دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

نمایش برداری احاطه‌گری گراف‌ها

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی

زهرا قائلی

استاد راهنما

دکتر بهناز عمومی

شهریور ۱۳۹۲

بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

نمایش برداری احاطه‌گری گراف‌ها

سخنران: زهرا قائلی

زمان: شنبه ۱۶ /۶ /۹۲ ساعت ۱۰ صبح

مکان: سالن کنفرانس دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر بهناز عمومی

۲– دکتر غلامرضا امیدی

۳– دکتر سید عباداله محمودیان

۴– دکتر رامین جوادی

چکیده

لواز در سال ۱۹۷۹ برای محاسبه ظرفیت شانون دور به طول پنج از نمایش گراف براساس بردارها استفاده کرد. در این راستا او تابع تتا را معرفی نمود که یک کران بالا برای ظرفیت شانون یک گراف به دست می‌دهد. همچنین لواز تعریف‌های معادل مختلف و کران‌هایی برای این تابع ارائه نمود. در حقیقت این پارامتر یک کران بالا برای عدد استقلال گراف و یک کران پایین برای عدد رنگی مکمل گراف است. نکته جالب توجه این است که با وجود این که محاسبه عدد استقلال و عدد رنگی مسائل NP–کامل هستند، تابع تتای لواز در زمان چندجمله‌ای قابل محاسبه است (به طور دقیق‌تر با خطای به اندازه دلخواه کوچک می‌توان آن را تقریب زد). به طور خاص نتیجه می‌شود که برای گراف‌های بی‌نقص محاسبه عدد استقلال گراف و عدد رنگی مکمل گراف چندجمله‌ای بوده، زیرا این دو پارامتر در گراف‌های بی‌نقص برابر هستند. به این دلیل و ویژگی‌های قابل توجه دیگر، تابع تتای لواز بسیار قابل اهمیت است.

در سال ۲۰۰۳ آهارونی و همکارانش، تابع گاما را براساس نمایش برداری احاطه‌گر گراف‌ها معرفی نمودند. این تابع ماهیتی مشابه با تابع تتای لواز دارد و در واقع، همان‌گونه که تابع تتای لواز با عدد استقلال گراف ارتباط داشت، تابع گاما ابزاری برای مطالعه عدد احاطه‌گر با استفاده از بردارها است.

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی خانم زهرا قائلی
تحت عنوان

نمایش برداری احاطه‌گری گراف‌ها

در تاریخ ۱۶ /۶ /۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر بهناز عمومی
۲– استاد مشاور	دکتر غلامرضا امیدی
۳– استاد داور۱	دکتر سید عباداله محمودیان
۴– استاد داور۲	دکتر رامین جوادی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

اِلٰهی ... وَ کُلَّما وَفَّقْتَنی مِنْ خَیْرٍ فَاَنْتَ دَلیلی عَلَیْهِ وَ طَریقی اِلَیْهِ ...

بارالها! به هر نیکی موفّقم کردی، تو راهنمایم بودی بر آن و تو بودی راه من به سوی او...

خداوندا! چگونه شکر تو گویم که سراپای وجودم غرقه در نعمت‌های توست، تویی که مرا در سایه‌ی لطف و مهرت منزل داده‌ای،

خدایا! من چگونه شکر تو گویم و حال آنکه توفیق سپاسگزاری از تو، خود محتاج شکر دیگریست،

خدایا! من با کدام زبان به سپاس بپردازم که گردش زبان به سپاس، خود نیازمند شکر است...

فرازی از دعای بعد از زیارت امام رضا(ع)

با تقدیم صمیمانه‌ترین سپاس‌ها

به الهه‌های محبت: پدر، مادر و برادرانم،

به استاد راهنمای گران قدرم سرکار خانم دکتر عمومی که وصف کمالات این فرشته الهی در قالب کلام نگنجد،

به اساتید ارجمند آقای دکتر غلامرضا امیدی استاد مشاور اینجانب، آقای دکتر محمودیان و آقای دکتر جوادی داوران محترم و نیز همه‌ی اساتید گران قدر از جمله آقای دکتر هاشمی که در محضرشان علم و اخلاق آموخته‌ام.

در پایان از تمامی دوستانم که سرشار از محبت پایدار نسبت به این حقیر هستند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم و برای همه‌ی عزیزان سلامتی و سعادت را از حضرت حق خواستارم.

و من الله توفیق

زهرا قائلی

شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست نمادها

$\gamma^*(G)$ عدد احاطه‌گر کسری گراف G، ۱۱

$\rho(G)$ عدد بسته‌بندی همسایه‌ای گراف G، ۱۲

$\rho^*(G)$ عدد بسته‌بندی همسایه‌ای کسری گراف G، ۱۲

$\tilde{\gamma}(G)$ عدد احاطه‌گر کلی از گراف G، ۱۲

$\tilde{\gamma}^*(G)$ جواب بهینه کسری برنامه‌ریزی خطی عدد احاطه‌گر کلی گراف G، ۱۳

$\tilde{\rho}(G)$ جواب صحیح دوگان برنامه‌ریزی خطی عدد احاطه‌گر کلی گراف G، ۱۳

$i\gamma(G)$ عدد احاطه‌گر مستقل گراف G، ۱۴

$i\gamma^*(G)$ عدد احاطه‌گر مستقل کسری گراف G، ۱۵

$\gamma_s^*(G)$ عدد احاطه‌گر کسری قوی گراف G، ۱۷

$\gamma_b^*(G)$ عدد احاطه‌گر دوبخشی کسری گراف G، ۳۰

$L(H)$ گراف خطی ابرگراف H، ۶۷

$\nu(H)$ عدد تطابق ابرگراف H، ۶۷

$\nu^*(H)$ عدد تطابق کسری ابرگراف H، ۶۸

$\nu_w(H)$ عدد تطابق وزنی ابرگراف H، ۶۹

$\tau(H)$ عدد پوشش ابرگراف H، ۶۸

$\tau^*(H)$ عدد پوشش کسری ابرگراف H، ۶۸

$\chi_e(H)$ عدد رنگی یالی ابرگراف H، ۶۹

$\chi_e^*(H)$ عدد رنگی یالی کسری ابرگراف H، ۶۹

$w(F)$ پهنای مجموعه یال‌های F، ۷۵

$mw(H)$ پهنای تطابق ابرگراف H، ۷۵

$\tau_{ub}(H,X)$ عدد پوشش نامتوازن صحیح از زیرمجموعه X در ابرگراف H، ۷۵

$\tau_{ub,w}^*(H,X)$ عدد پوشش وزنی کسری نامتوازن از زیرمجموعه X در ابرگراف H، ۷۳

$\tau_{ub}(H)$ عدد پوشش نامتوازن ابرگراف $r-$یکنواخت $r-$بخشی H، ۸۴

$\tau_{ub}^*(H)$ عدد پوشش نامتوازن کسری ابرگراف $r-$یکنواخت $r-$بخشی H، ۸۵

$def(\mathcal{A})$ نقص خانواده ابرگراف‌های $\mathcal{A}$، ۷۶

ISR سیستم نمایندگی مستقل، ۶۹

SDR سیستم نمایندگی متمایز، ۷۰

M_P ماتریس مرتبط با نمایش برداری P، ۹
$|P|$ مقدار نمایش برداری P، ۹
$\dim(\mathrm{P})$ بعد نمایش برداری P، ۳۷
$\Gamma(G)$ تابع گاما، ۱۰
$\hat{\Gamma}(G)$ تابع گامای ضعیف، ۳۴
$\mathcal{I}(G)$ مجتمع مستقل گراف G، ۴
$flag(G)$ مجتمع پرچمی گراف G، ۴
$\eta(\Delta)$ همبندی هومولوژیکی مجتمع سادکی Δ، ۲۰
$\tilde{H}^i(\Delta, \mathbb{R})$ iامین گروه کوهمولوژی کاهش‌یافته از مجتمع سادکی Δ با ضرایب حقیقی، ۲۰
$\mathrm{lk}(\sigma)$ پیوند سادک σ، ۲۱
$\mathrm{conv}(\mathrm{X})$ بدنه محدب مجموعه X، ۴۳

چکیده

لواز در سال ۱۹۷۹ برای محاسبه ظرفیت شانون دور به طول پنج از نمایش گراف براساس بردارها استفاده کرد. در این راستا او تابع تتا را معرفی نمود که یک کران بالا برای ظرفیت شانون یک گراف به دست می‌دهد. هم‌چنین لواز تعریف‌های معادل مختلف و کران‌هایی برای این تابع ارائه نمود. در حقیقت این پارامتر یک کران بالا برای عدد استقلال گراف و یک کران پایین برای عدد رنگی مکمل گراف است. نکته جالب توجه این است که با وجود این که محاسبه عدد استقلال و عدد رنگی مسائل NP−کامل هستند، تابع تتای لواز در زمان چندجمله‌ای قابل محاسبه است (به طور دقیق‌تر با خطای به اندازه دلخواه کوچک می‌توان آن را تقریب زد). به طور خاص نتیجه می‌شود که برای گراف‌های بی‌نقص محاسبه عدد استقلال گراف و عدد رنگی مکمل گراف چندجمله‌ای بوده، زیرا این دو پارامتر در گراف‌های بی‌نقص برابر هستند. به این دلیل و ویژگی‌های قابل توجه دیگر، تابع تتای لواز بسیار قابل اهمیت است.

در سال ۲۰۰۳ آهارونی و همکارانش، تابع گاما را براساس نمایش برداری احاطه‌گر گراف‌ها معرفی نمودند. این تابع ماهیتی مشابه با تابع تتای لواز دارد و در واقع، همان‌گونه که تابع تتای لواز با عدد استقلال گراف ارتباط داشت، تابع گاما ابزاری برای مطالعه عدد احاطه‌گر با استفاده از بردارها است.

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم مورد نیاز

در این فصل ضمن اشاره به تاریخچه مختصری از موضوع مورد مطالعه، تعاریف و مقدمات مورد استفاده در فصل‌های بعد را بیان می‌کنیم و در پایان مروری بر مطالب فصل‌های پایان‌نامه خواهیم داشت.

در این پایان‌نامه فرض می‌کنیم خوانندگان محترم با مفاهیم اولیه نظریه گراف آشنا هستند. تنها برای یکسان شدن نمادها برخی از مفاهیم را یادآوری می‌کنیم و برای جزئیات بیش‌تر خواننده را به [۶] ارجاع می‌دهیم.

به سه تایی مرتب $G = (V(G), E(G), I_G)$ که در آن $V(G)$ یک مجموعه ناتهی به نام رأس‌ها و $E(G)$ یک مجموعه مجزا از $V(G)$ به نام یال‌ها و I_G نگاشت وقوع است که به هر عضو از $E(G)$ یک زوج نامرتب و نه لزوماً متفاوت از $V(G)$ را نظیر می‌کند که به شکل $I_G(e) = uv$ نمایش داده می‌شود، گراف گفته می‌شود. معمولاً گراف G با مجموعه یال‌ها و رئوس به شکل $G = (V, E)$ نمایش داده می‌شود. یک ابرگراف H مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه V است که یال نامیده می‌شود و به عناصر یال‌ها رأس می‌گویند. ابرگراف H با مجموعه یال‌ها و رأس‌ها به شکل $H = (V, E)$ نمایش داده می‌شود. مجموعه همسایه‌های رأس u با $N(u)$ و مجموعه رئوس شامل همسایه‌های u و خود u نیز با $N[u]$ نمایش داده می‌شود. خانواده تمام زیرمجموعه‌های مجموعه V را سیستم مجموعه‌ای ارثی می‌نامیم و با نماد 2^V نمایش می‌دهیم. مجموعه اعداد صحیح نامنفی با نماد $\mathbb{Z}_+$، مجموعه $1, \ldots, k$ با نماد $[k]$، iامین مؤلفه بردار x با x_i و نرم آن نیز با $\|x\|$ نمایش داده می‌شوند. نماد $\langle x, y\rangle$ و یا $x \cdot y$ نیز معرف ضرب داخلی دو بردار x و y است. هم‌چنین بردار تمام ۱ از طول n به صورت $\mathbf{1}_n$ در نظر گرفته می‌شود.

۱.۱ ماتریس لاپلاسین و مقدمات جبری

در ادامه به معرفی ماتریس لاپلاسین یک گراف می‌پردازیم و برخی از حقایق جبرخطی که در ادامه مورد نیاز هستند را بیان می‌کنیم. برای مطالعه بیش‌تر به [۱۰] مراجعه کنید.

ماتریس متقارن A **نیمه‌معین مثبت** نامیده می‌شود هرگاه همه مقادیرویژه آن نامنفی باشد و نیز **معین مثبت** است هرگاه همه مقادیرویژه آن مثبت باشند.

تعریف ۱.۱.۱ **ماتریس لاپلاسین** گراف G که با L_G نمایش می‌دهیم، یک ماتریس $|V| \times |V|$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L_G(u,v) := \begin{cases} \deg(u) & u = v; \\ -1 & (u,v) \in E; \\ 0 & \text{در غیر این صورت}. \end{cases}$$

از آن‌جا که $L_G = DD^T$ که D ماتریس وقوع گراف جهت‌دار G است، ماتریس L_G یک ماتریس نیمه‌معین مثبت است. بزرگ‌ترین مقدارویژه ماتریس L_G با $\lambda_{\max}(G)$ نمایش داده می‌شود.

در ادامه برخی از ویژگی‌های ماتریس لاپلاسین و مقادیرویژه آن را مرور خواهیم کرد.

گزاره ۲.۱.۱ [۱۰] فرض کنید G گرافی با n رأس باشد. مکمل گراف G با $\overline{G}$ نمایش داده می‌شود. در این صورت حقایق زیر برقرارند.

۱. اگر G دارای c مؤلفه همبندی باشد، آن‌گاه $\mathrm{rank}(L_G) = n - c$.

۲. اگر $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n = \lambda_{\max}$ مقادیرویژه ماتریس لاپلاسین G باشند، آن‌گاه برای هر i، $2 \le i \le n$، $\lambda_i(\overline{G}) = n - \lambda_{n-i+2}(G)$.

۳. برای هر گراف G، $\lambda_{\max}(G) \le n$. اگر $\overline{G}$ دارای $\bar{c}$ مؤلفه همبندی باشد، آن‌گاه تکرر n به عنوان مقدارویژه L_G برابر با $\bar{c} - 1$ است.

بنا به قسمت دوم گزاره فوق با داشتن $\lambda_{\max}(G)$، دومین کوچک‌ترین مقدارویژه $\overline{G}$ نیز به دست می‌آید. با توجه به تعریف فوق گزاره زیر به راحتی دیده می‌شود.

گزاره ۳.۱.۱ برای هر بردار x داریم،

$$x^T L_G x = \sum_{(u,v)\in E} (x_u - x_v)^2.$$

گزاره ۴.۱.۱ [۱۰] فرض کنید H زیرگرافی از G باشد (نه لزوماً القایی). در این صورت $\lambda_{\max}(H) \leq \lambda_{\max}(G)$.

در این نوشتار ماکزیمم درجه گراف G با $\Delta(G)$ نمایش داده می‌شود.

گزاره ۵.۱.۱ [۲۱] برای هر گراف G، $\lambda_{\max}(G) \geq \Delta(G) + 1$. به علاوه اگر G همبند باشد و $|V(G)| > \Delta(G) + 1$، آنگاه $\lambda_{\max}(G) > \Delta(G) + 1$.

۲.۱ مقدمات توپولوژیکی

عامل ارتباط بین ترکیبیات و توپولوژی مفهوم مجتمع‌های سادکی است که می‌توان آن‌ها را به عنوان اشیاء محض ترکیبیاتی یعنی همان سیستم مجموعه‌ای ارثی در نظر گرفت. انواع زیادی از اشیاء ترکیبیاتی نظیر گراف‌ها، ابرگراف‌ها، افرازها و ... می‌توانند با سیستم‌های مجموعه‌ای ارثی در ارتباط باشند که با در نظر گرفتن این سیستم‌های ارثی به عنوان مجتمع‌های سادکی می‌توان فضاهای توپولوژیکی را به اشیاء ترکیبیاتی مورد بررسی متناظر کرد. این فضاها با روش‌های توپولوژی جبری مورد مطالعه قرار می‌گیرند و اغلب خواص توپولوژکی آن‌ها مرتبط با خواص ترکیبیاتی اشیاء اصلی است. در این بخش برخی از مفاهیم توپولوژیکی آورده می‌شود. برای توضیحات بیش‌تر می‌توان به [۱۵] مراجعه نمود.

تعریف ۱.۲.۱ [۱۵] یک **مجتمع سادکی مجرد** Δ روی مجموعه متناهی V، یک خانواده ناتهی از زیرمجموعه‌های V است به طوری که دو شرط زیر برقرار باشد.

- برای هر $v \in V$، $\{v\} \in \Delta$،
- اگر $K \in \Delta$ و $F \subseteq K$ آنگاه F نیز عضو Δ باشد.

اعضای Δ **وجه** و یا **سادک** نامیده می‌شود. بعد سادک F را با d نمایش داده که به صورت زیر

$$d := \dim F = |F| - 1,$$

تعریف شده و به سادک‌های d بعدی $d-$**سادک** نیز گفته می‌شود. هم‌چنین **بعد** Δ نیز به صورت زیر

تعریف می‌شود.

$$\dim\Delta := \max\{|F|-1 \ : \ F\in\Delta\}.$$

به عنوان مثال ابرگراف $\mathcal{H}$ یک **مجتمع سادکی** نامیده می‌شود، هرگاه خاصیت ارثی داشته باشد، به این معنا که برای هر یال σ در $\mathcal{H}$ اگر $\tau\subseteq\sigma$، آنگاه τ نیز یالی در $\mathcal{H}$ باشد. یال‌های $\mathcal{H}$ را **سادک**‌های آن و به مجموعه رئوس آن **مجموعه زمینه** گفته می‌شود. یک نمونه دیگر از یک مجتمع سادکی خانواده‌ای از مجموعه‌های مستقل در گراف G است که با $\mathcal{I}(G)$ نمایش داده می‌شود. همچنین خانواده همه خوشه‌ها در G را که با $flag(G)$ نمایش داده، **مجتمع پرچمی** می‌نامند. به بیان دیگر $flag(G)=\mathcal{I}(\overline{G})$.

تعریف ۲.۲.۱ [۱۵] یک **زیرمجتمع** از مجتمع سادکی Δ یک زیرمجموعه از Δ است به طوری که خودش یک مجتمع سادکی باشد و یا به عبارتی نسبت به داشتن وجه‌ها بسته باشد.

یک مثال مهم از یک زیرمجتمع، $k-$**اسکلت** از یک مجتمع سادکی Δ است که شامل همه سادک‌های Δ از بعد حداکثر k است.

تعریف ۳.۲.۱ هرگاه برای مجموعه رئوس یک سادک، ترتیبی در نظر گرفته شود، به آن **سادک جهت‌دار** گفته می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱ [۱۵] دو نگاشت پیوسته $f,g:X\to Y$ را **هوموتوپیک** نامیده، هرگاه یک خانواده $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ از نگاشت‌های $f_t:X\to Y$ به طور پیوسته وابسته به t موجود باشد به طوری که $f_0=f$ و $f_1=g$. دو نگاشت هوموتوپیک با نماد $f\sim g$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱ [۱۵] دو فضای توپولوژی X و Y را **هم‌ارز هوموتوپی** نامیده، هرگاه نگاشت‌های پیوسته $f:X\to Y$ و $g:Y\to X$ موجود باشند به طوری که ترکیب $f\circ g:Y\to Y$ هوموتوپ با نگاشت همانی id_Y باشد و $g\circ f\sim id_X$.

۳.۱ نمایش برداری گراف‌ها

در این بخش با تعریف نمایش برداری گراف آشنا خواهیم شد. ابتدا مفاهیمی از جبرخطی را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱ [۱۱] فرض کنید W یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک **فرم دوخطی** روی W تابعی مانند b است که به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در W یک اسکالر $b(x,y)$ را در $\mathbb{F}$ تخصیص

دهد و در شرایط زیر صدق کند.

$$b(cx_1+x_2,y)=cb(x_1,y)+b(x_2,y),$$
$$b(x,cy_1+y_2)=cb(x,y_1)+b(x,y_2).$$

تعریف ۲.۳.۱ [۱۱] فرمی دوخطی چون b روی یک فضای برداری W **ناتبهگون** نامیده می‌شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

۱. به ازای هر بردار ناصفر x در W، yای در W وجود دارد به طوری که $b(x,y)\neq 0$،

۲. به ازای هر بردار ناصفر y در W، xای در W وجود دارد به طوری که $b(x,y)\neq 0$.

حال با استفاده از دو تعریف فوق به تعریف نمایش برداری گراف G می‌پردازیم.

میدان $\mathbb{F}$ و زیرمجموعه‌های S، A، B و C از آن را در نظر بگیرید. فرض کنید d یک عدد صحیح مثبت و $b(x,y)$ روی $\mathbb{F}^d$ یک فرم دوخطی ناتبهگون باشد. **نمایش برداری** گراف ساده G با رئوس $v_1,\dots,v_n$ یک لیست از بردارهای $\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n}$ روی $\mathbb{F}^d$ است به طوری که مؤلفه‌های $\overrightarrow{v_i}$ها در S قرار دارند و برای هر i و j، $b(\overrightarrow{v_i},\overrightarrow{v_i})\in A$، علاوه بر این اگر v_i و v_j در G مجاور باشند، آن‌گاه $b(\overrightarrow{v_i},\overrightarrow{v_j})\in B$ و در غیر این صورت $b(\overrightarrow{v_i},\overrightarrow{v_j})\in C$. به بیان دیگر نمایش برداری گراف، اختصاص بردارهای فضای $\mathbb{F}^d$ به رئوس گراف است به طوری که بر طبق رابطه‌ای مشخص بین دو بردار، مجاورت و عدم مجاورت دو رأس مشخص می‌شود. با در نظر گرفتن مجموعه‌های مختلف A و B و C انواع مختلفی از نمایش‌های برداری تعریف شده است. مروری بر نمایش‌های برداری گراف‌ها در پایان‌نامه خانم مدللیان [۱] انجام شده است.

با در نظر گرفتن $S=\mathbb{F}=\mathbb{R}$، $B=[1,+\infty)$، $A=C=[0,+\infty)$ و عمل ضرب داخلی دو بردار به عنوان تابع b نوع خاصی از نمایش برداری گراف به نام نمایش برداری احاطه‌گر تعریف شده است.

یک نمایش برداری احاطه‌گر از گراف G یک تخصیص P از یک بردار $P(v)\in\mathbb{R}^d$ برای d ثابت به هر رأس گراف است، به طوری که هرگاه دو رأس u و v در G مجاور باشند $P(u)\cdot P(v)\geq 1$ و برای سایر رئوس u و v، $P(u)\cdot P(v)\geq 0$. یک بردار نامنفی α روی V یک احاطه‌گر برای P گفته می‌شود، هرگاه برای هر رأس u، $\sum_{v\in V}\alpha(v)P(v)\cdot P(u)\geq 1$. مقدار $|P|$ کم‌ترین $\sum_{v\in V}\alpha(v)$ روی همه بردارهای αای است که برای نمایش برداری P احاطه‌گر هستند. سوپریمم $|P|$ روی همه نمایش‌های برداری G با $\Gamma(G)$

نشان داده می‌شود و تابع گاما نامیده می‌شود. به عبارت دیگر

$$\Gamma(G) := \sup_{P} \min_{\alpha} \sum_{v \in V} \alpha(v),$$

که α بردار احاطه‌گر برای نمایش برداری P است.

در این پایان‌نامه تنها از نمایش برداری احاطه‌گر استفاده می‌شود. بنابراین برای اختصار در اغلب موارد تنها از عبارت نمایش برداری استفاده می‌کنیم.

تابع گاما در سال ۲۰۰۳ توسط آهارونی، برگر و مشولام در [۳] معرفی شد. در حالت کلی محاسبه تابع گاما برای گراف‌های مختلف کار ساده‌ای نیست. کران‌های بالا و پایین برای این پارامتر داده شده است که با استفاده از آن‌ها مقدار دقیق $\Gamma(G)$ برای درخت‌ها، مسیرها و دورها محاسبه شده است.

هم‌چنین این تابع یک کران پایین برای همبندی همولوژیکی مجتمع مستقل گراف است و بنابراین مقداری برای مطالعه مسأله تطابق از طریق روش‌های توپولوژیکی است.

این تابع ماهیتی مشابه با تابع تتا دارد. در این مفهوم با استفاده از بردارها مشابه با روش تابع تتای لواز که عدد استقلال گراف را نمایش می‌دهد عدد احاطه‌گر گراف به طور برداری نمایش داده می‌شود.

تابع تتا که به عدد لواز معروف است در سال ۱۹۷۹ توسط لواز در [۱۳] معرفی شد که در تعریف این تابع از نمایش برداری متعامد استفاده شده است و برای آشنایی با جزئیات می‌توان به [۱] مراجعه کرد. نکته مهم و قابل توجه در مورد تابع تتا قابل محاسبه بودن آن در زمان چندجمله‌ای است. هم‌چنین از آن‌جا که این تابع بین دو پارامتر عدد رنگی گراف‌ها و عدد خوشه‌ای قرار می‌گیرد و محاسبه این دو پارامتر NP−کامل است، برای گراف‌هایی مانند گراف‌های بی‌نقص که در آن‌ها این دو پارامتر با هم برابر است می‌توان گفت از طریق محاسبه تابع تتا این دو پارامتر در زمان چندجمله‌ای به دست می‌آید ([۱۲]).

هدف این پایان‌نامه آشنایی و مطالعه تابع گاما و کلیه نتایج به دست آمده در این رابطه است.

۴.۱ ساختار پایان‌نامه

در این پایان‌نامه سعی شده مطالب مرجع [۲۱] به طور کامل و مرجع [۳] در حد نیاز مورد مطالعه قرار گیرند. در فصلی که گذشت ابتدا به بیان مقدمات مورد نیاز پرداختیم.

در فصل ۲ ابتدا به تعریف دقیق تابع گاما می‌پردازیم. هم‌چنین برخی از پارامترهای مختلف احاطه‌گری که کران‌های خوبی برای تابع گاما به دست می‌دهند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس نوع دیگری از تابع گاما تحت عنوان تابع گامای ضعیف را معرفی و مطالب گفته شده برای تابع گاما را برای آن نیز بررسی می‌کنیم. در نهایت به سراغ بعد نمایش برداری و ارتباط آن با تابع گاما می‌رویم.

در فصل ۳ عمل‌های مختلفی نظیر جمع و ضرب گراف‌ها و نیز تکثیر رأس‌ها در گراف را در نظر می‌گیریم و رفتار تابع گاما و تابع گامای ضعیف را روی این اعمال بررسی می‌کنیم. هم‌چنین نشان می‌دهیم حدس ویزینگ که در ارتباط با عدد احاطه‌گر است برای تابع گامای ضعیف برقرار است.

در فصل ۴ قصد داریم به کاربردهای ترکیبیاتی تابع گاما اشاره کنیم. بدین منظور ابتدا مفاهیم مقدماتی ابرگراف‌ها را بیان کرده سپس تعمیم قضیه هال برای ابرگراف‌ها و ارتباط آن با تابع گاما را بیان می‌کنیم و در نهایت به بیان حدس‌هایی مرتبط با حدس رایزر می‌پردازیم.

فصل ۲

تابع گاما و کران‌های آن

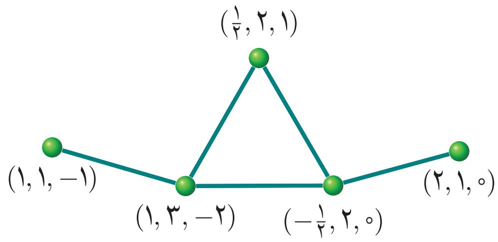
در این فصل ابتدا به تعریف دقیق مفهوم تابع گاما پرداخته، سپس چند نوع از پارامترهای مختلف احاطه‌گری را معرفی کرده و رابطه آن‌ها با تابع گاما را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. پس از آن به مطالعه پارامتر همبندی همولوژیکی می‌پردازیم و ارتباط آن با تابع گاما را بررسی می‌کنیم. در نهایت به معرفی گونه‌ای دیگر از نمایش برداری احاطه‌گری تحت عنوان نمایش برداری احاطه‌گری ضعیف خواهیم پرداخت و تمام مطالعات انجام شده روی تابع گاما را با این تعریف جدید مورد تطبیق قرار می‌دهیم و حدس مهم مربوط به ارتباط این دو تعریف را مطرح می‌کنیم. در پایان به بیان مطالبی در مورد بعد نمایش برداری می‌پردازیم. مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۲۱] است.

۱.۲ تابع گاما $\Gamma(G)$

در ابتدا به معرفی نمایش برداری احاطه‌گر برای گراف G می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۲ [۲۱] یک **نمایش برداری احاطه‌گر** برای گراف G یک برچسب‌گذاری و یا تخصیصی از بردارهای $P \in \mathbb{R}^d$ برای d ثابت به رأس‌های گراف است به طوری که اگر u و v در G مجاور باشند، $P(u) \cdot P(v) \geq ۱$ و در غیر این صورت $P(u) \cdot P(v) \geq ۰$.

به عنوان مثال بردارهای نشان داده شده در گراف زیر یک نمایش برداری احاطه‌گر را برای این گراف مشخص می‌کند.



به طور ساده برای هر گراف نمایش برداری احاطه‌گر بدیهی $P : V \rightarrow \mathbb{R}$ به گونه‌ای که به هر رأس مقدار ۱ اختصاص دهیم، وجود دارد.

همان‌گونه که اشاره کردیم در این پایان‌نامه تنها از نمایش برداری احاطه‌گر استفاده می‌شود. بنابراین برای اختصار در اغلب موارد تنها از عبارت نمایش برداری استفاده می‌کنیم.

متناظر با هر نمایش برداری P یک ماتریس M_P از مرتبه $|V| \times |V|$ در نظر می‌گیریم به طوری که $(M_P)_{u,v} = P(u) \cdot P(v)$. بنابراین M_P یک ماتریس نیمه‌معین مثبت است زیرا هر درایه برابر با حاصل‌ضرب داخلی دو بردار است. لم زیر نشان می‌دهد که متناظر با هر ماتریسی که خواص ماتریس M_P را دارد یک نمایش برداری احاطه‌گر وجود دارد.

لم ۲.۱.۲ [۲۱] فرض کنید M یک ماتریس $|V| \times |V|$ باشد. نمایش برداری P از G وجود دارد به طوری که $M = M_P$ اگر و تنها اگر M یک ماتریس نیمه‌معین مثبت با درایه‌های نامنفی باشد و برای هر دو رأس u و v که در G مجاورند، $M_{u,v} \geq ۱$.

برهان. طرف اول لم بنا به تعریف M_P واضح است. برای اثبات برگشت کافیست از روی ماتریس M یک نمایش برداری احاطه‌گر ارائه دهیم. از آن‌جا که M ماتریس نیمه‌معین مثبت است پس ماتریس $U_{d\times|V|}$ وجود دارد که $M = U^tU$. بنابراین کافی است بردار $P(v)$ نظیر هر رأس v را ستون‌های U قرار دهیم. حال چون درایه‌های M متناظر با حاصل‌ضرب داخلی ستون‌های U است و هر درایه $M_{u,v}$ که u و v در G مجاورند بزرگ‌تر مساوی ۱ است، داریم $P(u) \cdot P(v) \geq ۱$. هم‌چنین M ماتریس نامنفی است پس برای هر دو رأس u و v، $P(u) \cdot P(v) \geq ۰$. در نتیجه نمایش برداری P یک نمایش برداری احاطه‌گر برای P است و $M = M_P$. ■

در ادامه تعریفی از مقدار یک نمایش برداری بیان می‌کنیم.

تعریف ۳.۱.۲ [۲۱] بردار نامنفی $\alpha \in \mathbb{R}^V$ برای نمایش برداری P **احاطه‌گر** است، هرگاه برای هر رأس u، $\sum_{v\in V} \alpha(v)P(v) \cdot P(u) \geq ۱$ و یا به طور معادل $M_P \cdot \alpha \geq ۱_{|V|}$. **مقدار** P از نمایش برداری P برابر با کم‌ترین مقدار $\sum_{v\in V} \alpha(v)$ بر روی تمام بردارهای αای است که برای P احاطه‌گرند، و با $|P|$