=۲۰۰pt =۱۲۰pt

logo.tex

# حاصلضرب اشتقاقها در جبرهای باناخ

توسط

**مریم یاوری**

**رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ**

زیر نظر

**دکتر محمدرضا میری**

۹ تیر ۱۳۹۰

**دانشکدهٔ ریاضی**

**دانشگاه بیرجند**

**بیرجند**

# قدردانی

# حاصلضرب اشتقاقها در جبرهای باناخ


## چکیده

هدف از این پایان نامه مطالعه اشتقاقهای $D$ و $G$ تعریف شده روی یک جبر باناخ مختلط $A$ است بطوریکه $\sigma(dg(x))$ روی هر $x \in A$ متناهی باشد

همچنین به انواع این اشتقاقها می‌پردازیم

در پایان هم نشان می‌دهیم که اگر جبر$A$ نیمه ساده باشد آنگاه $DG(x)^{۳}$ برای هر $x \in A$ در اساس آن قرار دارد.



**واژه‌های کلیدی:** *جبر باناخ، اشتقاق، طیف، عملگر وابسته، جبر نیمه ساده، ایده آل اصلی*

# مقدمه

مفهوم اشتقاق در جبرهای باناخ اولین بار توسط سینگر و ورمر[1] مورد مطالعه قرار گرفت و اثبات گردید که نگاره هر اشتقاق پیوسته (کراندار) در جبرهای باناخ تعویض پذیر در رادیکال جیکوبسین جبر $A$ قرار می‌گیرد (قضیه سینگر - ورمر)

همچنین آنان حدس زدند که شرط پیوستگی در این قضیه اضافی است.

این حدس که به (حدس سینگر - ورمر) معروف شد حدود ۳۰ سال حل نشد تا اینکه تامس[2] در سال ۱۹۸۷ با یک روش ابتکاری و نه چندان ساده به آن پاسخ داد(برای اطلاعات بیشتر .ر.ک. [۱۷])

از طرف دیگر تعمیم این قضیه وحدس به حالت تعویض ناپذیری هم بررسی شد. در حالت تعویض ناپذیری ساده ترین اشتقاق ناصفر، اشتقاق داخلی متناظر با عضو $a \in A$ است که در ادامه این پایان نامه به آن خواهیم پرداخت.

در فصل اول به بیان مفاهیم مقدماتی مورد نیاز می‌پردازیم و در فصل دوم با مفهوم اشتقاق در جبرهای باناخ آشنا شده و در فصل سوم حاصل ضرب اشتقاق ها در جبرهای باناخ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

[1] Singer and Wermer

[2] Tams

# فصل ۱

# تعاریف و قضایای اولیه

**تعریف ۱.۰.۱.** فضای برداری $X$ روی میدان$F$ (حقیقی یا مختلط) همراه نگاشت $\| \quad \| \; : \; X \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ را یک فضای نرمدار گوییم هرگاه به ازای $x, y \in X$ و اسکالر $(\alpha \in F) \;\; \alpha$ داشته باشیم :

الف) $\|x\| = 0$ اگروتنها اگر $x = 0$

ب) $\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$

ج) $\| x + y \| \;\; \leq \;\; \| x \| \| y \|$

**تعریف ۲.۰.۱.** فضای باناخ ، فضای نرمداری است که با متر تعریف شده توسط نرم کامل باشد یعنی هر دنباله کشی درآن همگرا باشد

**تعریف ۳.۰.۱.** فضای برداری $X$ روی میدان $F$ را با ضرب $(x, y) \longrightarrow xy$ یک جبر روی میدان $F$گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in X \;\; , \;\; \alpha \in F$ شرایط زیر برقرار باشد

الف) ضرب تعریف شده شرکتپذیر باشد یعنی $(xy)z = x(yz)$

ب) $(y+z)x = yx + zx \quad x(y+z) = xy + xz$

ج)$(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$

**تعریف ۴.۰.۱.** جبر $A$ را جابجایی گوییم هرگاه $A$ نسبت به ضرب جابجایی باشد یعنی $(x, y \in A) \quad xy = yx$ وآنرا یکدار گوییم هرگاه عنصر ناصفری که آنرا با ۱ نشان می‌دهیم موجود باشد به طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\quad ۱ \cdot x = x \cdot ۱ = x$

**تعریف ۵.۰.۱.** زیر فضای خطی $B$ ازجبر $A$ را یک زیر جبر گوییم هرگاه $B$ نسبت به ضرب بسته باشد

مرکز جبر $A$ را با $Z(A)$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z(A) = \{\ x \in A \ ; \ xy = yx \ , \ \forall y \in A\ \}$$

**تعریف ۶.۰.۱.** اگر $A$ یک جبر و $F \subset A$ باشد جابجاگر $F$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F' = \{\ x \in A \ ; \ yx = xy \ , \ \forall y \in F\ \}$$

**تعریف ۷.۰.۱.** فضای باناخ $(X, \| \cdot \|)$ را یک جبر باناخ گوییم اگر $X$ یک جبر باشد و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $\quad \| xy \| \leq \| x \| \| y \|$

**مثال.** $X = \mathbb{C}$ با عمل ضرب معمول و نرمی همچون قدر مطلق یک جبر باناخ است.

**مثال.** $X = C(K)$(که عبارت از توابع پیوسته بر مجموعه فشرده ای همچون $K$است) با ضرب نقطه ای $(fg)(x) = f(x)g(x)$ و با نرم ماکزیمم($\| f \| = max_{x \in K} |f(x)|$) یک جبر باناخ است.

زیرا بیشتر خواصش(فضای برداری و باناخ بودن و خواص جبری) آشکار است و عنصر

واحدش تابع ۱ $e(x) \equiv$ ۱ است، واضح است که نرم این تابع ۱ است

برای دیدن رابطه $\| fg \| \leqslant \| f \| \| g \|$ داریم

$\| fg \| = \max_{x\in K} |f(x)g(x)| \leqslant \max_{x\in K} |f(x)| \max_{x\in K} |g(x)| = \| f \| \| g \|$ در نامساوی بالا چون هر مجموعه پیوسته بر فضای فشرده $K$ دارای اکسترمم $(max, min)$ می‌باشد پس نامساوی همواره برقرار است.

**مثال.** $X = L^1(\mathbb{R})$ با حاصلضرب زیر

$$(fg)(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

در بیشتر خواص جبر باناخ صدق می‌کند، اما عنصر واحد ندارد.

این مثالی از یک جبر باناخ بدون عنصر واحد است.

حال اگر قرار دهیم $X = \ell^1(\mathbb{Z})$ با ضرب $\quad (xy)_n = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_j y_{n-j}$

یک جبر باناخ با عنصر یکه است.

اگر فرض کنیم که $f_0$ عضو یکه در این جبر باناخ باشد آن را به این شکل معرفی می‌کنیم

$$f_0 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad f_0(0) = 1 \ , \quad f_0(n) = 0$$

چون اولا $f_0$ عضوی از $\ell^1(\mathbb{Z})$ است

$$\| f_0 \| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_n| = 1 < \infty \quad \Longrightarrow f_0 \in \ell^1(\mathbb{Z})$$

ثانیا برای هر $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ داریم

$$(f * f_0)(n) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j) f_0(n-j) = f(n) f_0(0) = f(n)$$

پس برای هر $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ و هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم $(f * f_0)(n) = f(n)$ در نتیجه داریم $f * f_0 = f$ به همین شکل داریم $f_0 * f = f$ لذا $f_0$ عنصر واحد $\ell^1(\mathbb{Z})$ است

این حکم برای $\ell^1(G)$ که $G$ یک گروه گسسته دلخواه باشد مانند این مثال درست است. هر دوی $L^1$ و $\ell^1$ جابجایی هستند.

**تعریف ۸.۰.۱.** اگر $A$ یک جبر باشد زیرجبر $I$از $A$که برای هر $b \in I$ و $a \in A$ داشته باشیم $ab \in A$ $(ba \in A)$ یک ایده آل چپ (راست $A$) است، زیرجبری که ایده آل راست وایده آل چپ باشد ایده آل دوطرفه است که آنرا ایده آل $A$ نیز می‌نامیم

**تعریف ۹.۰.۱.** اگر $X$ فضای نرمدار باشد و $r \in \mathbb{R}^+$ آنگاه $B_r(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود $B_r(X) = \{x \in X \; ; \; \| x \| \leq r\}$

درحالت خاص $B_1(X)$ را با $B(X)$ نشان داده وآنرا گوی واحد بسته در $X$ می‌نامیم

## ۱.۱ مدولهای باناخ

**تعریف ۱.۱.۱.** اگر $A$ یک جبر و $X$ یک فضای برداری روی میدان $F$ باشد، در اینصورت $X$ را $A$- مدول چپ نامیم هرگاه عمل مدولی $A \times X \longrightarrow X$ که $(a,x) \longrightarrow ax$ دارای خواص زیر باشد

الف)برای هر $a \in A$ نگاشت $x \longrightarrow ax$ روی $X$ خطی باشد

ب)برای هر $x \in X$ نگاشت $a \longrightarrow ax$ از $A$ به $X$ خطی باشد

ج) برای هر $x \in X$ و $a, b \in A$ ، $a(bx) = (ab)x$

در صورتی که عمل مدولی $A \times X \longrightarrow X$ که $(a,x) \longrightarrow xa$ خواص مشابهی داشته باشد $X$ را یک $A$- مدول راست نامیم

**تعریف ۲.۱.۱.** اگر $X$ یک $A$- مدول چپ و راست باشد $X$ رایک $A$- مدول دو طرفه نامیم

**مثال.** فرض کنید $A$ یک جبر دلخواه باشد در اینصورت فضای $\{0\}$ همراه با عملهای مدولی بدیهی صفر یک $A$- مدول دوطرفه است همچنین جبر $A$ یک $A$-مدول دوطرفه است که در آن عملهای مدولی را ضرب $A$ در نظر می‌گیریم

**تعریف ۳.۱.۱.** $A$ مدول چپ $X$ را $A$- مدول چپ نرمدار نامیم هرگاه $A$ و $X$ فضاهای نرمدار باشند و $k > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $a \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم

$$\| ax \| \leq k \| a \| \| x \|$$

$A$ مدول راست نرمدار نیز بطور مشابه تعریف می‌شود

همچنین $A$- مدول دوطرفه $X$ رایک $A$- مدول دوطرفه نرمدار نامیم هرگاه $A$- مدول چپ نرمدار و $A$- مدول راست نرمدار باشد

اگر $X$ یک $A$ مدول چپ (راست، دوطرفه ) نرمدار باشد وعلاوه برآن $X$ یک فضای باناخ باشد $X$ را $A$- مدول چپ (راست، دوطرفه) باناخ نامیم

**تعریف ۴.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر یکانی باشد $A$- مدول چپ $X$ یکانی است اگر برای هر $x \in X$ ، $e_A \cdot x = x$

$A$- مدول راست $X$ یکانی است اگر برای هر $x \in X$ ، $x \cdot e_A = x$

همچنین $A$- مدول دوطرفه $X$ را یکانی نامیم هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$e_A \cdot x = x \cdot e_A = x$$

**تعریف ۵.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر و $X$ یک $A$- مدول دوطرفه باشد در اینصورت $X$ متقارن (جابجایی) است اگر $\quad (a \in A \, , \; x \in E) \quad a \cdot x = x \cdot a$

**تعریف ۶.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر جابجایی باشد در اینصورت هر $A$- مدول دوطرفه متقارن را یک $A$- مدول می‌نامیم

**مثال.** فرض کنید $A$ یک جبر جابجایی و $X$ یک $A$- مدول چپ باشد اگر تعریف کنیم $x \cdot a = a \cdot x \ \ (a \in A \ , \ x \in X)$، آنگاه $X$ یک $A$- مدول است

**تعریف ۷.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک $A$- مدول چپ و $F$ یک زیرفضای خطی $X$ باشد در اینصورت $F$ زیر مدول $X$ نامیده می‌شود هرگاه $\quad A \cdot F \subseteq F$

**تعریف ۸.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک $A$- مدول چپ باشد و $S \subset X$، اشتراک زیر مدولهای $X$ شامل $S$ را زیر مدول تولید شده بوسیله $S$ می نامیم .

**تعریف ۹.۱.۱.** اگر $A$ یک جبر باناخ نه لزوماً یکدار و $B$ یک ایده آل چپ $A$ باشد گوییم $B$ یک ایده آل چپ مدولار است اگر $u$ در $A$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$A(۱ - u) = \{a - au \ ; \ a \in A \ \} \subseteq B$$

در این حالت عضو $u$ از $A$ را یک واحد مدولار راست $B$ گوییم (بطور مشابه ایده آل راست مدولار و واحد مدولار چپ تعریف می‌شوند)
حال ایده آل چپ $M$ از جبر باناخ $A$ را ایده آل چپ مدولار ماکزیمال گویند هرگاه محض و مدولار بوده و مشمول در هیچ ایده آل چپ محض دیگری نباشد به بیان دیگر ایده آل چپ مدولار $M$ از جبر باناخ $A$ را ایده آل چپ مدولار ماکزیمال گویند اگر در خانواده ایده آلهای چپ مدولار $A$ ماکزیمال باشد

**تعریف ۱۰.۱.۱.** اگر $A$ و $B$ جبر و $T : A \longrightarrow B$ یک نگاشت باشد آنگاه $T$ را یک همریختی از $A$ به $B$ گوییم هرگاه $T$ نگاشت خطی باشد و برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

$$T(ab) = T(a)T(b)$$

**تعریف ۱۱.۱.۱.** اگر $A$ یک جبر باشد آنگاه نگاشت خطی $T : A \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک تابعک خطی ضربی گوییم هرگاه $T$ ضرب را حفظ کند یعنی برای هر $a, b \in A$ رابطه روبرو برقرار باشد

$$T(ab) = T(a)T(b)$$

**تعریف ۱۲.۱.۱.** اگر $A$ یک جبر باشد آنگاه اشتراک تمام ایده‌آلهای چپ مدولار ماکزیمال $A$ را رادیکال جیکوبسین $A$ یا به طور خلاصه رادیکال $A$ گویند و با $RadA$ نمایش می-دهند

حال اگر $A$ جبر جابجایی باشد داریم

$$RadA = \{x \in A \ : \ \varphi(x) = 0 \ ; \ \forall \varphi \in \phi_A\}$$

*برهان.* اگر $A$ جابجایی باشد آنگاه طبق ([۱۴]، صفحه ۷۹) ایده آلهای مدولار ماکزیمال از $A$ کرنل هایی از توابع خطی ضربی هستند

پس اشتراک این ایده آلهای مدولار ماکزیمال از $A$ که $RadA$ می‌شود کرنلی از توابع خطی ضربی است و نتیجه بدست می‌آید.

در تعریف فوق $\phi_A$ عبارت است از مجموعه تمام تابعکهای خطی ضربی ناصفر بر $A$ می‌باشد.

**تعریف ۱۳.۱.۱.** جبر $A$ را در صورتی نیمه ساده گویند اگر $RadA = 0$ و آنرا جبر رادیکال نامند اگر $RadA = A$

از تعریف جبر باناخ پیداست که در جبرهای باناخ هر سه عمل جبری جمع ، ضرب و ضرب اسکالر تحت نرم پیوسته اند مثلاً برای نشان دادن اینکه ضرب در جبرهای باناخ پیوسته است داریم

اگر $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دو دنباله در جبر باناخ $A$ باشند به طوری که اگر

$\| x_n - x \| \longrightarrow 0$ و $\| y_n - y \| \longrightarrow 0$ آنگاه $\| x_ny_n - xy \| \longrightarrow 0$

زیرا داریم

$$\| x_ny_n - xy \| = \| x_n(y_n - y) + (x_n - x)y \| \leqslant \| x_n \| \| y_n - y \| + \| x_n - x \| \| y \|$$

**تعریف ۱۴.۱.۱.** اگر جبر $A$ دارای ایده آلهای چپ مینیمال باشد آنگاه کوچکترین ایده‌آل چپ $A$ که شامل تمام ایده آلهای چپ مینیمال $A$ باشد را اساس چپ $A$ گویند

به همین طریق اساس راست $A$ قابل تعریف است

حال اگر $A$ دارای اساس چپ و راست بوده به طوری که با هم برابر باشند آنگاه گوییم $A$ دارای اساس است و آنرا با $SocA(SocleA)$ نمایش می‌دهیم .

به عبارت دیگر ایده آلی که توسط اجتماع تمام ایده آلهای مینیمال جبر $A$ تولید شده باشد را اساس جبر $A$ گویند

## ۲.۱ اشتقاق

**تعریف ۱.۲.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر و $X$ یک $A$- مدول دوطرفه باشد نگاشت خطی $D : A \longrightarrow X$ را یک اشتقاق نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

$D(ab) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$

**تعریف ۲.۲.۱.** مجموعه اشتقاقهای کراندار از $A$ به $X$ رابا $Z(A, X)$ نشان می‌دهیم. $Z(A, X)$ زیر فضای بسته از مجموعه تبدیلات کراندار از $A$ به $X$ یعنی $B(A, X)$ می-باشد

دلیل زیرفضا بودن($Z(A, X) \leqslant B(A, X)$)

بسته بودن کفایت می‌کند

$$(DG)(ab) = D(G(ab)) = D(G(a).b + a.G(b)) = D(G(a).b) + D(a.G(b)) =$$
$$D(G(a)).b + G(a).D(b) + D(a).G(b) + a.D(G(b)) = D(G(a)).b + a.D(G(b))$$

در نتیجه داریم $DG \in Z(A, X)$

**مثال.** اگر $A$ یک جبر و $X$ یک $A$- دومدول باشد نگاشت $\delta_x : A \longrightarrow X$ با ضابطه $\delta_x(a) = x \cdot a - a \cdot x$ یک اشتقاق است که به اشتقاق داخلی تولید شده توسط $x$ معروف می‌باشد

زیرا برای هر $a, b \in A$ داریم

$$\delta_x(ab) = x \cdot (ab) - (ab) \cdot x = -a \cdot (x \cdot b) + a \cdot (x \cdot b) - x \cdot (ab) - a \cdot (b \cdot x) =$$
$$a \cdot (x \cdot b - b \cdot x) - (a \cdot x) \cdot b + (x \cdot a) \cdot b = a \cdot (x \cdot b - b \cdot x) - (a \cdot x) \cdot b + (x \cdot a) \cdot b =$$
$$a \cdot (x \cdot b - b \cdot x) + (x \cdot a - a \cdot x) \cdot b = a \cdot \delta_x(b) + \delta_x(a) \cdot b$$

مجموعه اشتقاقهای داخلی از $A$ به $X$ را با $N(A, X)$ نشان می‌دهیم و بدیهی است که $N(A, X)$ زیرفضای $Z(A, X)$ است

دلیل: برای دیدن زیرفضایی $N(A, X) \leqslant Z(A, X)$ بررسی بسته بودن کفایت می‌کند.

فرض کنید که $\delta_x(a) \in N(A, X)$ و $\delta_y(a) \in N(A, X)$ پس داریم

$$\delta_x(a) + \delta_y(a) = (ax - xa) + (ay - ya) =$$

$$a(x + y) - (x + y)a = \delta_{x+y}(a) \in N(A, X)$$

پس نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

**مثال.** اگر $A$ یک جبر با واحد باشد واگر $a$ یک عنصرغیر جبری از $A$ باشد یعنی عناصر $۱, a, ...$ مستقل خطی باشند و $B$ زیر جبری از $A$ تولید شده بوسیله $۱, a, ...$ و نگاشت $D$ از $B$ به $B$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$D(\alpha_۰ + \alpha_۱ a + ... + \alpha_n a^n) = \alpha_۱ + ۲\alpha_۲ a + ... + n\alpha_n a^{n-۱}$$

آنگاه $D$ یک اشتقاق روی $B$ است که داخلی نیست (وقتیکه $B$ جابجایی است و $D \neq ۰$) برای دیدن این مطلب باید ثابت کنیم که

$$D(AB) = AD(B) + D(A)B$$

$$A = \alpha_۰ + ... + \alpha_n a^n \qquad D(A) = \alpha_۱ + ... + n\alpha_n a^{n-۱}$$

$$B = \beta_۰ + ... + \beta_n a^n \qquad D(B) = \beta_۱ + ... + n\beta_n a^{n-۱}$$

$$AB = \alpha_۰\beta_۰ + ... + (\alpha_۰\beta_n + ... + \alpha_n\beta_۰)a^n + ... + \alpha_n\beta_n a^{۲n}$$

$$D(AB) = (\alpha_۰\beta_۱ + \alpha_۱\beta_۰) + ... + n(\alpha_۰\beta_n + ... + \alpha_n\beta_۰)a^{n-۱} + ... + ۲n\alpha_n\beta_n a^{۲n-۱}$$

$$AD(B) =$$

$$\alpha_۰\beta_۱ + ... + (n\alpha_۰\beta_n + (n-۱)\alpha_۱\beta_{n-۱} + ... + \alpha_{n-۱}\beta_۱)a^{n-۱} + ... + n\alpha_n\beta_n a^{۲n-۱}$$

$$D(A)B = \alpha_۱\beta_۰ + ... + (\alpha_۱\beta_{n-۱} + ... + n\alpha_{n-۱}\beta_۱)a^{n-۱} + ... + n\alpha_n\beta_n a^{۲n-۱}$$

از آنچه که مشاهده می‌شود پیداست که $D$ یک اشتقاق روی $B$ است اما یک اشتقاق داخلی نیست چون هیچ $x$ ای نیست که برای هر $a$ بتوان رابطه $D(a) = ax - xa$

را در نظر گرفت.

این نکته قابل ذکر است که اگر $A$ یک جبر نرمدار باشد هر اشتقاق داخلی پیوسته است و همچنین

$\parallel \delta_c \parallel \leqslant ۲ \parallel c \parallel \quad (c \in A)$

دلیل پیوستگی اشتقاقهای داخلی این است که چون پیوستگی با کرانداری تحت نرم یکی است پس اشتقاقهای داخلی پیوسته هستند و همچنین دلیل نامساوی این است که داریم

$$\parallel \delta_c(a) \parallel = \parallel ca - ac \parallel \leq \parallel ca \parallel + \parallel ac \parallel \leq \parallel c \parallel \parallel a \parallel + \parallel a \parallel \parallel c \parallel$$

$$\parallel \delta_c \parallel = Sup\{\delta_c(a); \parallel a \parallel \leq ۱\} \leq \parallel c \parallel + \parallel c \parallel = ۲ \parallel c \parallel$$

بدیهی است که $A$ جابجایی است اگر و تنها اگر صفر تنها اشتقاق داخلی روی $A$ باشد.
دلیل:
$\delta_x(a) = ax - xa$ با توجه به اینکه $A$ جابجایی است این تساوی صفر می‌شود و نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

اگر $A$ یک جبر باشد، برای هر $x, y \in A$ جابجاگر $xy - yx$ را بوسیله $[x, y]$ مشخص می‌کنیم پس داریم $\delta_x(y) = [x, y]$

**تعریف ۳.۲.۱.** اشتقاقهای که داخلی نیستند خارجی نامیده می‌شوند

**قضیه ۱.۲.۱.** *فرض کنید که $D$ یک اشتقاق روی جبر $A$ باشد (طبق قرارداد $D^{۰} = I$) گزاره های زیر برقرارند*

*(الف) (قاعده لایبنیتز)*

$$D^n(ab) = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)(D^{n-r}a)(D^r b) \quad (n \in \mathbb{N}\ ,\ a,b \in A)$$

*(ب) اگر* $aDa = (Da)a$ *داریم*

$$D(a^n) = na^{n-1}Da$$

*و بالعکس.*

*(ج) اگر* $D^2 a = 0$ *آنگاه*

$$D^n(a^n) = n!(Da)^n \quad n \in \mathbb{N}$$

برهان. ([۱۴]، قضیه ۴) □

**قضیه ۲.۲.۱.** *فرض کنید که* $D$ *یک اشتقاق روی جبر* $A$ *باشد و فرض کنید که* $a$ *یک عنصر خودتوان در* $A$ *باشد آنگاه گزاره های زیر برقرارند:*

*(الف)* $a(Da)a = 0$

*(ب) اگر* $aDa = (Da)a$ *آنگاه* $\quad Da = 0$

*(ج) اگر* $A$ *دارای عنصر یکه باشد آنگاه* $\quad DI = 0$

برهان. ([۱۴]، قضیه ۵) □

در این قسمت قضیه سینگر - ورمر را اثبات می‌کنیم اما قبل از آن به یک لم می‌پردازیم.

**لم ۳.۲.۱.** *فرض کنید که* $D$ *یک اشتقاق پیوسته روی جبر باناخ* $A$ *باشد آنگاه* $expD$ *یک خودریختی (همریختی از* $A$ *به* $A$*) پیوسته روی* $A$ *است.*

*توضیح اینکه:*

$$exp\ D = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} = 1 + D + \frac{D^2}{2!} + .....$$

*برهان.* ([۱۴]، قضیه ۷) $\square$

**قضیه ۴.۲.۱.** *(سینگر - ورمر) فرض کنید که $A$ جابجایی و $rad(A)$ رادیکال جیکوبسین $A$ و $D$ یک اشتقاق پیوسته روی $A$ باشد آنگاه برای هر $a \in A$،*

$$Da \in rad(A)$$

*برهان.* فرض کنید که $\varphi$ یک همریختی روی $A$ باشد و $z \in \mathbb{C}$. آنگاه $zD$ یک اشتقاق پیوسته روی $A$ است و بنابرقضیه قبل، $exp(zD)$ یک خودریختی پیوسته روی $A$ است و بنابراین نگاشت $\quad a \longrightarrow \varphi(exp(zD)a) \quad$ یک تابع خطی ضربی است ($R$ ضربی است هرگاه $R(ab) = R(a)R(b)$)

بنابراین اگر $a \in A$ مفروض باشد داریم $\qquad |\varphi(exp(zD)a)| \leqslant \| a \| \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$

و در نتیجه نگاشت $\quad z \longrightarrow \varphi(exp(zD)a) \quad$ یک تابع تام کراندار است و طبق قضیه لیوویل این تابع ثابت خواهد بود. چون در سری توانی این تابع $\varphi(Da)$ ضریب $z$ است نتیجه می‌شود که $\varphi(Da) = ۰$.

چون $\varphi$ یک همریختی دلخواه بود نتیجه می‌شود که $\quad Da \in rad(A) \quad$ که این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

**قضیه ۵.۲.۱.** *فرض کنید که $A$ یک جبر باناخ، $A'$ مجموعه همه تابعکهای خطی پیوسته روی $A$ و $D$ یک اشتقاق روی $A$ باشد. اگر برای $\varphi \in \phi_A$ تعریف کنیم*

$$(D'\varphi)(a) = \varphi(Da) \qquad (a \in A)$$

*آنگاه مجموعه $\{\varphi \in \phi_A ; D'\varphi \in A'\}$ متناهی است.*

*برهان.* ([۱۴]، قضیه ۲۰) $\square$

**قضیه ۶.۲.۱.** *(جانسون[1]). فرض کنید $A$ یک جبر باناخ جابجایی و نیمه ساده باشد. آنگاه صفرتنها اشتقاق روی $A$ است.*

*برهان.* فرض کنید $D$ یک اشتقاق روی $A$ باشد، با استفاده از قضیه سینگر - ورمر کافی است ثابت کنیم که $D$ پیوسته است
فرض کنید که

$$\lim_{n\to\infty} x_n = ۰ \quad , \quad \lim_{n\to\infty} Dx_n = y$$

به این منظور ثابت می‌کنیم $y = \{۰\}$،
حال فرض کنید $\varphi$ یک همریختی و $D'\varphi$ به صورت زیر تعریف شود

$$(D'\varphi)(a) = \varphi(Da) \quad a \in A$$

اگر $\varphi \in \phi_A$ و $D'\varphi \in A'$ آنگاه

$$\varphi(y) = \lim_{n\to\infty} \varphi(Dx_n) = \lim_{n\to\infty}(D'\varphi)(x_n) = ۰$$

بنابر قضیه قبل می‌توانیم فرض کنیم که

$$\{\varphi \in \phi_A \ ; \ D'\varphi \in A'\} = \{\varphi_۱, ..., \varphi_n\}$$

که درآن $\varphi_۱, ..., \varphi_n$ عناصر متمایزی از $\phi_A$ هستند.
فرض کنید که $\varphi_۱(y) \neq ۰$ آنگاه بوسیله ([۱۴] ، صفحه ۹۳)، $z \in A$ موجود است با این خاصیت که $\varphi_۱(z) = ۱ \quad , \quad \varphi_j(z) = ۰ \ (j = ۲, ..., n)$
اگر قرار دهیم $e = (\varphi_۱(y))^{-۱}yz$ آنگاه $\varphi_۱(e) = ۱ \quad , \quad \varphi(e) = ۰(\varphi \in \phi_A \ \varphi_۱)$
بنابراین $\varphi(xe - \varphi_۱(x)e) = ۰(\varphi \in \phi_A, x \in A)$ و از اینکه $A$ نیمه ساده است داریم

[1] Johnson

$xe = \varphi_1(x)e(x \in A)(\star)$ و بخصوص $e^2 = e$ و بنابراین $De = 0$ و بوسیله تعریف مجموعه ای $RadA$ و رابطه $\star$ داریم

$$(Dx)e = D(xe) = \varphi_1(x)De = 0(x \in A)$$

و بنابراین $ye = \lim_{n\to\infty}(Dx_n)e = 0$ در نتیجه داریم $e = e^2 = (ye)(\varphi_1(y))^{-1}z = 0$

و این با اینکه $\varphi_1(e) = 1$ در تناقض است و بنابراین $\varphi_1(y) = 0$

به همین شکل بدست می‌آوریم $\varphi_j(y) = 0 \quad (j = 2, ..., n)$ و در نتیجه

$\varphi(y) = 0 \quad (\varphi \in \phi_A)$ و $y = 0$ $\square$

در اینجا به یک تعریف دیگری می‌پردازیم که در قضیه های دو فصل بعد از آن استفاده می‌کنیم

**تعریف ۴.۲.۱.** فرض کنید که $B$ یک جبر و $X$ یک $B$ مدول چپ باشد آنگاه نگاشت $\pi : B \longrightarrow L(X)$ ($L(X)$ جبر عملگرهای خطی از $X$ به $X$ است) را یک نمایش $B$ روی $X$ نامند هرگاه $\pi$ خطی باشد و برای هر $a, b \in B$ داشته باشیم $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ یعنی $\pi$ یک همریختی از جبر $B$ به جبر $L(X)$ باشد.

بالعکس اگر $X$ یک فضای برداری و $\pi : B \longrightarrow L(X)$ یک همریختی جبرها باشد آنگاه $X$ برای هر $x \in X$ و $b \in B$ با عمل ضرب مدولی $bx \longrightarrow \pi(b)x$ یک $B$ مدول چپ خواهد شد.

حال اگر $X$ یک $B$زیر مدول سره مثل $y$ داشته باشد و $\pi : B \longrightarrow L(X)$ یک نمایش $B$ روی $X$ باشد آنگاه به ازای هر $b \in B$، نگاشت خطی $\pi(b) : X \longrightarrow X$ دو وضعیت ممکن دارد یا $\pi(b)y \subseteq y$ یا $\pi(b)y \nsubseteq y$

اگر برای هر $b \in B$، داشته باشیم $\pi(b)y \subseteq y$ آنگاه گفته می‌شود $y$ یک زیرفضای پایا