دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی هسته ای وفیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

فیزیک (نظری)

موضوع:

مکانیک کوانتومی در فضای ناجابجایی ۱—۲ بعدی

نگارش :

زینب عموزاد خلیلی

استاد راهنما:

دکتر داوود کمانی

دی ماه ۱۳۸۶

بسمه تعالی

فرم اطلاعات پایان نامه
کارشناسی ارشد و دکترا

تاریخ ...۱۸... /...۰۲../...۸۷......

پیوست ....

دانشگاه صنعتی امیر کبیر
(پلی تکنیک تهران)
معاونت پژوهشی

نام و نام خانوادگی :زینب عموزاد خلیلی دانشجوی آزاد ☑ بورسیه ☐ معادل ☐

شمارهٔ دانشجوئی : ۸۴۱۱۱۰۰۹ **دانشکده:** مهندسی هسته ای و فیزیک **رشتهٔ تحصیلی : فیزیک نظری**

نام و نام خانوادگی استاد راهنما :دکتر داوود کمانی

عنوان پایان نامه به فارسی : مکانیک کوانتومی در فضای ناجابجایی ۱+۲ بعدی

عنوان پایان نامه به انگلیسی : Noncommutative Quantum Mechanics in 2+1 Dimensions

نوع پروژه : کارشناسی ارشد ☑ دکتـــــری ☐ کاربردی ☐ بنیادی ☐ توسعه ای ☐ نظری ☑

تاریخ شروع: ۱۳۸۵- **تاریخ خاتمه :** ۱۳۸۶ **تعداد واحد :** ۶

واژه های کلیدی به فارسی :جبر هایزنبرگ-ویل، فضای ناجابجایی ، فضای فاز ناجابجایی ، ضرب ستاره ای ، روابط عدم قطعیت ، معادلـه شـرودینگر ، معادله دیراک .

واژه های کلیدی به انگلیسی

Heisenberg-Weyl algebra , noncommutative spase , Noncommutative Phase Spase , Star Product , Unsertainty Relations, Schrodinger Equation, dirac Equation

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیتهای پژوهشی دانشگاه :

استاد راهنما :دکتر داوود کمانی

دانشجو : زینب عموزاد خلیلی

امضاء استاد راهنما : **تاریخ :**

نسخهٔ ۱ : معاونت پژوهشی

نسخهٔ ۲: کتابخانه و به انضمام دوجلد پایان نامه به منظور تسویه حساب با کتابخانه و مرکز اسناد و مدارک علمی

tions of it; 4) noncommutative Dirac equation.

Keywords:Heisenberg-Weyl algebra, Noncommutative Space, Noncommutative Phase Space, Star Product , Uncertainty relations , Schrodinger equation , Dirac equation.

تقدیر و تشکر

نگارنده بر خود لازم می‌داند که از زحمات بی‌دریغ، تلاشهای بی وقفه و راهنمایی های ارزشمند استاد گرامی جناب آقای دکتر داوودکمانی برای انجام این پروژه تشکرو قدردانی نماید.

تقدیم

این مجموعه را تقدیم می‌کنم به پدر و مادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانیشان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی.

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید.

و به پاس محبت های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

خدایا! آنان را در ازای پروریدن من جزای نیکو ده و در مقابل عزیز داشتن من پاداش بزرگ مرحمت کن و چون مرا در خردی از آسیب و گزند نگاه داشتند ، تو نیز آنان را نگاهداری کن (صحیفه سجادیه) .

چکیده

مکانیک کوانتومی ناجابجایی که حالت حدی تئوری میدان ناجابجایی است ، بر اساس جبر هایزنبرگ—ویل تعمیم یافته بنا نهاده شده است . در این جبر رابطه جابجایی بین مختصات فضایی صفر نیست . بسته به این که ناجابجایی دو بعدی روی سطح تخت در نظر گرفته شود یا سطح کره باشد ، پارامتر ناجابجایی به ترتیب عدد و مولفه سوم عملگرها در نظر گرفته می شود. البته ناجابجایی دو بعدی ممکن است روی هر سطحی بررسی شود که حل مسئله به مراتب مشکل تر است . جبر ناجابجایی منجر به تعریف روابط عدم قطعیت تعمیم یافته می شود .

در تئوری میدان های کوانتومی دستیابی به ناجابجایی از دو طریق ممکن است : باوارد کردن ضرب ستاره ای به جای ضرب معمولی بین میدان ها در فضای جابجایی ، و نیز تعریف تئوری میدان در فضای عملگری مختصاتی که به طور ذاتی ناجابجاست . نتیجهِ ضرب ستاره ای ، ضرب معمولی است به همراه تصحیحات . به همین دلیل وقتی که شدت ناجابجایی ضعیف است ، روش های اختلالی برای حل بسیاری از مسائل در این فضا ها پیشنهاد می شود . از روی همین ضرب ستاره ای رابطه بین مختصات در فضای ناجابجایی و جابجایی قابل استنتاج است .

با اینکه نظریه ریسمان ، فضاهای ناجابجایی را پیشنهاد می کند ، برخی نظریه پردازان مدل های فضای فاز ناجابجایی را بررسی کرده‌اند . در این فضای کاملا ناجابجا ، آمار بوز—اینشتین تضمین خواهد شد . رابطه بین پارامترهای ناجابجایی از جمله مسائلی است که در فضای فاز ناجابجایی بررسی می شود .

در این پایان نامه خواص مختلفی از مکانیک کوانتومی ناجابجایی در فضا—زمان ۱+۲ بعدی در نظرگرفته می شود که به صورت زیر است :

۱) ناجابجایی ناشی از مکان — تکانه و همچنین مکان — مکان ؛ ۲) روابط عدم قطعیت تعمیم یافته ؛ ۳) معادله شرودینگر ناجابجایی و برخی حل های آن ؛ ۴) معادله دیراک ناجابجایی .

کلمات کلیدی: جبر هایزنبرگ–ویل ، فضای ناجابجایی ، فضای فاز ناجابجایی ، ضرب ستاره ای ، روابط عدم قطعیت ، معادله شرودینگر ، معادله دیراک .

فهرست مندرجات

مقدمه ۱

۱ ناجابجایی مکان—تکانه و مکان—مکان ۵

۱.۱ نمایش جبر هایزنبرگ—ویل در فضای جابجایی و فضای ناجابجایی ۶

۲.۱ عملگرهای خلق و فنا در فضای ناجابجایی ۸

۳.۱ عملگر تکانه زاویه ای در فضای ناجابجایی ۱۲

۲ روابط عدم قطعیت در فضای ناجابجایی ۱۶

۱.۲ روابط عدم قطعیت و قضایای حاکم بر حالت های اشباع کننده ۱۷

۲.۲ اشباع روابط عدم قطعیت ۲۲

۳ ناجابجایی کل فضای فاز ۳۱

۱.۳ ناوردایی جبر ناجابجایی تحت مقیاس کردن ۳۲

۲.۳ آمار بوز—اینشتین در فضای فاز ناجابجایی ۳۵

۳.۳ رابطه بین پارامترهای ناجابجایی برای چاه گرانشی کوانتومی ۳۸

۴ معادله شرودینگر در فضای ناجابجایی ۴۷

۱.۴ معادله شرودینگر ناجابجایی برای پتانسیل مرکزی ۴۷

۲.۴ پراکندگی ناشی از میدان مرکزی در فضای ناجابجایی ۵۱

۱.۲.۴ پراکندگی کوانتومی ناجابجایی در تقریب بورن ۵۸

۵ معادله دیراک در فضای ناجابجایی ٦۲

۱.۵ معادله دیراک برای پتانسیل ناجابجای آهارانف—بوهم ٦۳

٦ نوسانگر کوانتومی ناهمسانگرد و همسانگرد در دو بعد فضایی ناجابجا و یک بعد زمانی ۷۸

۱.٦ نوسانگر کوانتومی ناهمسانگرد ناجابجایی ۷۹

۲.٦ نوسانگر کوانتومی همسانگرد ناجابجایی ۸۷

۳.٦ یکسانی فرکانس نوسان در دو بعد در جواب های مساله ناهمسانگرد ۹۰

مقدمه

مکانیک کوانتومی معمولی در فضای جابجایی بسط و تفسیر می شود . در فضای جابجایی رابطه جابجایی بین مختصات فضا صفراست . یعنی مختصات در راستاهای مختلف مستقل از هم هستند. اما در سال های اخیر مطالعه فضاهای ناجابجایی اهمیت زیادی یافته است . فرض های اولیه وجود این محیط ها به حدود سال های ۱۹۳۰ مربوط می شود اما بررسی های جدی تقریباً ازسال ۱۹۹۸ شروع شده است و نوشته های بسیاری در زمینه مکانیک کوانتومی ناجابجایی ، تئوری میدان ناجابجایی ، تئوری ریسمان ناجابجایی تهیه شده است [۷ − ۱] . کُهن[۱] از جمله افراد برجسته ایست که دراین زمینه تلاش زیادی کرده است .

اهمیت اصلی فضاهای ناجابجایی در فیزیک انرژی های خیلی بالا (در حدTev) در مقیاس ریسمان است . نتایج بدست آمده از تئوری ریسمان فضا−زمان ناجابجا را پیشنهاد می کنند. سطح روی D_p- غشاء ها[۲] در حضور تانسور میدان پادمتقارن B_{ij} کلب−راموند[۳]، یک فضای ناجابجاست . در واقع D_p- غشاء ها اجسام گسترش یافته p بعدی اند که در فضای با بعد $d \geq p$ غوطه‌ورند که در نظریه ریسمان یافت می شوند . فضای مورد مطالعه ما می تواند سطح یکی از این $D_۲-$ غشاء هاباشد که حاوی B_{ij} است [۸, ۹] . طبق برخی نظریه ها ، فضای ناجابجایی می تواند از اثر کوانتومی گرانش نیز به وجود آید که

[۱] Cohn

[۲] Branes

[۳] Kalb-Ramond

به عنوان راهی برای نظم دادن تئوری میدان کوانتومی به کار می رود [۱۰]. در واقع مکانیک کوانتومی ناجابجایی حد غیر نسبیتی تئوری میدان کوانتومی ناجابجایی است .

فضاهای ناجابجایی دو بعدی می توانند سطح تخت ناجابجایی[۴] و یاسطح کره ناجابجایی[۵] و یا هر سطح خمیده دیگر باشند . کار کردن در فضای تخت ناجابجایی (صفحه ناجابجا) آسان است زیرا جابجایی مختصات با یک پارامتر بیان می شود و اما در کره ناجابجایی ، جابجایی مولفه های مختصات بر حسب مولفه سوم مختصات و پارامتر ناجابجایی بیان می شود که کار کردن روی این سطوح کمی دشوارتر از صفحه ناجابجایی است [۱۱, ۱۲]. فضای ۱+۲ بعدی ای که در این پایان نامه در نظر گرفته می شود می تواند جهان حجم یک $D_۲-$ غشاء حاوی میدان $B_{۱۲}$ باشد .

مکانیک کوانتومی در فضای ناجابجایی براساس جبر هایزنبرگ–ویل[۶] تغییر یافته بنا نهاده شده است [۱۳].منظور از ناجابجایی مختصات ، ناجابجایی مکانی است و ناجابجایی را بین مختصه های زمانی در نظر نمی گیریم زیرا از لحاظ مفاهیم یکتایی و علیت دچار مشکل می شویم .

در فضای ناجابجایی p بعدی ، ناجابجایی بین مختصات مکانی به صورت زیر است

$$[\widehat{x}^i, \widehat{x}^j] = i\theta^{ij}, \qquad i,j \in \{۱,۲,...,p\},$$

تعریف کلی θ^{ij} به صورت زیراست

$$\theta^{ij} = -(۲\pi\alpha')^۲ \left(\frac{۱}{g+۲\pi\alpha' B} B \frac{۱}{g-۲\pi\alpha' B}\right)^{ij},$$

در واقع $\sqrt{\alpha'}$ مقیاس طول ریسمان است که تقریباً $۱۰^{-۳۳}cm$ است .

متریک روی D_p- غشاء ناجابجایی به صورت زیر تعریف می شود

$$G_{ij} = g_{ij} - (۲\pi\alpha')^۲ (Bg^{-۱}B)_{ij},$$

---

[۴] Noncommutative plane

[۵] Noncommutative sphere

[۶] Heisenberg-weyl algebra

$$G^{ij} = \left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B} g \frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{ij},$$

که اگر میدان B_{ij} در فضای D_p- غشاء صفر شود داریم

$$\theta^{ij} = 0, \qquad G_{ij} = g_{ij}, \qquad G^{ij} = g^{ij}$$

که نشان می دهد g^{ij} و g_{ij} متریک روی D_p- غشاء جابجایی هستند .

در واقع فضا های ناجابجایی تعمیمی از فضاهای جابجایی اند و روابط و فرمول ها در این فضا، تعمیم یافته می شوند و تصحیحی نسبت به فضای جابجایی به آنها اضافه می شود. ناجابجایی در تئوری میدان کوانتومی از دو را مختلف بدست می آید: ۱ — با تعریف ضرب ستاره ای مویال در فضای توابع معمولی ، به طوری که در تئوری ای که برای یک سیستم در فضای جابجا نوشته شده است ، ضرب بین میدان ها با ضرب ستاره‌ای مویال جانشین شوند . که این ضرب به صورت زیر است

$$f(x) * g(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}} f(y)g(x)|_{y=x}$$

۲ — تعریف تئوری میدان در فضای عملگری که به طور ذاتی ناجابجاست [۱۴, ۱۵].

در این پایان نامه مختصه های ناجابجایی با علامت کلاه مشخص شده اند .

خلاصه فصل ها

در فصل ۱ به تعریف فضای جابجایی و جبر هایزنبرگ—ویل در این فضا می پردازیم و به طور معادل فضای ناجابجایی و جبر هایزنبرگ—ویل تغییر یافته را معرفی می کنیم . رابطه بین مختصه های ناجابجایی و جابجایی را با استفاده از تبدیلات خطی ونیز ضرب ستاره ای[۷] مویال بدست می آوریم . در پایان فصل فرم چند عملگر را در فضای ناجابجا بدست می آوریم .

[۷] Star product

در فصل ۲ روابط عدم قطعیت حاکم بر فضای ناجابجایی را بدست می آوریم و قضیه هایی که بر اشباع روابط عدم قطعیت دلالت دارند را تعریف می کنیم . و نیز به دو روش حالت هایی که باعث اشباع روابط عدم قطعیت می شوند را محاسبه می کنیم .

در فصل ۳ ناجابجایی فضای فاز[۸] را در نظر می گیریم . در این بخش رابطه جابجایی بین عملگرهای تکانه نیز مخالف صفر است . ثابت می شود که برای ناوردا ماندن پارامتر های ناجابجایی تحت روش های متفاوت اندازه گیری ، باید متغیرهای ناجابجایی را مقیاس بندی کنیم . بدین سان پارامترهای موثرناجابجایی را بدست می آوریم که اندازه آنها در آزمایش های مختلف ثابت می ماند. و نیز ثابت می شود آمار بوز—اینشتین که رابطه بین عملگرهای خلق و فناست در فضای فاز ناجابجایی تضمین خواهد شد . رابطه بین پارامترهای ناجابجایی (θ برای ناجابجایی مکان—مکان و η برای ناجابجایی تکانه —تکانه) یکی از نقاط مبهم در فضای فاز ناجابجاست ، اگرچه روشهایی برای پیداکردن رابطه بین این پارامترها پیشنهاد شده است . تنها در این فصل فضای فاز ناجابجایی را مطرح می کنیم و بقیه فصول به کار در فضای ناجابجایی اختصاص دارد .

در فصل ۴ فرم معادله شرودینگر ناجابجایی رامعرفی می کنیم و نشان می دهیم برای پتانسیل های مرکزی این معادله ، به راحتی قابل حل است. و نیز مسئله دو جسمی را به کمک معادله شرودینگر در این فضا حل خواهیم کرد .ثابت می کنیم که در تقریب بورن ، جواب مسئله ناجابجایی با مسئله جابجایی تفاوتی ندارد.

در فصل ۵ معادله دیراک را در فضای ناجابجایی معرفی کرده ، فرم معادله دیراک ناجابجا را بدست می آوریم . سپس مسئله پراکندگی ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ در این فضا بررسی می شود و مقطع عرضی دیفرانسیلی را بدست می آوریم . به آسانی دیده می شود که جواب ها ، همان جواب های فضای جابجاست که تصحیح خورده اند .

---

[۸] Noncommutative phase space

در فصل ٦ این پایان نامه ، که کار نویسنده است ، حل مسئله ویژه مقداری برای هامیلتونی نوسانگر دو بعدی ناهمسانگرد و همسانگرد ناجابجاست . ویژه توابع و ویژه مقادیر این هامیلتونی ها بدست آورده شده‌اند . برای حالت ناهمسانگرد ، مسئله به روش دقیق قابل حل نیست و روش اختلالی برای حل این مسئله در نظر گرفته شده است . جوابها برای مسئله همسانگرد به روش دقیق بدست آمده اند. در هر دو مورد به آسانی دیده می شود که جوابها همان جوابهای مسئله جابجا هستند که تصحیح خورده‌اند و تقارن نسبت به تعویض اندیس های ۱ و ۲ ، که علت آن ارجح نبودن ابعاد فضایی بر همدیگر است ، دلیلی برای درستی حل می باشد .

فصل ۱

ناجابجایی مکان—تکانه و مکان—مکان

مقدمه

فضای ناجابجایی که از نظریه ابر ریسمان نتیجه می شود بر اساس جبر هایزنبرگ—ویل تغییر یافته بنا نهاده می شود. دراین فصل به‌بیان این جبر می‌پردازیم‌ورابطه بین عملگرها در فضای ناجابجایی و جابجایی را بدست می آوریم. ضرب ستاره ای مویال، ضربی است که در فضای ناجابجایی و بین میدان های برداری تعریف می شود که طبق آن، ضرب میدان های برداری تعریف شده در فضای جابجایی تصحیح می خورند. به کمک این ضرب ستاره ای نیز رابطه بین عملگر ها در فضای ناجابجا و جابجاقابل استنتاج است . در پایان عملگر های خلق و فنا و نیز عملگر تکانه زاویه‌ای را در این فضا تعریف می کنیم و ویژه حالت های نوسانگر کوانتومی دو بعدی را بر حسب عملگرهای خلق و فنا بدست خواهیم آورد .

۱.۱ نمایش جبر هایزنبرگ–ویل در فضای جابجایی و فضای ناجابجایی

می دانیم که مکانیک کوانتومی n بعدی بر اساس جبر هایزنبرگ–ویل بیان شده است . بر اساس این جبر که رابطه جابجایی بین عملگر های مکان و تکانه است داریم

$$[x_i, x_j] = \circ,$$
$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij},$$
$$[p_i, p_j] = \circ, \qquad i, j = ۱, ۲, ..., n \tag{۱}$$

که عملگرهای هرمیتی مکان و تکانه در هر سیستم استاندارد کوانتومی در فضای هیلبرت در نظر گرفته می شود.

و اما برا ی رسیدن به مکانیک کوانتومیn بعدی در فضای ناجابجایی، شکل دیگری از جبر هایزنبرگ–ویل که معادل با جبر قبلی است و جبر هایزنبرگ–ویل تغییر یافته (تعمیم یافته) نامیده می شود تعریف می شود وطبق آن داریم [١٦]

$$[\widehat{x}_i, \widehat{x}_j] = i\theta_{ij},$$
$$[\widehat{x}_i, \widehat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij},$$
$$[\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = \circ, \quad i, j = ۱, ۲, ..., n \tag{۲}$$

در عبارت بالا θ_{ij} ها عناصر ماتریس حقیقی $n \times n$ پادمتقارن هستند ($\theta_{ij} = -\theta_{ji}$) که در کل این پایان نامه θ_{ij} ها ثابت هستند. اگر در دو بعد کار کنیم ($i, j =$ ۱و۲) ، جبر را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$[\widehat{x}_i, \widehat{x}_j] = i\varepsilon_{ij}\theta,$$
$$[\widehat{x}_i, \widehat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij},$$
$$[\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = \circ, \qquad i, j = ۱, ۲ \tag{۳}$$

در رابطه بالا ε_{ij} نماد لوی چی ویتاست که طبق آن اگر ترتیب ۲ $\rightarrow$ ۱ انتخاب شود ، فرض می کنیم $\theta \geq 0$ و $[\widehat{x}_1, \widehat{x}_2] = i\theta$ و اگر ترتیب ۱ $\rightarrow$ ۲ انتخاب شود ، فرض می کنیم $\theta \leq 0$ و $[\widehat{x}_2, \widehat{x}_1] = -i\theta$.

همانطور که می بینیم $i, j \neq 0$ ،زیرا اگر داشته باشیم $\theta_{0i} \neq 0$ یعنی x_0 ها که مختصه های زمانی هستند را وارد کنیم از لحاظ علیت ویکتایی دچار مشکل می شویم.

می توان رابطه ای بین مختصات در فضای ناجابجایی وجابجایی بدست آورد . اگر فرض کنیم این رابطه خطی است آنگاه

$$\widehat{x} = a_1 x + a_2 y + a_3 p_x + a_4 p_y,$$

$$\widehat{y} = b_1 x + b_2 y + b_3 p_x + b_4 p_y,$$

$$\widehat{p}_x = c_1 x + c_2 y + c_3 p_x + c_4 p_y,$$

$$\widehat{p}_y = d_1 x + d_2 y + d_3 p_x + d_4 p_y, \tag{۴}$$

از آنجایی که مختصات وتکانه ناجابجایی باید در رابطه جابجایی (۳) صدق کنند، پس از قرار دادن رابطه (۴) در رابطه (۳) وسپس استفاده از جبر (۱) می توان رابطه ای بین ضرایب a_i, b_i, c_i, d_i بدست آورد . از این ۱٦ ضریب ، تعدادی از ضرایب را به صورت دستی وارد می کنیم به طوری که تنها ٦ معادله و ٦ مجهول باقی بماند و سپس این ۴ مجهول را بدست می آوریم. بدین ترتیب رابطه بین مختصات در فضای ناجابجایی وجابجایی بدست می آید. از آنجایی که تعدادی پارامتر را به صورت دستی وارد کردیم ، ممکن است فرم های متفاوتی برای این رابطه بدست آید . اما کلی ترین فرمی که بدست می‌آید به صورت زیر است

$$\widehat{x}_i = x_i - \frac{\theta}{2\hbar}\varepsilon_{ij}p_j, \qquad \widehat{p}_i = p_i, \tag{۵}$$

که نشان می دهدمختصات در فضای ناجابجایی همان مختصه های فضای جابجایی هستند که تصحیح خورده اند. البته روش دومی نیز برای بدست آوردن رابطه بین مختصات در فضای ناجابجایی و جابجایی

وجود دارد . از آنجایی که درتئوری میدان در فضا—زمان ناجابجایی ، همه ضربها با ضرب ستاره ای مویال تعویض می شوند میتوان رابطه بین مختصه های ناجابجایی وجابجایی را بدست آورد . این ضرب ستاره ای برای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$f(x) * g(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}} f(y)g(x)|_{y=x} \tag{٦}$$

که با بسط دادن تابع نمایی این ضرب ستاره ای به صورت زیر تعریف می شود

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial f(x)}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial g(x)}{\partial x^{\nu}} + o(\theta^{2}) \tag{۷}$$

از طرفی بسط مک—لوران برای تابعی به صورت زیر را می نویسیم

$$f(x^{i} - \frac{\theta^{ij}}{2\hbar}p_{j}) = f(x^{i}) + \frac{\theta^{ij}}{2\hbar}(i\frac{\partial}{\partial x^{j}})\frac{\partial f(x^{i})}{\partial x^{i}}, \tag{۸}$$

از مقایسه دو رابطه (۷) و (۸) می توانیم بنویسیم

$$f(x) * g(x) = f(x - \frac{\theta\widetilde{p}}{2\hbar})g(x), \qquad \widetilde{p}_{i} = \varepsilon_{ij}p^{j}, \tag{۹}$$

که‌نشان می دهد رابطه بین مختصه های فضای ناجابجایی بر حسب مختصه های فضای جابجایی ، با رابطه (۵) مطابقت دارد [۱۷, ۱۸].

۲.۱ عملگرهای خلق و فنا در فضای ناجابجایی

عملگر های خلق و فنا عملگر هایی هستند که با اثر بر ویژه حالت های انرژی نوسانگر کوانتومی ، تراز انرژی را به ترتیب یک تراز به بالا و یک تراز به پایین میبرند. به خاطر اهمیت این عملگر ها در مکانیک کوانتومی خوب است فرم این عملگرها را در فضای ناجابجایی بدست آوریم . در فضای جابجایی اگر

فرض کنیم $m=\omega=۱$ ، داریم

$$a_i=\frac{۱}{\sqrt{۲\hbar}}(x_i+ip_i),\qquad a_i^\dagger=\frac{۱}{\sqrt{۲\hbar}}(x_i-ip_i),\tag{۱۰}$$

با نوشتن x_i و p_i ها بر حسب مختصات ناجابجایی بدست می آوریم

$$a_i=\frac{۱}{\sqrt{۲\hbar}}(\widehat{x}_i+(i\delta_{ij}+\frac{\theta}{۲\hbar}\varepsilon_{ij})\widehat{p}_j),\quad a_i^\dagger=\frac{۱}{\sqrt{۲\hbar}}(\widehat{x}_i+(-i\delta_{ij}+\frac{\theta}{۲\hbar}\varepsilon_{ij})\widehat{p}_j),\tag{۱۱}$$

به آسانی دیده می شود که بین هر دو عملگر a_i و a_j روابط جابجایی زیر برقرار است

$$[a_i,a_j]=\circ,\qquad [a_i^\dagger,a_j^\dagger]=\circ,\qquad [a_i,a_j^\dagger]=\delta_{ij}.\tag{۱۲}$$

ازمعکوس کردن رابطه (۱۱) داریم

$$\widehat{p}_i=\sqrt{\frac{\hbar}{۲}}\frac{a_i-a_i^\dagger}{i},\tag{۱۳}$$

$$\widehat{x}_i=\sqrt{\frac{\hbar}{۲}}a_i+\sqrt{\frac{\hbar}{۲}}a_i^\dagger+i\frac{\theta}{۲\sqrt{۲\hbar}}\epsilon_{ij}(a_j-a_j^\dagger),\tag{۱۴}$$

می توان عملگر خلق وفنای تصحیح شده که پایه های جدیدی را تشکیل می دهند و اندازه حرکت معلومی را به دنبال دارد، به فرم زیر تعریف کرد

$$a_\pm=\frac{۱}{\sqrt{۲\hbar}}(a_۱\mp ia_۲),\qquad a_\pm^\dagger=\frac{۱}{\sqrt{۲\hbar}}(a_۱^\dagger\pm ia_۲^\dagger).\tag{۱۵}$$

همانطور که می دانیم فضای استاندارد فوک را می توان با بردارهای متعامد به فرم زیر ساخت :

$$|n\rangle=\frac{۱}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|\circ\rangle.\tag{۱۶}$$

به همین ترتیب برای دو بعد می توانیم بنویسیم

$$|n_۱,n_۲\rangle=\frac{۱}{\sqrt{n_۱!}}\frac{۱}{\sqrt{n_۲!}}(a_۱^\dagger)^{n_۱}(a_۲^\dagger)^{n_۲}|\circ\rangle,\tag{۱۷}$$