بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

ادغام متریک شوارتس شیلد و رابرتسون واکردر جهان غیر تخت

پژوهشگر:

وزیر طاهری

استاد راهنما:

دکتر بهروز ملک الکلامی

پایان نامه کارشناسی ارشدرشته فیزیک

اسفند۸۹

تقدیم به:

نخستین معلمان زندگی ام

پدرم

که هیچگاه از سختی ومحنت سخنی نگفت

ومرحوم مادرم

که جزحرف خوشبختی ودعای خیر، سخنی نگفت

تقدیر وتشکر

سپاش خداوند یکتـا را کـه عنایـت فرمـود تـا بـار دیگـر مقطعـی از تحصـیلاتم را بـا موفقیـت بـه پایـان برسـانم. در ابتـدا از تـلاش‌هـای مسـتمر و دلسـوزانه اسـتاد ارجمنـدم جنـاب آقـای دکتـر بهروز ملک الکلامی، الگـوی برجسـته اخـلاق و علـم کـه بـا راهنمـایی‌هـای خـود در تمـام دوران تحصیل و کلیه مراحل این پایـان نامـه، بنـده را بـه صـحت سـلامتی علمـی واخلاقـی بـه سـرمنزل مقصود رسانیده اند.

سپاسگذاری می کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه هدف بررسی خواص ادغام متریک‌های شوارتس‌شیلد و رابرتسون – واکر برای جهان تخت و غیرتخت است برای جهان تخت متریک‌های شوارتس‌شیلد و رابرتسون – واکر در مختصات همراه $r = \frac{۲m}{۱-C}$ ادغام می‌شود. برای مقدار مشخصی از جرم جسم این مختصات ممکن است از شعاع شوارتس‌شیلد بزرگ‌تر باشد.

اما برای جهان غیر تخت بحث پیچیده‌تر است زیرا با معادلات درجه سوم برخورد می کنیم که دارای پیچیده است برای جهان بسته می‌توان نشان داد که معادله دارای یک ریشه مثبت است. وقتی جهان را باز در نظر می‌گیریم جواب مثبتی وجود ندارد که نشان می‌دهد ادغامی صورت نمی‌گیرد. البته با ساده‌سازی جواب‌ها، نتایج دیگری به دست می‌آید.

فهرست

۴ ادغام متریک شوارتس شیلد ومتریک روبرتسون- واکر

مقدمه

جواب‌های همگن و همسانگرد معادلات میدان انیشتین منجر به متریک رابرتسون – واکر می‌شوند، که از جواب‌های مهم در کیهان‌شناسی به شمار می‌روند و در توصیف جهان بزرگ مقیاس نقش اساسی را بر عهده دارند از طرف دیگر جواب‌های متقارن کروی ایستای معادلات میدان انیشتین به متریک شوارتس‌شیلد منجر می‌شود که فضا زمان اطراف یک جرم کروی متقارن را توصیف می‌کند. بنابراین هرگاه جهان بزرگ را جرم کروی متقارن فرض کنیم پس باید بتوان دو متریک فوق را به نوعی به همدیگر مربوط نمود به عبارتی این دو متریک در نواحی از فضا زمان باید دارای خواص مشترک باشند و بتوان آنها را در یکدیگر ادغام کرد. که با انجام دادن این کار نواحی از فضا زمان برای سه جهان پهن، باز و بسته مشخص می‌شود.

در این رساله ابتدا در فصل اول به بررسی معادله انیشتین می‌پردازیم سپس در فصل‌های دوم و سوم به ترتیب به متریک‌های شوارتس‌شیلد و رابرتسون – واکر پرداخته و در فصل چهارم نیز ادغام دو متریک را انجام داده و نتایج آن را بیان کرده و به مباحث جانبی آنها به طور مبسوط پرداخته خواهد شد. بر طبق اندیشه‌های نیوتن، میدان گرانشی موجود در هر ناحیه از فضا به وسیله توزیع ماده تعیین می‌شود. یعنی می‌توان تانسور سنجه فضا زمان را با معلوم بودن توزیع ماده در سراسر فضا زمان محاسبه کرد. بنابراین نخست یک کمیت تانسوری را جستجو می‌کنیم که این توزیع ماده را نسبت به هر چارچوبی در فضا زمان توصیف کند و سپس سعی می‌کنیم این تانسور را با تانسور سنجه مربوط سازیم تانسوری که مورد نظر قرار می‌گیرد تانسور تکانه انرژی است. انرژی الکترومغناطیس و ماده

هر دو در مولفه‌های این تانسور سهم دارند ولی چون مطابق نظریه نسبیت خاص، جرم و انرژی با هم

برابر هستند.، پس انتظار می‌رود که همه صورت‌های انرژی از جمله نوع الکترومغناطیس در میدان گرانشی سهم داشته باشند چون تانسور تکانه انرژی فقط در چارچوب لخت تعریف شده است، پس اکنون باید این تعریف را گسترش داد تا بتوان آن را در یک چارچوب مختصات عام در فضا زمان مورد استفاده قرار داد. این مطلب را می‌توان بدین صورت انجام داد. در مجاورت هر نقطه از یک میدان گرانشی می‌توان برای مدت کوتاهی یک چارچوب لخت دکارتی قائم برقرار کرد، متناظر با این چارچوب و ساعت‌های همراه آن می‌توان محورهای دکارتی قائم $oy^{o}y^{۱}y^{۲}y^{۳}$ را در ناحیه‌ای محیط بر نقطه متناظر P از فضا زمان برقرار کرد.

اکنون می‌توان معادلات تبدیلی را به دست آورد که مختصات y^{μ} یک رویداد را به مختصات x^{i} آن نسبت به یک چارچوب مختصات دیگر مربوط می‌سازند. در این صورت اگر $T^{(\cdot)}_{\mu\nu}$ مولفه‌های تانسور تکانه انرژی در چارچوب y در نقطه P باشند از معادلات مناسب برای تبدیل تانسورها می‌توان اندازه مولفه‌های آن را در چارچوب x در این نقطه تعیین کرد. بدین ترتیب تانسور هموردای انرژی حرکت دارای مولفه‌های $T_{\mu\nu}$ در چارچوب x خواهد بود که به صورت زیر است.

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial y^{r}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial y^{s}}{\partial x^{\nu}}T^{(\cdot)}_{rs}$$

چون تانسورهای هموردا و ناهموردا نسبت به محورهای دکارتی قائم غیر قابل تمیز از یکدیگر هستند. پس می‌توان $T^{(\cdot)}_{rs}$ را مولفه‌های یک تانسور پادوردا در چارچوب y نیز فرض کرد. بنابراین مولفه‌های همین تانسور در چارچوب x توسطه معادله زیر مشخص می‌شود.

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{r}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{s}}T^{(\cdot)}_{rs}$$

این تبدیل را می‌توان در هر نقطه از فضا زمان انجام داد و بدین ترتیب برای چارچوب x یک میدان تانسور تکانه انرژی به وجود آورد. معادله تانسوری زیر را در نظر بگیرید

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = ۰$$

پس از نوشتن برحسب مختصات y^{μ} در هر نقطه، این رابطه به شکل زیر ساده می‌شود

$$T^{(۰)}_{\mu\nu,\nu} = ۰$$

معادله بالا برای تمام چارچوب‌ها صادق است از این رو واگرایی تانسور تکانه انرژی برابر صفر می‌شود. به این ترتیب اگر قرار باشد این تانسور به تانسور سنجه $g_{\mu\nu}$ مربوط شود باید رابطه به صورتی باشد که معادله $T^{\mu\nu}_{,\nu}$ را ایجاب کند[۱].

اکنون با استفاده از معادله

$$g^{\mu\nu}_{,\nu} = ۰$$

می‌توان نوشت

$$T^{\mu\nu} = \lambda g^{\mu\nu}$$

که λ یک ثابت جهانی است. اما اگر در ناحیه‌ای ماده و انرژی وجود نداشته باشد

$$T^{\mu\nu} = ۰.$$

و این متضمن آن است که

$$g^{\mu\nu} = ۰$$

که مسلما درست نیست

بر طبق نظریه نیوتن اگر ρ چگالی ماده باشد، میدان گرانشی را می‌توان از یک تابع پتانسیل V که در عادله زیر صدق می کند بدست آورد.

$$\nabla^2 V = 4\pi G\rho$$

در این رابطه G ثابت گرانش است[۲].

ما به یک تانسور پادوردای متقارن رتبه دوم نیاز داریم که شامل مشتق‌های مرتبه دوم $g_{\mu\nu}$ با واگرایی صفر باشد که می‌توان فرض کرد $T^{\mu\nu}$ با آن متناسب است. تانسور انیشتین دارای همه این خصوصیات است. و در نتیجه می‌توان نوشت

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -kT^{\mu\nu}$$

که در آن k ضریب تناسبی است که باید با G بستگی داشته باشد معادله بالا معادله گرانش انیشتین است با پایین آوردن شاخص‌های به طور متوالی می‌توان رابطه مذکور را به دو صورت نوشت.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -kT_{\mu\nu}$$

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\nu} R = -kT^{\mu}_{\nu}$$

اگر معادله بالا تنجانده شود حاصل عبارت به صورت زیر در می‌آید.

$$R = kT$$

که در آن $T = T^{\mu}_{\mu}$ است، اکنون معادله گرانش انیشتین به صورت زیر است.

$$R_{\mu\nu} = k(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} T - T_{\mu\nu})$$

در نسبیت عام فضا زمان به عنوان یک رویه چهار بعدی در نظر گرفته می‌شود برای اینکه با تغییر دستگاه مختصات کمیت‌های فیزیکی به نحوی تبدیل شوند که شکل معادلات فیزیک تغییر نکند. و هموردا باشد، کمیت‌های فیزیکی در نسبیت عام را به صورت تانسوری می‌نویسند. تبدیل مولفه‌ها از یک سیستم مختصات به سیستم مختصات دیگر به صورت زیر می‌باشد.

$$T_{\nu}^{/\mu} = \frac{\partial x^{/\mu}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{/\nu}} T_{\beta}^{\alpha}$$

همچنین با استفاده از متریک به ترتیب نمادهای کریستوفل[۱] ، تانسور خمش ریمان[۲] ، تانسور ریچی[۳] و تانسور اسکالر ریچی[۴] را به صورت زیر به دست آورد.

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = g^{\mu\rho}(g_{\nu\rho,\sigma} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\sigma,\rho})$$

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^{\mu} - \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}$$

$$R_{\nu\sigma} = R_{\nu\mu\sigma}^{\mu}$$

$$R = g^{\nu\sigma}R_{\nu\sigma} = R_{\nu}^{\nu}$$

از آنجا که مشتق معمولی کمیت‌های تانسوری یک تانسور نیست، برای هموردایی معادلات فیزیکی مشتق هموردای یک تانسور لورنتسی که حاصلش یک تانسور دیگر با مرتبه هموردای بالاتر می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T_{\nu,\dot{\sigma}}^{\mu} = T_{\nu,\sigma}^{\mu} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}T_{\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}T_{\rho}^{\mu}$$

که در آن $T_{\nu,\sigma}^{\mu} = \frac{\partial T_{\nu}^{\mu}}{\partial X^{\sigma}}$ است

معادلات انیشتین در نسبیت عام به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{۱}{۲} g_{\mu\nu}R = -kT_{\mu\nu}$$

که در آن، $k = \frac{۸\pi G}{c^۴}$ و $T_{\mu\nu}$ تانسور تکانه انرژی می‌باشد که برای یک شار کامل می‌توانیم آن را به صورت رابطه زیر بنویسیم.

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^۲ + P)u_{\mu}u_{\nu} + Pg_{\mu\nu}$$

---

۱ Christoffel symbols
۲ Curving Riemann tensor
۳ Richie tensor
٤ Scalar Richie tensor

که در آن ρ, P, u به ترتیب چهار بردار سرعت، فشار و چگالی شاره هستند[۳].

با رشد کیهان‌شناسی در سال‌های ۱۲۹۹/۱۹۲۰ علت اینکه انیشتین به معادلاتش ثابت کیهان‌شناسی اضافه کرد، از بین رفت. الکساندرفریدمان ریاضی‌دان روسی، درسال ۱۳۰۱/۱۹۲۲به جواب‌هایی دست یافت که جواب‌های عمومی معادلات میدان انیشتین شدند. جواب‌های فریدمان رفتار جهان همگن و همسانگرد را، چه با ثابت کیهان‌شناسی و چه بدون آن بیان می کردند. مدل‌های فریدمانی امروزه پایه کیهان‌شناسی به شمار می‌رود.[۱]

معادله فریدمان مهمترین معادله کیهان‌شناسی است که انبساط عالم را توصیف می‌کند. این معادله چه از طریق گرانشی نیوتونی و چه از طریق نسبیت عام استخراج شود، دارای نتیجه یکسان خواهد بود. ما برای سادگی در روابط از نظریه گرانش نیوتن استفاده می‌کنیم.

اگر یک جهان یکنواخت در حال انبساط را در نظر بگیریم، ازآن جایی که جهان همه جا یکسان به نظر می‌رسد می‌توانیم هر نقطه‌ای را مرکز آن در نظر بگیریم. مطابق گرانش نیوتنی اگر ذره‌ای به جرم m در فاصله r از مرکز توزیع جرم یکنواختی قرار گرفته باشد، پتانسیلی احساس می‌کند که ازرابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{۴\pi G\rho r^{۲} m}{۳}$$

که در آن m جرمی است که در کره ای به شعاع r حول مرکز قرار دارد.

انرژی جنبشی ذره برابر است با

$$T = \frac{۱}{۲} m\dot{r}^{۲}$$

بنابراین برای انرژی کل آن داریم.

$$U = T + V = \frac{۱}{۲} m\dot{r}^{۲} - \frac{۴\pi G\rho r^{۲} m}{۳}$$

این معادله تحول فاصله بین دو ذره را بیان می‌کند[۴].

از آنجا که انبساط عالم یکنواخت است می‌توان دستگاه مختصاتی را تعریف کرد که به دستگاه مختصاط همراه معروف است. در این دستگاه مختصات مقیاس دستگاه با انبساط بزرگ می‌شود به طوری که ناظر درون این دستگاه متوجه انبساط عالم نمی‌شود. می توان رابطه بین فاصله واقعی r و فاصله همراه x را این گونه بیان کرد

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}$$

که در آن $a(t)$ ضریب انبساط[۵] است و به دلیل همگنی عالم فقط تابعی از زمان است.

با ترکیب کردن دو معادله اخیر خواهیم.

$$U = \frac{۱}{۲} m\dot{a}^{۲} x^{۲} - \frac{۴\pi G\rho a^{۲} x^{۲} m}{۳}$$

با تغییر آرایش این رابطه به فرم استاندارد معادله فریدمان می‌رسیم.

$$(\frac{\dot{a}}{a})^{۲} = \frac{۸\pi G\rho}{۳} - \frac{kc^{۲}}{a^{۲}}$$

$$k = \frac{-۲U}{mc^{۲}x^{۲}}$$

که در آن k معیاری از انرژی بر واحد ذره است،k ثابت و مستقل از فضا و زمان است.

با توجه به قانون اول ترمودینامیک[۶] و فرض برگشت‌پذیر بودن انبساط عالم (تغییر آنتروپی= صفر) و با کمک معادله فریدمان معادله شتاب به دست می‌آید.

---

[۵] Scale expansion

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + \frac{3P}{c^2})$$

که در آن P فشار ماده موجود در عالم است. از این معادله کاملا مشخص است که شتاب انبساط عالم منفی است و این نتیجه بر همکنش گرانشی بین اجسام است که بر اساس آن تمایل به جذب یکدیگر دارند.

[۶] First law thermodynamic

فصل دوم

متریک شوارتس‌شیلد

معادلات انیشتین برای فضای تهی، غیرخطی و در بیشتر موارد پیچیده است و به دست آوردن جواب صحیح آنها مشکل است. با وجود این حالت خاصی که می توان آن را بدون درد سر زیاد حل کرد حالتی است که میدان ایستا با تقارن کروی باشد که توسط یک جسم ساکن با تقارن کروی ایجاد شده باشد. که جواب آن به متریک شوارتس‌شیلد[۷] منجر می‌شود و فضا زمان اطراف یک جرم کروی متقارن را توصیف می‌کند[۱و۲].

معنی شرط ایستایی این است که در یک دستگاه مختصات ایستا، $g_{\mu\nu}$ ها از زمان مستقل باشند. همچنین باید $g_{\cdot i}$ برابر صفر باشد[۵].

۲ -۱ - متریک شوارتس‌شیلد

برای محاسبه و به دست آوردن متریک شوارتس‌شیلد مختصات فضایی را می‌توان مختصات قطبی $x^{۱} = r\,, x^{۲} = \theta, x^{۳} = \varphi$ در نظر گرفت. عمومی‌ترین شکل $dS^{۲}$ که با تقارن کروی سازگار است. عبارت است از

$$ds^{۲} = Udt^{۲} - Vdr^{۲} - Wr^{۲}(d\theta^{۲} + sin^{۲}\theta d\phi^{۲})$$

[۷] Schwarzschild metric

که در آن W,U,V تابعی از r می‌باشند و ما از این آزادی تا آنجا که امکان دارد برای ساده کردن کار

استفاده می‌کنیم. مناسب‌ترین ترکیب این است که داشته باشیم $w = ۱$ در این صورت می‌توان نوشت

$$ds^۲ = e^{۲\nu}dt^۲ - e^{۲\lambda}dr^۲ - r^۲d\theta^۲ + r^۲sin^۲\theta d\phi^۲ \qquad (۱-۲)$$

که در آن ν,λ تنها تابع r می باشند. و باید طوری انتخاب شوند که در معادلات انیشتین صدق کنند، مقادیر $g_{\mu\nu}$ را می توان فورا از (۲-۱) استخراج کرد به عبارت دیگر

$$g_{oo} = e^{۲\nu}$$

$$g_{۱۱} = -e^{۲\lambda}$$

$$g_{۲۲} = -r^۲$$

$$g_{۳۳} = -r^۲sin^۲\theta$$

و با داشتن رابطه

$$g_{\mu\nu} = o \qquad \mu \neq \nu$$

بنابراین خواهیم داشت.

$$g^{oo} = e^{-۲\nu}$$

$$g^{۱۱} = -e^{-۲\lambda}$$

$$g^{۲۲} = -r^{-۲}$$

$$g^{۳۳} = -r^{-۲}sin^{-۲}\theta$$

اکنون لازم است که تمام نمادهای کریستوفل را محاسبه کنیم خیلی از آنها صفر هستند آنهایی که صفر نیستند عبارتند از (علامت پریم برای مشتق گیری نسبت به r است).

$$\Gamma^{۱}_{oo} = \nu' e^{۲\nu-۲\lambda}$$

$$\Gamma^{۱}_{۱۱} = \lambda'$$

$\Gamma^{۱}_{۲۲} = -re^{-۲\lambda}$

$\Gamma^{۱}_{۳۳} = -rsin^{۲}\theta e^{-۲\lambda}$

$\Gamma^{o}_{o۱} = \lambda'$

$\Gamma^{۲}_{۱۲} = \Gamma^{۳}_{۱۳} = r^{-۱}$

$\Gamma^{۳}_{۲۳} = cot\theta$

$\Gamma^{۲}_{۳۳} = -sin\theta\ cos\theta$

با داشتن معادله تانسور ریچی

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}$$

خواهیم داشت.

$$R_{..} = (-\nu'' - \nu'^{۲} + \lambda'\nu' - \frac{۲\nu'}{r})e^{۲\nu-۲\lambda} \quad (۲-۲)$$

$$R_{۱۱} = (\nu'' + \nu'^{۲} - \lambda'\nu' - \frac{۲\lambda'}{r}) \quad (۳-۲)$$

$$R_{۲۲} = \left(۱ + r\nu' - r\lambda'\right)e^{-۲\lambda} - ۱ \quad (۴-۲)$$

$$R_{۳۳} = R_{۲۲}sin^{۲}\theta$$

مولفه‌های دیگر تانسور ریچی صفر می‌باشد.

معادله گرانش انیشتین ایجاب می‌کند که این عبارات صفر گردند. از صفر شدن (۲-۲) و (۲-۳) نتیجه می‌شود[۱و۲].

$$\lambda' + \nu' = ۰$$

برای مقادیر بزرگ r باید فضا به "تخت بودن" نزدیک شود به طوری که وقتی $r \to \infty$ کمیات ν, λ هر دو به سمت صفر میل کنند. لذا نتیجه می‌گیریم.

$$\lambda + \nu = ۰$$

حال از صفر شدن (۲-۴) نتیجه می‌گیریم

$$\left(۱ + ۲r'/\nu\right)e^{۲\nu} = ۱$$

یا داریم

$$(re^{۲\nu})' = ۱$$

$$re^{۲\nu} = r - ۲m$$

که در آن m ثابت انتگرال‌گیری است، بدین ترتیب روابط (۲-۲) و (۲-۳) نیز صفرمی‌شوند. اکنون خواهیم داشت.

$$g_{oo} = ۱ - \frac{۲m}{r} \qquad (۲-۵)$$

تقریب نیوتنی باید برای مقادیر بزرگ r صادق باشد. ثابت انتگرال‌گیری m دقیقا همان جرم جسم مرکزی است که میدان گرانشی را ایجاد کرده است.

اکنون نوبت آن است که جواب کامل را نشان دهیم

$$ds^{۲} = (۱ - \frac{۲m}{r})dt^{۲} - (۱ - \frac{۲m}{r})^{-۱}dr^{۲} - r^{۲}d\theta^{۲} + r^{۲}sin^{۲}\theta d\phi^{۲} \qquad (۲-۶)$$

این جواب به جواب شوارتس‌شیلد معروف است و در خارج از سطح جسمی که میدان را ایجاد کرده است. و در آنجا ماده‌ای وجود ندارد، صادق است. لذا به طور نسبتا دقیق در خارج از سطح ستارگان صدق می کند.

۲-۲ - حل فضا زمان یک پوسته کروی با چگالی یکنواخت

در این بخش جواب عمومی نسبیتی برای فضا زمان یک پوسته کروی با چگالی یکنواخت ارائه می‌دهیم معادله های میدانی انیشتین برای توزیعی از ماده به صورت پوسته کروی با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و ثابت چگالی یکنواخت ρ حل می‌شود.

ما در ابتدا ناحیه‌ای از ماده که شامل $a < r < b$ در نظر می‌گیریم چنانچه متریک متقارن کروی باشد در این صورت متریک به صورت زیر است.

$$ds^۲ = e^{۲\nu}dt^۲ - e^{۲\lambda}dr^۲ - r^۲d\theta^۲ + r^۲sin^۲\theta d\phi^۲$$

که ν, λ تابع r می‌باشند.

با حل معادلات میدان روابط زیر بدست می‌آید.

$$e^{\lambda} = \frac{۱}{(۱ - \frac{r^۲}{R^۲} + \frac{E}{r})}$$

$$e^{\nu} = \left(۱ - \frac{r^۲}{R^۲} + \frac{E}{r}\right)(A + \frac{B}{۲}\int \frac{rdr}{(۱ - \frac{r^۲}{R^۲} + \frac{E}{r})})^۲$$

که $R^۲ = \frac{۳c^۲}{۸\pi k\rho}$ و c, k به ترتیب ثابت گرانشی و سرعت نور می باشند A, B, E ثابت هستند که مشخص می‌شوند. برای نواحی $r > b$ و $۰ < r < a$ باحل معادلات میدانی e^{ν} و e^{λ} به صورت زیر در می‌آید.

$$e^{\lambda} = \frac{۱}{(۱ + \frac{G}{r})}$$

$$e^{\nu} = D\left(۱ + \frac{G}{r}\right)$$