcal{A}$ است. در واقع، $\varphi(a_\alpha) \longrightarrow ۱$ و برای هر $f \in \mathcal{A}^*$ و $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$|\langle f, aa_\alpha - \varphi(a)a_\alpha \rangle| \leq \|f \circ \pi\| \; \|a \cdot m_\alpha - \varphi(a)m_\alpha\| \longrightarrow ۰.$$

لذا نتیجه حاصل می‌شود.

(ب)⇐(ج). با توجه به فرض تور $(a_\alpha) \subseteq \mathcal{A}$ موجود است به طوری که برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\varphi(a_\alpha) \longrightarrow ۱, \quad aa_\alpha - \varphi(a)a_\alpha \xrightarrow{w} ۰.$$

لذا برای هر مجموعه‌ی متناهی $F = \{a_۱, a_۲, ..., a_n\} \subset \mathcal{A}$ داریم

$$(a_۱ a_\alpha - \varphi(a_۱)a_\alpha, ..., a_n a_\alpha - \varphi(a_n)a_\alpha, \varphi(a_\alpha)) \xrightarrow{w} (۰, ..., ۰, ۱) \in \mathcal{A}^{(n)} \times \mathbb{C}.$$

درنتیجه بنا به قضیه‌ی مازور داریم

$$(۰, ..., ۰, ۱) \in \overline{co(\{(a_۱ a_\alpha - \varphi(a_۱)a_\alpha, ..., a_n a_\alpha - \varphi(a_n)a_\alpha, \varphi(a_\alpha))\})}^{\|\cdot\|}.$$

لذا برای عدد دلخواه $\varepsilon > ۰$، عنصر $a_{\varepsilon,F} \in \operatorname{co}\{a_\alpha\}$ موجود است به طوری که برای هر $a \in F$ داریم

$$\|aa_{\varepsilon,F} - \varphi(a)a_{\varepsilon,F}\| < \varepsilon, \quad |\varphi(a_{\varepsilon,F}) - ۱| < \varepsilon.$$

بنابراین تور (b_β) موجود است که یک φ-میانگین تقریبی برای $\mathcal{A}$ می‌باشد.

(ج)$\Leftarrow$(الف). عنصر $a_\circ \in \mathcal{A}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $\varphi(a_\circ) = ۱$ و برای هر α تعریف می‌کنیم $\mathbf{m}_\alpha := a_\alpha \otimes a_\circ$. به راحتی دیده می‌شود که $\mathbf{m}_\alpha$ یک φ−قطر تقریبی برای $\mathcal{A}$ می‌باشد. $\square$

بعنوان یک نتیجه از قضیه‌ی ۳−۳ می‌توان قضیه‌ی پایین را داشت که نشان می‌دهد هر دو مفهوم شبه میانگین‌پذیری و φ−میانگین‌پذیری یک جبر باناخ شبه φ−میانگین‌پذیری آن را نتیجه می‌دهد.

۲−۷ قضیه. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. در این صورت اگر $\mathcal{A}$، φ−میانگین‌پذیر یا شبه میانگین‌پذیر باشد، آن‌گاه $\mathcal{A}$ شبه φ−میانگین‌پذیر است.*

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{A}$، φ−میانگین‌پذیر باشد. در این صورت از قضیه‌ی ۲−۵ نتیجه می‌شود $\mathcal{A}$ یک φ−میانگین تقریبی کران‌دار دارد. بنابراین باتوجه به قضیه‌ی ۳−۳، φ−میانگین‌پذیری $\mathcal{A}$ شبه φ−میانگین‌پذیری آن را نتیجه می‌دهد.

اکنون فرض کنیم $\mathcal{A}$ شبه میانگین‌پذیر باشد. در این‌صورت نگاشت خطی و کران‌دار $\Lambda : \mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ را برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم

$$\Lambda(a \otimes b) = a\varphi(b).$$

واضح است که $\|\Lambda\| \leqslant \|\varphi\| \leq ۱$. با توجه به فرض یک قطر تقریبی مانند $\mathbf{m}_\alpha$ با نمایش زیر برای $\mathcal{A}$ وجود دارد

$$m_\alpha = \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^{(\alpha)} \otimes b_i^{(\alpha)},$$

بنابر این اگر برای هر α قرار دهیم $a_\alpha := \Lambda(\mathbf{m}_\alpha)$، آن‌گاه با توجه به اینکه $\pi(\mathbf{m}_\alpha)$ یک همانی تقریبی برای $\mathcal{A}$ است به سادگی نتیجه می‌شود که $\phi(a_\alpha) = \phi(\pi(\mathbf{m}_\alpha)) \longrightarrow ۱$ و همچنین برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\begin{aligned}
\|aa_\alpha - \varphi(a)a_\alpha\| &= \|\sum_{i=۱}^{\infty} aa_i^{(\alpha)}\varphi(b_i^{(\alpha)}) - \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^{(\alpha)}\varphi(b_i^{(\alpha)}a)\| \\
&= \|\Lambda(a \cdot m_\alpha) - \Lambda(m_\alpha \cdot a)\| \\
&\leq \|a \cdot m_\alpha - m_\alpha \cdot a\| \longrightarrow \circ;
\end{aligned}$$

یعنی، (a_α) یک φ−میانگین تقریبی برای $\mathcal{A}$ است و لذا $\mathcal{A}$ شبه φ−میانگین‌پذیر است. $\square$

۲−۸ تذکر. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد، $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ منظور از یک مشتق نقطه‌ای ناصفر در φ یک تابعک ناصفر d در A^* است به طوری که برای هر $a, b \in A$ داریم

$$d(ab) = d(a)\varphi(b) + \varphi(a)d(b).$$

۲–۹ قضیه. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. در این صورت اگر $\mathcal{A}$، شبه φ–میانگین‌پذیر باشد، آن‌گاه هر مشتق نقطه‌ای کران‌دار در φ روی $\mathcal{A}$ برابر با صفر است.*

اثبات. فرض کنیم $d : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ یک مشتق نقطه‌ای کران‌دار در φ باشد. با توجه به فرض $\mathcal{A}$ یک φ–میانگین تقریبی مانند (a_α) دارد. از طرفی بنا به تعریف مشتق نقطه‌ای برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$d(aa_\alpha - \varphi(a)a_\alpha) = d(aa_\alpha) - \varphi(a)d(a_\alpha) = \varphi(a_\alpha)d(a).$$

بنابراین برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم $d(aa_\alpha - \varphi(a)a_\alpha) \longrightarrow d(a)$. از طرف دیگر

$$|d(aa_\alpha - \varphi(a)a_\alpha)| \leq \|d\| \; \|aa_\alpha - \varphi(a)a_\alpha\| \longrightarrow 0$$

و این نشان می‌دهد که $d = 0$. □

این بخش را با مثال‌های زیر به پایان می‌بریم که نشان می‌دهد عکس قضیه‌ی ۲–۷ درست نمی‌باشد. قبل از بیان این مثال‌ها، به این نکته توجه کنیم که فضای $\mathcal{A} = C^1([0,1])$ متشکل از همه توابع با مشتق پیوسته با اعمال نقطه‌ای و نرم زیر یک جبر باناخ است

$$|f| = |f|_\infty + |f'|_\infty \quad (f \in \mathcal{A}).$$

برای $\mathcal{A}$ داریم

$$\Delta(\mathcal{A}) = \{\varphi_t \; : \; t \in [0,1]\},$$

که در آن $\varphi_t \in \mathcal{A}^*$ با دستور $\varphi_t(f) = f(t)$ تعریف می‌شود. برای مشاهده‌ی این خاصیت، فرض کنیم $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ و $M = \ker(\varphi)$. چون φ ناصفر است، بستار M فضای $C^1[0,1]$ نیست. همچنین M نقاط $[0,1]$ را جدا می‌کند؛ زیرا اگر $t_1, t_2 \in [0,1]$ با شرط $t_1 \neq t_2$ را در نظر بگیریم، تابع $f \in C^1[0,1]$ وجود دارد به طوری که $f(t_1) \neq f(t_2)$. اکنون تابع $g = f - \varphi(f)$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که

$$g \in \ker(\varphi), \quad g(t_1) \neq g(t_2).$$

از قضیه‌ی استون – وایراشتراس نتیجه می‌شود که $t \in [0,1]$ وجود دارد به طوری که برای هر $f \in M$ داریم $f(t) = 0$. بنابراین برای هر $f \in M$ داریم $(f - \varphi(f))(t) = 0$. پس برای هر $f \in C^1[0,1]$ داریم $f(t) = \varphi(f)$. در نتیجه برای هر $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$، عدد $t \in [0,1]$ وجود دارد به طوری که $\varphi = \varphi_t$.

۲—۱۰ مثال. (الف) فرض کنیم $\mathcal{A} = C^{1}[0, 1]$. در این صورت برای هر t، نگاشت $f \mapsto f'(t)$ یک مشتق نقطه‌ای ناصفر از $\mathcal{A}$ به $\mathbb{C}$ است. لذا با توجه به قضیه‌ی ۲—۹ نتیجه می‌شود که $\mathcal{A}$ برای هر $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$، شبه φ− میانگین‌پذیر نیست.

(ب) فرض کنیم $\ell^{1}(\mathbb{N})$ متشکل از همه‌ی دنباله‌های $a := (a_n)$ باشد که

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

دراین صورت $\ell^{1}(\mathbb{N})$ همراه با جمع مولفه‌ای و ضرب اسکالر و ضرب $\diamond$ که به‌صورت زیر برای هر $a, b \in \ell^{1}(\mathbb{N})$ تعریف می‌شود یک جبر باناخ است

$$(a \diamond b)_n = \begin{cases} a_n b_n & n = 1 \\ a_1 b_n + a_n b_1 + a_n b_n & n > 1 \end{cases}$$

در ابتدا نشان می‌دهیم

$$\Delta(\ell^{1}(\mathbb{N})) = \{\varphi_1\} \cup \{\varphi_1 + \varphi_n : \quad n > 1\},$$

که در آن برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a \in \ell^{1}(\mathbb{N})$ تابعک φ_n با ضابطه‌ی $\varphi_n(a) = a_n$ تعریف می‌شود. در واقع به راحتی می‌توان دید که $\{\varphi_1\} \cup \{\varphi_1 + \varphi_n : \quad n > 1\} \subseteq \Delta(\ell^{1}(\mathbb{N}))$. برای اثبات عکس آن فرض کنیم $\varphi \in \Delta(\ell^{1}(\mathbb{N}))$. اکنون برای هر $n \in \mathbb{N}$ عنصر $\delta_n \in \ell^{1}(\mathbb{N})$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم

$$(\delta_n)_j = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ 0 & j > 1 \end{cases}$$

در این صورت با توجه به اینکه δ_1 یک همانی برای جبر $\ell^{1}(\mathbb{N})$ است، لذا باید داشته باشیم $\varphi(\delta_1) = 1$. حال اگر $n \neq 1$ و $\varphi(\delta_n) \neq 0$، آن‌گاه برای هر $1 < m \neq n$ با توجه به اینکه $\delta_n \diamond \delta_m = 0$، نتیجه می‌شود $\varphi(\delta_m) = 0$. از طرفی $\delta_n \diamond \delta_n = \delta_n$ لذا $\varphi(\delta_n) = 1$. بنابر این به راحتی می‌توان دید که $\varphi = \varphi_1 + \varphi_n$. اکنون نشان می‌دهیم که هیچ φ_1−میانگین تقریبی کران‌داری برای $\ell^{1}(\mathbb{N})$ وجود ندارد. در واقع، اگر (a_α) یک φ_1−میانگین تقریبی برای $\ell^{1}(\mathbb{N})$ باشد، آن‌گاه برای هر $a \in \ell^{1}(\mathbb{N})$ داریم

$$a_1^{(\alpha)} = \varphi_1(a_\alpha) \longrightarrow 1, \quad \|a \diamond a_\alpha - \varphi_1(a) a_\alpha\| \longrightarrow 0. \qquad (1)$$

بنابراین باتوجه به رابطه‌ی (۱) برای هر $n > 1$ داریم

$$|a_1^{(\alpha)} + a_n^{(\alpha)}| = \|\delta_n \diamond a_\alpha - \varphi_1(\delta_n) a_\alpha\| \longrightarrow 0$$

از طرفی با توجه به اینکه $a_1^{(\alpha)} \longrightarrow 1$ نتیجه می‌شود $a_n^{(\alpha)} \longrightarrow -1$. بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$\sup_\alpha \|a_\alpha\| = \sup_\alpha \sum_{i=1}^{\infty} |a_i^{(\alpha)}| = \infty;$$

یعنی (a_α) کران‌دار نیست. پس بنا به قضیه‌ی ۲—۵، $\ell^1(\mathbb{N})$ نمی‌تواند φ_1—میانگین‌پذیر باشد. از طرفی به سادگی دیده می‌شود که دنباله‌ی $(c_j) \subseteq \ell^1(\mathbb{N})$ که به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود یک φ_1—میانگین تقریبی برای $\ell^1(\mathbb{N})$ است

$$(c_j)_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ -1 & 1 < n \leq j \\ 0 & n > j \end{cases}$$

بنابراین $\ell^1(\mathbb{N})$ شبه φ_1—میانگین‌پذیر است. به علاوه به راحتی می‌توان بررسی کرد برای هر $n \in \mathbb{N}$ عنصر $\delta_n \in \ell^1(\mathbb{N})$ یک $\varphi_1 + \varphi_n$—میانگین است. پس $\ell^1(\mathbb{N})$، $\varphi_1 + \varphi_n$—میانگین‌پذیر است.

در اینجا به یک مثال دیگری اشاره می‌کنیم که جالب توجه است.

۲—۱۱ **مثال.** جبر باناخ $\mathcal{A}$، متشکل از تمام ماتریس‌های 3×3 بالا مثلثی روی $\mathbb{C}$ را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم $\Delta(\mathcal{A}) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ که در آن

$$\varphi_k([a_{ij}]) = a_{kk} \qquad (k = 1, 2, 3).$$

برای ماتریس دلخواه $B \in \mathcal{A}$ و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ داریم

$$\varphi(B) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \varphi(E_{ij}),$$

که در آن منظور از ماتریس E_{ij} ماتریسی است که همه درایه‌های آن برابر صفر هستند به جز درایه ij—ام که یک است. همچنین می‌دانیم که $E_{ii}E_{jj} = 0$ برای $j \neq i$ و $i, j = 1, 2, 3$. چون φ ضربی است، نتیجه می‌شود

$$\varphi(E_{11}E_{22}) = \varphi(E_{11})\varphi(E_{22}) = 0.$$

پس $\varphi(E_{11}) = 0$ یا $\varphi(E_{22}) = 0$. فرض کنیم $\varphi(E_{11}) \neq 0$. دراین صورت داریم

$$\varphi(E_{11}E_{33}) = \varphi(E_{11})\varphi(E_{33}) = 0.$$

چون $\varphi(E_{11}) \neq 0$، نتیجه می‌شود $\varphi(E_{33}) = 0$. همچنین داریم

$$\varphi(E_{12}) = \varphi(E_{12}E_{22}) = 0,$$

$$\varphi(E_{23}) = \varphi(E_{23}E_{33}) = 0,$$

$$\varphi(E_{13}) = \varphi(E_{13}E_{33}) = 0.$$

از طرفی

$$\varphi(E_{11}E_{11}) = \varphi(E_{11}).$$

پس $\varphi(E_{11}) = 1$. بنابراین $\varphi(B) = a_{11}$. به همین ترتیب اگر فرض کنیم $\varphi(E_{22}) \neq 0$، آن‌گاه نتیجه می‌شود $\varphi(B) = a_{22}$ و یا اگر و $\varphi(E_{33}) \neq 0$، آن‌گاه نتیجه می‌شود $\varphi(B) = a_{33}$. بنابراین

$$\Delta(\mathcal{A}) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}.$$

از طرف دیگر برای هر ماتریس B داریم

$$B \cdot E_{kk} = \varphi_k(B)E_{kk}, \quad \varphi_k(E_{kk}) = 1,$$

برای $k = 1, 3$. در نتیجه $\mathcal{A}$ ، φ_k–میانگین‌پذیر است.

در این قسمت به بررسی ویژگی‌های موروثی شبه φ–میانگین‌پذیری جبرهای باناخ می‌پردازیم. در ابتدا رابطه‌ی شبه φ–میانگین‌پذیری جبر باناخ $\mathcal{A}$ و ایده‌آل‌های چپ و بسته‌اش را بررسی می‌کنیم.

۲–۱۲ گزاره. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. همچنین فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ و بسته از $\mathcal{A}$ باشد که $I \not\subseteq \ker(\varphi)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(الف) I، شبه $\varphi|_I$–میانگین‌پذیر است.

(ب) $\mathcal{A}$، شبه φ–میانگین‌پذیر است.

اثبات. فرض کنیم (الف) برقرار است. در این صورت تور $(a_\alpha) \subseteq I$ موجود است که $\varphi|_I(a_\alpha) \longrightarrow 1$ و برای هر $b \in I$ داریم

$$\|ba_\alpha - \varphi|_I(b)a_\alpha\| \longrightarrow 0.$$

حال $\iota_\circ \in I$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\varphi|_I(\iota_\circ) = 1$. در این صورت اگر قرار دهیم

$$\iota_\alpha := \iota_\circ a_\alpha,$$

آن‌گاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم $\varphi(\iota_\alpha) = \varphi|_I(\iota_\circ a_\alpha) \longrightarrow 1$ و

$$\begin{aligned} \|a\iota_\alpha - \varphi(a)\iota_\alpha\| &= \|a\iota_\circ a_\alpha - \varphi(a)\iota_\circ a_\alpha\| \\ &= \|(a\iota_\circ)a_\alpha - \varphi(a)\varphi|_I(\iota_\circ)a_\alpha\| + \|\varphi(a)\varphi|_I(\iota_\circ)a_\alpha - \varphi(a)\iota_\circ a_\alpha\| \\ &\leq \|(a\iota_\circ)a_\alpha - \varphi|_I(a\iota_\circ)a_\alpha\| + \|a\|\,\|\iota_\circ a_\alpha - \varphi|_I(\iota_\circ)a_\alpha\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{A}$، شبه φ−میانگین‌پذیر است.

برای اثبات عکس، فرض کنیم (ب) برقرار باشد. در این صورت تور $(a_\alpha) \subseteq \mathcal{A}$ موجود است که برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\varphi(a_\alpha) \longrightarrow ١, \qquad \|aa_\alpha - \varphi(a)a_\alpha\| \longrightarrow ٠$$

اگر $\iota_\circ \in I$ را چنان انتخاب کنیم که $\varphi(\iota_\circ) = ١$، آن‌گاه برای هر α با تعریف $b_\alpha := a_\alpha\iota_\circ$ داریم $b_\alpha \in \mathcal{I}$ و

$$\begin{aligned} \varphi|_I(b_\alpha) &= \varphi(a_\alpha\iota_\circ) \\ &= \varphi(a_\alpha) \longrightarrow ١. \end{aligned}$$

همچنین برای هر $b \in I$ روابط زیر برقرارند

$$\|bb_\alpha - \varphi|_I(b)b_\alpha\| \leq \quad \|ba_\alpha - \varphi|_I(b)a_\alpha\| \ \|\iota_\circ\| \longrightarrow ٠;$$

و این نشان می‌دهد که I، شبه $\varphi|_I$−میانگین‌پذیر است. □

از قضیه‌ی قبلی نتیجه‌ی زیر را برای ایده‌آل‌های دوطرفه و بسته‌ی جبر باناخ $\mathcal{A}$ به دست می‌آوریم. قبل از بیان این نتیجه دقت کنیم که اگر I یک ایده‌آل دوطرفه و بسته از $\mathcal{A}$ باشد، آن‌گاه

$$\Delta(I) = \{\varphi|_I : \quad \varphi \in \Delta(\mathcal{A}), I \nsubseteq \ker(\varphi)\}.$$

در واقع، برای هر $\psi \in \Delta(I)$ عنصر $\iota_\circ \in I$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\psi(\iota_\circ) = ١$. اکنون تابعک $\varphi \in \mathcal{A}^*$ را برای هر $a \in \mathcal{A}$ با ضابطه‌ی

$$\varphi(a) = \psi(a\iota_\circ)$$

تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم φ ضربی است. فرض کنیم $a, b \in \mathcal{A}$. در این صورت

$$\begin{aligned} \varphi(a)\varphi(b) &= \psi(a\iota_\circ)\psi(b\iota_\circ) \\ &= \psi(\iota_\circ a\iota_\circ)\psi(b\iota_\circ) \\ &= \psi(\iota_\circ a)\psi(b\iota_\circ) \\ &= \psi(\iota_\circ ab\iota_\circ) \\ &= \psi(ab\iota_\circ) \\ &= \varphi(ab); \end{aligned}$$

همچنین اگر $\varphi' \in \Delta(\mathcal{A})$ به طوری که $\varphi'|_I = \psi$، آن‌گاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \psi(a\iota_\circ) \\ &= \varphi'(a\iota_\circ) \\ &= \varphi'(a)\varphi'(\iota_\circ) \\ &= \varphi'(a)\psi(\iota_\circ) \\ &= \varphi'(a).\end{aligned}$$

۲—۱۳ نتیجه. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ شبه میانگین‌پذیر مشخصه‌ای و I یک ایده‌آل دوطرفه و بسته از $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت I، شبه میانگین‌پذیر مشخصه‌ای است اگر و تنها اگر دارای همانی تقریبی راست باشد.*

در ادامه‌ی بحث، هدف ما بررسی این مطلب است که شبه میانگین‌پذیری مشخصه‌ای $\mathcal{A}$ چه ارتباطی با شبه میانگین‌پذیری مشخصه‌ای $I(\varphi) = \ker(\varphi)$ دارد و بر عکس.

۲—۱۴ نتیجه. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. در این صورت $\mathcal{A}$، شبه میانگین‌پذیر مشخصه‌ای است اگر و تنها اگر $I(\varphi)$، شبه میانگین‌پذیر مشخصه‌ای باشد.*

اثبات. دقت کنیم که $I(\varphi)$ یک ایده‌آل دو طرفه از $\mathcal{A}$ است و $\Delta(I(\varphi)) = \Delta(\mathcal{A})\backslash\{\varphi\}$. بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۲—۱۲، کافی است که نشان دهیم $I(\varphi)$ همانی تقریبی راست دارد اگر و تنها اگر $\mathcal{A}$، شبه $\varphi-$ میانگین‌پذیر باشد و همانی تقریبی راست داشته باشد. برای این کار فرض کنیم (u_α) یک همانی تقریبی راست برای $I(\varphi)$ باشد. عنصر $a_\circ \in \mathcal{A}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\varphi(a_\circ) = ۱$. اگر برای هر α قرار می‌دهیم

$$e_\alpha := u_\alpha - a_\circ u_\alpha + a_\circ,$$

آن‌گاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ به وضوح داریم $a - aa_\circ \in I(\varphi)$ و همچنین

$$\begin{aligned}\|ae_\alpha - a\| &= \|au_\alpha - aa_\circ u_\alpha + aa_\circ - a\| \\ &= \|(a - aa_\circ)u_\alpha - (a - aa_\circ)\| \longrightarrow \circ.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که (e_α) یک همانی تقریبی راست برای $\mathcal{A}$ است.

در ادامه می‌خواهیم نشان دهیم $\mathcal{A}$، شبه φ−میانگین‌پذیر نیز است. برای این کار برای هر α قرار می‌دهیم

$$b_\alpha := a_\circ - a_\circ u_\alpha.$$

بنابراین برای هر $b \in I(\varphi)$ داریم

$$\|bb_\alpha\| = \|(ba_\circ) - (ba_\circ)u_\alpha\| \longrightarrow \circ.$$

به وضوح برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم $aa_\circ - \varphi(a)a_\circ \in I(\varphi)$. پس $\varphi(a_\circ b_\alpha) = \varphi(b_\alpha) = \varphi(a_\circ) = ۱$ و

$$\|a(a_\circ b_\alpha) - \varphi(a)(a_\circ b_\alpha)\| = \|(aa_\circ - \varphi(a)a_\circ)b_\alpha)\| \longrightarrow \circ$$

و این یعنی $(a_\circ b_\alpha)$ یک φ−میانگین تقریبی برای $\mathcal{A}$ است. بنابراین $\mathcal{A}$، شبه φ−میانگین‌پذیر است.

برعکس، عنصر $a_\circ \in \mathcal{A}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\varphi(a_\circ) = ۱$. به راحتی دیده می‌شود $\mathcal{A} = I(\varphi) \oplus \mathbb{C}a_\circ$. حال فرض کنیم به ترتیب (e_β) و (a_α) همانی تقریبی راست و φ−میانگین تقریبی برای $\mathcal{A}$ باشند. در این صورت برای هر α و β داریم

$$e_\beta = b_\beta + \lambda_\beta a_\circ, \quad a_\alpha = b_\alpha + \lambda_\alpha a_\circ \quad (b_\beta, b_\alpha \in I(\varphi),\ \lambda_\beta, \lambda_\alpha \in \mathbb{C}).$$

با توجه به تعریف همانی تقریبی راست و φ−میانگین تقریبی نتیجه می‌شود

$$\lambda_\beta \longrightarrow ۱, \quad \lambda_\alpha \longrightarrow ۱.$$

بنابراین اگر برای هر α و β قرار دهیم $u_{\alpha,\beta} := b_\beta - b_\alpha$، آن‌گاه برای هر $b \in I(\varphi)$ داریم

$$\begin{aligned}\|bu_{\alpha,\beta} - b\| &= \|bb_\beta - bb_\alpha - b\| = \|bb_\beta + \lambda_\beta ba_\circ - \lambda_\beta ba_\circ - bb_\alpha - b\| \\ &\leq \|be_\beta - b\| + \|bb_\alpha + \lambda_\beta ba_\circ\| \\ &\leq \|be_\beta - b\| + \|ba_\alpha\| + \|\lambda_\beta ba_\circ - \lambda_\alpha ba_\circ\| \longrightarrow \circ.\end{aligned}$$

در نتیجه تور $(u_{\alpha,\beta})$ یک همانی تقریبی راست برای $I(\varphi)$ است. □

۲−۱۵ قضیه. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و M یک ایده‌آل با هم‌بعد یک در $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت یا $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ وجود دارد به طوری که $M = \ker(\varphi)$ یا $\mathcal{A}^۲ \subseteq M$.*

اثبات. گزاره‌ی ۱.۳.۳۷ از مرجع [۹] را ببینید. □

۲—۱۶ نتیجه. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ جابجایی و شبه میانگین‌پذیر مشخصه‌ای باشد. در این صورت هر ایده‌آل دوطرفه و بسته از $\mathcal{A}$ با همبعد متناهی شبه میانگین‌پذیر مشخصه‌ای است.*

اثبات. فرض کنیم I یک ایده‌آل از $\mathcal{A}$ باشد که $\dim(\mathcal{A}/I) = n$. در این صورت یک زنجیر از ایده‌آل‌های $\mathcal{A}$ به شکل زیر وجود دارد

$$I = I_۰ \lhd I_۱ \lhd I_۲ \lhd \dots \lhd I_n = \mathcal{A}$$

به طوری که برای هر $i = ۱, ۲, \dots, n$، $I_{i-۱}$ یک ایده‌آل بسته از I_i است و $\dim(I_i/I_{i-۱}) = ۱$. بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۲—۱۵، و اینکه $I_{n-۱}$ یک ایده‌آل بسته از $\mathcal{A}$ با هم‌بعد یک است دو حالت می‌تواند اتفاق بیفتد.

(۱) $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ وجود دارد به طوری که $I_{n-۱} = \ker(\varphi)$.

(۲) $\mathcal{A}^۲ \subseteq I_{n-۱}$.

اما حالت دوم نمی‌تواند اتفاق بیفتد. چون با توجه به فرض $\mathcal{A}$ همانی تقریبی راست دارد و این نتیجه می‌دهد که $\overline{\mathcal{A}^۲} = \mathcal{A}$. لذا از بسته بودن $I_{n-۱}$ به دست می‌آوریم $I_{n-۱} = \mathcal{A}$ که تناقض است. بنابراین باید داشته باشیم $I_{n-۱} = \ker(\varphi)$ که در این حالت از نتیجه‌ی ۲—۱۴، به دست می‌آوریم $I_{n-۱}$ شبه میانگین‌پذیر مشخصه‌ای است. بنابراین اثبات را می‌توان با استقرا کامل کرد.□

قبل از اینکه به نتایج بعدی بپردازیم توجه کنیم که اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$، آن‌گاه برای ایده‌آل دوطرفه و بسته‌ی I از $\mathcal{A}$، مشخصه‌ی یکتای $\psi \in \Delta(\mathcal{A}/I)$ با ویژگی $\psi \circ q = \varphi$ موجود است اگر و تنها اگر $I \subseteq \ker(\varphi)$، که در آن منظور از نگاشت $q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$ همان نگاشت خارج قسمتی متعارف است.

۲—۱۷ گزاره. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ، I یک ایده‌آل دوطرفه و بسته‌ی آن و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ به طوری باشد که $I \subseteq \ker(\varphi)$. همچنین فرض کنیم که I دارای همانی تقریبی راست کران‌دار و $\mathcal{A}/I$ ، شبه ψ—میانگین‌پذیر برای $\psi \in \Delta(\mathcal{A}/I)$ باشد. در این صورت $\mathcal{A}$، شبه φ—میانگین‌پذیر است.*

اثبات. Γ را مجموعه‌ی همه‌ی جفتهای (F, ε) برای $\varepsilon > ۰$ و هر مجموعه‌ی متناهی $F \subseteq \mathcal{A}$، در نظر می‌گیریم. بنابراین Γ با ترتیب زیر یک مجموعه‌ی جهت دار است.

$$(F_۱, \varepsilon_۱) \leq (F_۲, \varepsilon_۲) \Longleftrightarrow (F_۱ \subseteq F_۲ \quad , \quad \varepsilon_۲ \leq \varepsilon_۱).$$