دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (گرایش جبر)

موضوع:

گراف غیر دوری از یک گروه

استاد راهنما:

دکتر علی‌اصغر طالبی

استاد مشاور:

دکتر یحیی طالبی

نام دانشجو:

سارا کیا کجوری

بهمن ۱۳۸۹

تقدیرنامه

تمام تلاشم را ـ هرچند ناچیز، که بضاعتم بیش از این نبوده است ـ مدیون روح جستجوگر بشر هستم که قرن هاست از نسلی به نسل دیگر سپرده می شود و روزهایی را با ماست تا به دیگرانش بسپاریم، و سپاسگذارم از هر کس و هر چیزی که ذره ای، خرد یا درشت به من آموخت، چه دشمن و چه دوست، چه با عشق بوده یا از روی احساس وظیفه، چه جاندار و چه بی جان...

سارا کیا

چکیده

در این پایان نامه، گراف های غیردوری و گراف های توانی روی گروه ها را معرفی کرده و برخی از ویژگی های این گراف ها را بررسی می نماییم. هم چنین گروه هایی با گراف غیر دوری یکتا و گروه هایی با گراف غیردوری همبند را مشخص می کنیم. عدد خوشه ای را برای گراف ها به دست آورده و شرایطی را برای گراف های منتظم بیان می کنیم. در نهایت به معرفی و ذکر خواص گراف های مرکزی می پردازیم.

واژه های کلیدی: گراف غیردوری، گراف توانی، گروه متناهی، قطر، عدد خوشه ای، یک ریختی گراف، گراف مرکزی

فهرست مطالب

مقدمـــه

یکی از ویژگی های بارز ریاضیات، قدرت مدل سازی آن است. تاریخ تحول فکری بشر سرشار از مثال‌هایی در تأیید این مطلب است. در دنیای اطراف ما، وضعیت های فراوانی وجود دارند که می توان توسط نموداری متشکل از یک مجموعه ی نقاط، به علاوه ی خطوطی که برخی از این نقاط را به یک دیگر وصل می کنند، به توصیف آن ها پرداخت. تجرد ریاضی این وضعیت ها به مفهوم گراف منتهی می شود.

مطالعه ساختارهای جبری با استفاده از ویژگی های گراف، تبدیل به یک موضوع تحقیقی جذاب و سودمند در دهه های اخیر شده است که این امر منتهی به نتایج و سوالات متنوع در زمینه نظریه جبری گراف ها شد. روی گراف های ساخته شده از گروه ها مطالعات زیادی انجام گرفته است، به عنوان مثال پل اردوس اولین کسی بود که گراف های غیرجابه جایی را مطرح کرد [۲۶]. کلارو و کوئین گراف های توانی را روی نیم گروه ها تعریف کردند[۲۲]. همچنین در [۲] دکتر عبدالهی گراف های غیر دوری را روی گروه ها معرفی و بررسی کردند.

در این پایان نامه سعی شده برخی خواص مهم از گراف های غیر دوری و گراف های توانی از یک گروه ذکر و بررسی شود.

در فصل اول، به تعاریف و مفاهیم مقدماتی از نظریه گروه ها و گراف ها که در فصول بعد به آن ها نیاز داریم، می پردازیم. بیشتر این تعاریف و قضایا از مرجع های [۱۱]، [۱۹] و [۳۸] گرفته شده است.

در فصل دوم، برخی نتایج به دست امده برای دوری سازها را ارائه می دهیم. همچنین برخی خواص کلی برای گراف های غیردوری از یک گروه مانند همبندی گراف غیردوری از گروه موضعاً دوری را اثبات می کنیم.

در فصل سوم، گروه هایی را مشخص می کنیم که گراف غیردوری آن ها خوشه نامتناهی ندارد و نیز گروه های غیردوری متناهی را مشخص می کنیم که گراف غیردوری آن ها منتظم است. در انتهای فصل، گروه هایی با گراف غیردوری یکتا ارائه می دهیم.

در فصل چهارم، برخی از قضایای به دست آمده برای گراف های توانی را بیان کرده و برای دو گروه $Z_{p^\alpha} \times Z_2$ و D_{2p^α} گراف توانی آن ها را به دست می آوریم و تعدادی از خواص آن را اثبات می کنیم.

فصل اول

تعاریف مقدماتی و پیش نیازها

در این فصل تعارف اولیه و پایه ای مورد نیاز از گروه و گراف را عنوان کرده و مثال هایی برای درک بهتر آن ها ارائه می دهیم.

۱-۱ مقدمه‌ای بر گروه‌ها

۱-۱-۱ تعریف: گروه G یک گروه دوری است، هرگاه $a \in G$ ای موجود باشد به طوری که $G = \langle a \rangle$.

یادآور می‌شویم که $\langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$.

۱-۱-۲ قضیه: [۱۹] اگر G یک گروه دوری متناهی باشد به طوری که به ازای عدد اول p، $p \big| |G|$، آن گاه G زیر گروهی از مرتبه p دارد.

۱-۱-۳ تعریف: گروه G را متناهیاً تولید شده نامند، هرگاه مجموعه ی متناهی $X \subseteq G$ ای موجود باشد به طوری که $G = \langle X \rangle$. در این حالت X را یک مجموعه مولد برای G می نامیم.

۱-۱-۴ تعریف: فرض کنید G و H دو گروه باشند و $f: G \to H$ یک هم ریختی باشد، در این صورت،

(الف) اگر f یک به یک باشد، آن گاه f را «تکریختی» می نامیم.

(ب) اگر f پوشا باشد، آن گاه f را «برووریختی» می نامیم.

(ج) اگر f یک به یک و پوشا باشد، آن گاه f را «یکریختی» می نامیم.

۱-۱-۵ تعریف: فرض کنید G یک گروه و $x \in G$، در این صورت مجموعه‌ی $\{g \in G | xg = gx\}$

یک زیرگروه G است، این زیرگروه را مرکزساز x در G گویند و آن را با $C_G(x)$ (یا مختصراً $C(x)$) نمایش می دهند. واضح است که $Z(G) = \bigcap_{x\in G} C(x)$.

۱-۱-۶ تعریف: فرض کنید G یک گروه باشد. برای عنصر $x \in G$ مجموعه‌ی

$$Cyc_G(x) = \left\{ y \in G \middle| \langle x, y \rangle \text{دوری است} \right\}$$

را دوری ساز x می نامند. به ویژه

$$Cyc(G) = \left\{ y \in G \middle| \forall x \in G \text{؛ } \langle x, y \rangle \text{ دوری است} \right\}$$

را دوری ساز گروه G نامند.

۱-۱-۷ تعریف: هرگاه H زیر مجموعه غیرتهی گروه G باشد، در این صورت «نرمال ساز H در G» مجموعه ی

$$N_G(H) = \{ g \in G | gHg^{-1} = H \}$$

است. که در آن $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$ مزدوج H در G نامیده می شود.

۱-۱-۸ تعریف: گروه G یک گروه ساده است اگر G زیرگروه نرمال غیربدیهی نداشته باشد.

۱-۱-۹ تعریف: فرض کنید $G_1, \dots, G_n$ گروه باشند، در این صورت حاصل ضرب دکارتی G_i ها با نماد

$$G = \prod_{i=1}^{n} G_i = G_1 \times \dots \times G_n$$

همراه با عمل ضرب مولفه ای زیر، یک گروه است:

$$(g_1, \dots, g_n)(g_1', \dots, g_n') = (g_1 g_1', \dots, g_n g_n')$$

که در آن به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، g_i و g_i' در Gاند. این گروه را حاصل ضرب مستقیم گروه-های $G_1, \dots, G_n$ می نامیم.

۱-۱-۱۰ تذکر: اگر عمل دوتائی G_iها جمعی باشد، به ویژه اگر G_i ها آبلی باشند، حاصل ضرب مستقیم G_iها را به صورت $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$ می نویسیم و آن را مجموع مستقیم G_iها می نامیم.

۱-۱-۱۱ تعریف: فرض کنید G یک گروه و p یک عدد اول باشد. گروه G را یک p-گروه می نامیم در صورتی که مرتبه ی هر عضو G توان مثبتی از p باشد. زیرگروه H از G را یک p-زیرگروه می گوییم در صورتی که H یک p-گروه باشد.

۱-۱-۱۳ قضیه: [۱۹] فرض کنید G گروهی غیربدیهی باشد. در این صورت G یک p -گروه متناهی است اگر و تنها اگر به ازای عدد صحیح و مثبت k، $|G| = p^k$.

۱-۱-۱۴ تعریف: گروه به طور موضعی متناهی گروهی است که هر زیرگروه متناهیاً تولید شده آن، متناهی است.

۱-۱-۱۵ قضیه: [۳۷] اگر $N \lhd G$ و گروه های N و G/N هر دو به طور موضعی متناهی باشند، آن گاه G به طور موضعی متناهی است.

۱-۱-۱۶ تعریف: p-گروه آبلی متناهی G را آبلی مقدماتی گوئیم، در صورتی که مرتبه ی هر عضو غیر بدیهی G عدد اول p باشد.

۱-۱-۱۷ مثال: $G = Z_p \times Z_p \times \ldots \times Z_p$ یک p -گروه آبلی مقدماتی است.

۱-۱-۱۸ تعریف: فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبه ی $p^\alpha m$ باشد، که در آن α یک عدد صحیح نامنفی است و p عدد اولی است که $p \nmid m$. در این صورت هر زیرگروه G از مرتبه p^α را یک p-زیرگروه سیلوی G می نامند. مجموعه‌ی تمام p- زیرگروه های سیلوی G را با نماد $Syl_p(G)$ نمایش می دهیم.

۱-۱-۱۹ تعریف: گروه G را تاب دار گویند، هرگاه مرتبه ی هر عضو آن متناهی باشد. به طور مشابه گروه G را بی تاب گویند، هرگاه مرتبه ی هر عضو غیربدیهی آن نامتناهی باشد.

بدیهی است که در یک گروه متناهی مرتبه همه اعضا متناهی است و بنابراین هر گروه متناهی یک گروه تاب دار است. از طرف دیگر، مثال هایی از گروه های نامتناهی موجودند که تاب دارند. به عنوان مثال گروه $G = \langle (12), (34), (56), \ldots \rangle$ چنین است. مثال‌هایی از گروه های بی تاب عبارتند از گروه های جمعی Z و Q و R. (توضیح این که گروه بدیهی هم تاب دار و هم بی تاب است) .

۱-۱-۲۰ تعریف: گروه Q_{2^n} را به ازای $n \geq 3$، گروه کوارتینی تعمیم یافته گویند که به صورت زیر ارائه می شود:

$$Q_{2^n} = \langle x, y | x^{2^{n-1}} = 1 , y^2 = x^{2^{n-2}} , y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

این گروه از مرتبه 2^n است و دارای این خاصیت است که هر زیرگروه آبلی آن دوری است.

۱-۱-۲۱ تعریف: گروه D_{2n} که در آن $n \geq 2$، را گروه دووجهی از مرتبه $2n$ گویند که به صورت زیر ارائه می شود:

$$D_{2n} = \langle x, y | x^n = y^2 = 1 , y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

اینک به مقایسه گروه کوارتینی Q_8 و گروه دو وجهی D_8 می پردازیم.

گروه کوارتینی Q_8 دارای نمایشی به صورت زیر است:

$$Q_8 = \langle a, b | a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}.$$

$$o(a) = 4 , o(a^2) = 2 , o(a^3) = 4 , o(b) = 4$$

$$(ab)^2 = abab = aa^3bb = b^2 = a^2 \Rightarrow o(ab) = 4$$

$$(a^2b)^2 = a^2ba^2b = a^2(a^3b)ab = a^5bab = (ab)^2 \Rightarrow o(a^2b) = 4$$

$$(a^3b)^2 = a^3ba^3b = a^3(a^3b)a^2b = a^2ba^2b \Rightarrow o(a^3b) = 4$$

$$Cyc(Q_8) = \left\{ y \in Q_8 \middle| \langle x, y \rangle \text{ دوری است } G \text{ از } x \text{ به ازای هر} \right\} = \{e, a^2\}$$

$$Z(Q_8) = \{e, a^2\}$$

زیرگروه های Q_8 عبارتند از:

$H_0 = \{e\}$

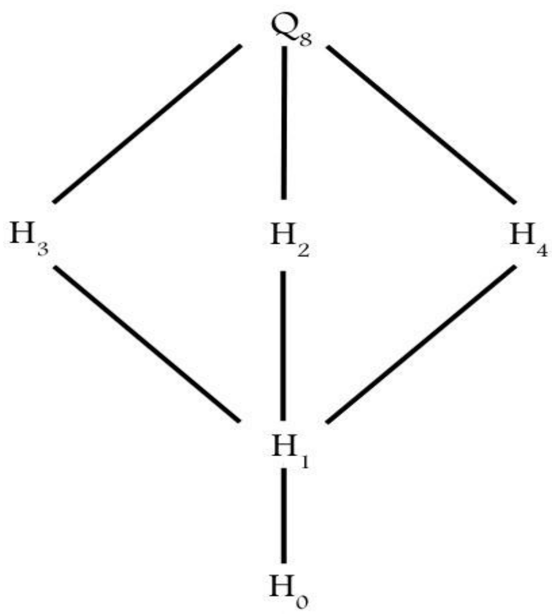
$H_1 = \{e, a^2\}$

$H_2 = \{e, a, a^2, a^3\}$

$H_3 = \{e, a^2, ab, a^3b\}$

$H_4 = \{e, a^2, b, a^2b\}$

$H_5 = Q_8$



گروه دووجهی D_8 دارای نمایشی به صورت زیر است.

$$D_8 = \langle a, b | a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

$$o(a) = 4\ , o(a^2) = 2\ , o(a^3) = 4\ , o(b) = 2$$

$$(ab)^2 = abab = aa^3bb = b^2 \Rightarrow\ o(ab) = 2$$

$$(a^2b)^2 = a^2ba^2b = a^2(a^3b)ab = a^5bab = (ab)^2 \Rightarrow\ o(a^2b) = 2$$

$$(a^3b)^2 = a^3ba^3b = a^3(a^3b)a^2b = a^2ba^2b\ \Rightarrow\ o(a^3b) = 2$$

$$Cyc(D_8) = \{e, a^2\}, \qquad Z(D_8) = \{e, a^2\}.$$

زیرگروه های D_8 عبارتند از:

$H_0 = \{e\}$, $\qquad T_1 = \{e, a, a^2, a^3\}$,

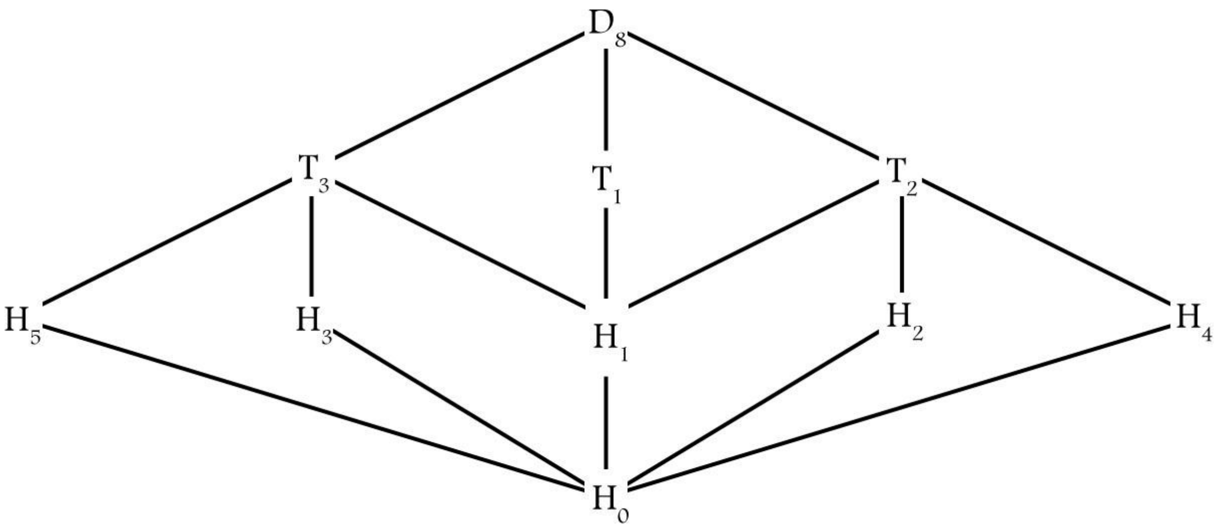
$H_1 = \{e, a^2\}$, $\qquad T_2 = \{e, a^2, b, a^2b\}$,

$H_2 = \{e, b\}$, $\qquad T_3 = \{e, a^2, ab, a^3b\}$.

$H_3 = \{e, ab\}$,

$H_4 = \{e, a^2b\}$,

$H_5 = \{e, a^3b\}$,



همان طور که ملاحظه می شود. Q_8 و D_8 دو گروه از مرتبه ۸ می باشند که با یکدیگر یک ریخت نیستند.

قابل ذکر است که گروه دووجهی، گروهی غیر موضعاً دوری است که با این گروه در فصل بعد آشنا می شویم.

۱-۱-۲۲تعریف: یک جایگشت روی مجموعه ی ناتهی X، یک تابع دوسوئی از X به X می باشد.

مجموعه تمام جایگشت های روی یک مجموعه n-عضوی $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ را با S_n نمایش می‌دهیم و آن را گروه جایگشتی از مرتبه n یا گروه متقارن از مرتبه n می نامیم.

۱-۱-۲۳ تذکر:

(الف) برای هر $n \geq 3$، گروه S_n غیرآبلی است و $Z(S_n) = \{e\}$.

(ب) فرض کنید $n \geq 2$ و $\alpha \in S_n$ یک دور باشد، در این صورت α دوری به طول r است اگر و تنها اگر $o(\alpha) = r$.

(پ) اگر α دوری به طول m در S_n باشد، آن گاه $\left|C_{S_n}(\alpha)\right| = m(n-m)!$.

۱-۱-۲۴ مثال: $S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

$$\begin{cases} C_{S_3}(1\ 2\ 3) = \{e, (1\ 2\ 3)\} \\ C_{S_3}(1\ 3\ 2) = \{e, (1\ 3\ 2)\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{S_3}(1\ 2) = \{e, (1\ 2)\} \\ C_{S_3}(1\ 3) = \{e, (1\ 3)\} \\ C_{S_3}(2\ 3) = \{e, (2\ 3)\} \end{cases}$$

$$Z(S_3) = \bigcap_{\alpha \in S_3} C_{S_3}(\alpha) = \{e\}.$$

۱-۱-۲۵ تعریف: فرض کنید G یک گروه باشد، یک سری زیرنرمال G، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های G مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G.$$

به طوری که به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $G_{i-1} \lhd G_i$. در این صورت، گاهی سری زیرنرمال فوق را به صورت زیر نشان می دهند:

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_r = G.$$

۱-۱-۲۶ تعریف: فرض کنید G یک گروه باشد، یک سری نرمال G، زنجیری است متناهی از زیرگروه های نرمال G مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G.$$

در هر دو تعریف فوق، هر G_{i} را یک جمله ی سری، و r را طول سری می نامند. واضح است که هر سری نرمال یک سری زیرنرمال است.

۱-۱-۲۷ تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد، سری نرمال

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$$

را یک سری مرکزی گوییم در صورتی که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ ،

$$\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z\left(\frac{G}{G_{i-1}}\right).$$

۱-۱-۲۸ تعریف: گروه G را یک گروه پوچ توان می نامند در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی G را رده پوچ توانی G گویند و آن را با $c(G)$ نشان می دهند.

۱-۱-۲۹ مثال ها:

(الف) هر گروه‌آبلی مانند G یک‌گروه پوچ‌توان از رده‌ی پوچ‌توانی یک است. زیرا $1 = G_0 \leq G_1 = G$ یک سری مرکزی است.

(ب) گروه دو وجهی D_8 یک گروه پوچ توان از رده ی پوچ توانی ۲ است.

زیرا سری $1 \leq \langle a^2 \rangle \leq G = D_8$ یک سری مرکزی برای G است. به علاوه چون G غیرآبلی است، رده ی پوچ توانی آن نایک است.در نتیجه $c(D_8) = 2$.

۱-۱-۳۰ قضیه: هر p-گروه متناهی پوچ توان است.

برهان: به استقرا نسبت به مرتبه ی گروه ثابت می کنیم. واضح است که هر گروه از مرتبه p، گروهی آبلی است لذا پوچ توان می باشد. حال فرض کنیم G یک p-گروه متناهی (غیربدیهی) باشد. اگر $G = Z(G)$، حکم واضح است. در غیر این صورت $G/Z(G)$ یک p-گروه متناهی (غیربدیهی) است که مرتبه ی آن از مرتبه ی G کوچکتر است، بنابراین دارای یک سری مرکزی مانند

$$1 = \frac{G_0}{Z(G)} \leq \frac{G_1}{Z(G)} \leq \cdots \leq \frac{G_r}{Z(G)}$$

است. در این صورت سری

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$$

یک سری مرکزی برای G است.

۱-۱-۳۱ تعریف: گروه G به طور موضعی پوچ توان است، هرگاه هر زیرگروه متناهیاً تولید شده در G پوچ توان باشد.

۱-۱-۳۲ قضیه: [۳۷] فرض کنیم G یک گروه پوچ توان متناهی مولد باشد. در این صورت اگر مرتبه ی هر مولد G متناهی باشد آن گاه G متناهی است.

۱-۱-۳۳ تعریف: فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد و $a \in G$. مجموعه ی $aH = \{ah | h \in H\}$ و $Ha = \{ha | h \in H\}$، به ترتیب هم رده های چپ و راست H در G نامیده

می شوند. عنصر a را نماینده ی aH و Ha می نامند.

۱-۱-۳۴ تعریف: عنصر g از گروه آبلی G، بخش پذیر در G نامیده می شود هرگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت m و $g_1 \in G$، $g = mg_1$. به همین ترتیب گروه آبلی G بخش پذیر[1] است اگر هر عنصر آن بخش پذیر باشد.

۱-۱-۳۵ قضیه: [۲۹] فرض کنید D زیرگروهی بخش پذیر در گروه آبلی G باشد، در این صورت $G = D \bigoplus E$ که در آن E یک زیرگروه دلخواه از G است.

اینک گروه های خطی خاص را تعریف می کنیم.

فرض می کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان و n عددی طبیعی باشد. مجموعه ی همه ماتریس های معکوس پذیر $n \times n$ را که درایه های هر یک از آن ها در $\mathbb{F}$ قرار دارند را با $Gl(n, \mathbb{F})$ نشان می دهیم. هر عضو $Gl(n, \mathbb{F})$ را معمولاً به صورت $A = (a_{ij})$ می نویسیم که در آن a_{ij} درایه واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس A است. معلوم است که دترمینان هر عضو $Gl(n, \mathbb{F})$ ناصفر است. به آسانی ملاحظه می شود که $Gl(n, \mathbb{F})$ با عمل ضرب ماتریس ها تشکیل یک گروه می دهد.

۱-۱-۳۶ تعریف: گروه $Gl(n, \mathbb{F})$ را گروه خطی عام (از درجه n بر $\mathbb{F}$) می نامند.

مجموعه ی همه اعضایی از $Gl(n, \mathbb{F})$ که دترمینان هر یک از آن ها برابر ۱ (عضو واحد میدان $\mathbb{F}$) است،

۱- Divisible

زیرگروهی از $Gl(n,\mathbb{F})$ است. این زیرگروه را با $Sl(n,\mathbb{F})$ نشان می دهند.

۱-۱-۳۷ تعریف: گروه $Sl(n,\mathbb{F})$ را گروه خطی خاص (از درجه ی n بر $\mathbb{F}$) می نامند.

۱-۱-۳۸ قرارداد: فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان باشد و $|\mathbb{F}| = q$ (می دانیم که q به صورت توان مثبتی از یک عدد اول است). در این صورت گروه های $Gl(n,\mathbb{F})$ و $Sl(n,\mathbb{F})$ را به ترتیب با علامات $Gl(n,q)$ و $Sl(n,q)$ نشان خواهیم داد. به عنوان مثال $Sl(2,3)$ یعنی گروه همه ی ماتریس های 2×2 که درایه‌ی آن ها در میدان C_3 است و دترمینان هریک از آن ها برابر ۱ است.

۱-۱-۳۹ تعریف: فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان دلخواه باشد.

(الف) گروه $Sl(n,\mathbb{F})/ZSl(n,\mathbb{F})$ را گروه خطی خاص تصویری (از درجه n بر $\mathbb{F}$) می نامند و آن را با $PSl(n,\mathbb{F})$ نشان می دهند.

(ب) گروه $Gl(n,\mathbb{F})/ZGl(n,\mathbb{F})$ را گروه خطی عام تصویری (از درجه n بر $\mathbb{F}$) می نامند و آن را با $PGl(n,\mathbb{F})$ نشان می دهند.

۱-۱-۴۰ قضیه: [۳۷] فرض کنیم n یک عدد طبیعی مفروض، و q توان مثبتی از یک عدد اول باشد. در این صورت،

(الف) $|Gl(n,q)| = (q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{n-1})$