دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

عنوان :

حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از روش هم محلی سینک بر اساس تبدیل نمایی دوگانه

استاد راهنما :

دکتر محمد ضاربنیا

استاد مشاور :

دکتر داود خجسته سالکویه

پژوهشگر :

امیر صادقی مرشت

مهر ۱۳۸۷

بسم الله الرحمن الرحيم

قدردانی

**جهان عشق است و دیگر زرق سازی		همه بازی است الّاعشق بازی**

خدای بزرگ را سپاس می گزاریم که توفیق تدوین پایان نامه‌ی مقطع کارشناسی ارشد با عنوان «حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از روش هم محلی سینک براساس تبدیل نمایی دوگانه» را ارزانی‌مان داشت و به پشتوانه‌ی ره توشه‌های تلّمذ در محضر اساتید محترم به سامانی معهود رسانید.

به مصداق سخن شیخ بزرگوار شیراز که « همه کس را عقل خود به کمال نماید و فرزند خود به جمال » باب تعریف و تعارف را همچنان فراز می‌داریم و بر مثال آنکه « مشک آن است که خود ببوید نه آنکه عطار بگوید » قضاوت واپسین در مورد این پایان نامه را به « محک تجربه » احاله می‌نماییم. تا انشأالله در پیشگاه اصحاب علم و عمل سمت قبول یابد و از بوته‌ی امتحان و آزمایش « سپید روی » به در آید.

در پایان مقال، کفران نعمت خواهد بود اگر قدردان مراتب فضل و بزرگواری‌های استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر محمد ضاربنیا که جای جای پیشنهادات و نظرات علمی ایشان در این پایان نامه را در پی افکندن قاعده و قائمه‌ی کار یاریگری تام بوده است. در ضمن از استاد مشاورم جناب آقای دکتر داود خجسته سالکویه تشکرات قلبی خویش را به مصداق من لم یشکر الخلق لم یشکر الخالق ابلاغ می‌نمایم. دراین میان بر خود وظیفه می‌دانم از دوستان گرامی‌ام که مرا در تهیه‌ی این پایان نامه یاری کردند تشکر نمایم.

امیر صادقی مرشت

مهر ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادر مهربان و دلسوزم

که همیشه حامی من و معلم درس زندگی‌ام بوده‌اند

چکیده

در این پایان‌نامه، جواب عددی معادلات انتگرال خطی را با استفاده از روش هم محلی سینک براساس تبدیل نمایی دوگانه (تبدیل DE[1]) بررسی می‌کنیم. ابتدا این روش را برای معادله‌ی انتگرال ولترای نوع دوم و سپس برای معادله‌ی انتگرال ولترای نوع اول بکار می‌بریم. این روش همچنین برای معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع دوم بکار رفته است. برای معادلات ولترا، یک فرمول انتگرال‌گیری نامعین عددی با شرکت دادن تبدیل DE در بسط سینک بوسیله‌ی محمد[2] و موری[3] توسعه داده شده است . در صورتی که برای معادله‌ی فردهلم، تبدیل متداول نمایی دوگانه را برای انتگرال معین بکار می‌بریم. خطای روش، مورد بررسی قرار گرفته است و در هر حالت نسبت همگرایی از مرتبه‌ی $O(\exp(-cN/\log N))$ برای خطا برقرار است که پارامتر N نشان دهنده‌ی تعداد جملات بسط سینک است. سرانجام، مثال‌های عددی، نسبت آورده شده در بالا را نشان می‌دهندو هم‌چنین راندمان بالای روش را تائید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی : تبدیل نمایی دوگانه، تبدیل DE، روش سینک

---

[1] *Double exponential*

[2] *Muhammad*

[3] *Mori*

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه و تاریخچه

۱.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

در روند حل دسته‌ای از معادلات با مشتقات جزئی و معادلات دیفرانسیل معمولی به معادلاتی می‌رسیم که در آنها مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. ریموند[۱] اولین کسی بود که نام معادله‌ی انتگرال را بر روی این گونه معادلات نهاد اما در عمل لاپلاس[۲] اولین کسی بود که برای حل معادلات دیفرانسیل در سال ۱۷۸۲ معادله‌ی انتگرال

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} g(t)dt, \qquad (۱.۱.۱)$$

را مطرح نمود. به دنبال آن فوریه[۳] برای حل مسائل حرارت، تبدیلات سینوس کسینوسی فوریه را و آبل [۴] در مسائل مکانیکی معادله انتگرالی آبل را ارائه دادند. افراد دیگری که درمسیر تکامل معادلات انتگرال مؤثر بودند، عبارتند از:

—پواسون [۵] در تئوری مغناطیس (سال ۱۸۲۶)،

—لیوویل [۶] در حل برخی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال (۱۸۳۲)،

—نیومن [۷] مسأله دیریخله (تعین سطح ψ روی مرز سطح S که در معادله‌ی لاپلاس $\Delta\psi^2 = 0$ صدق کند) را تبدیل به یک معادله انتگرال نمود(۱۸۷۰).

قبل از ادامه کار معادلات آبل و لیوویل را معرفی می‌کنیم:

معادله‌ی آبل :

$$f(x) = \int_{a}^{x} k(x,y)g(y)dy, \qquad (۲.۱.۱)$$

[۱] *Bois Reymond*

[۲] *Pierre − Simon Laplace*

[۳] *Fourier*

[۴] *Niels Henrik Abel*

[۵] *Simeon Denis Poisson*

[۶] *Joseph Liouville*

[۷] *Neouman*

معادله‌ی لیوویل:

$$f(x) = g(x) + \int_a^x k(x,y)f(y)dy, \qquad (۳.۱.۱)$$

در سال ۱۸۹۶ پوانکاره[۸]، معادله‌ی انتگرالی

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy, \qquad (۴.۱.۱)$$

را در رابطه با معادله‌ی دیفرانسیلی جزئی

$$\nabla^2 g + \lambda g = f(x,y), \qquad (۵.۱.۱)$$

بدست آورد.

ولترا[۹] در سال ۱۸۹۶ برای اولین بار نظریه‌ی عمومی معادلات انتگرال را ارائه نمود. در حدود سالهای ۱۹۰۳—۱۹۰۰ ریاضی دانی سوئدی به نام فردهلم[۱۰] یک دسته بندی کلی از معادلات انتگرالی خطی به شکل

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^v k(x,y)g(y)dy, \qquad (۶.۱.۱)$$

انجام داد که شامل دسته بندی خاصی از معادلات ولترا نیز بودند.

در ادامه‌ی این فرایند، هیلبرت[۱۱] به تحقیق در مورد معادلات انتگرال پرداخت و در بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال بهره جست. یکی از کارهای مهم وی فرموله نمودن مسائل ODE[۱۲] و PDE[۱۳] با شرایط مرزی و اولیه به صورت یک معادله‌ی انتگرلی است. بدین ترتیب حرکتی نو در حل این گونه معادلات بوجود آمد. از آنجا که در حالت کلی قادر به حل بسیاری از معادلات انتگرالی که با آنها مواجه می‌شویم، نیستیم. لزوم روشهای تقریبی و عددی

[۸] *Jules Henri poincare*

[۹] *Vito Volterra*

[۱۰] *Erik Ivar Fredholm*

[۱۱] *Dowid Hilbert*

[۱۲] *Ordinary Differential Equation*

[۱۳] *Partial Differential Equation*

جهت حل معادلات انتگرال روشن می‌گردد و به خاطر مسائل کاربردی از قبیل معادلات منفرد در تئوری پتانسیل، فیزیک مکانیک، تئوری امواج و الکترونیک محتاج به نتایج عددی و شیوه‌های عددی در جهت نیل به جواب بودند و به خاطر آنکه در محاسبات عددی بر روی کامپیوترها مسائلی از قبیل گرد کردن و انباشته شدن خطا پیش می‌آمد، لازم بود همگرایی روشهای عددی مورد بحث قرار گیرد. زیرا بسیاری از روش‌ها در تئوری همگرا بودند ولی در عمل این طور نبودند. به همین دلیل روشهای عددی که سرعت همگرایی بالایی داشتند برای حل انواع معادلات ابداع گردیدند.

تذکر: در بحثهای نظری معادلات انتگرال همیشه می‌توان فاصله‌ی متناهی مانند $[a,b]$ را به $[۰,۱]$ تبدیل کنیم.

به عنوان مثال معادله‌ی انتگرال زیر را بررسی می‌کنیم

$$f(x)=\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)dy. \qquad (۷.۱.۱)$$

فرض کنید $\bar{y}=\frac{y-a}{b-a}$ و $\bar{x}=\frac{x-a}{b-a}$ در این صورت

$$۰\leq\bar{x},\bar{y}\leq ۱\leftrightarrow a\leq x,y\leq b. \qquad (۸.۱.۱)$$

از طرفی $d\bar{y}=\frac{۱}{b-a}dy$. بنابراین داریم

$$f(a+(b-a)\bar{x})=\lambda\int_۰^۱ K(a+(b-a)\bar{x},a+(b-a)\bar{y})\times f(a+(b-a)\bar{y})\times(b-a)d\bar{y} \qquad (۹.۱.۱)$$

حال با فرض

$$\begin{aligned} f_۰(t) &= f(a+(b-a)t), \qquad (۱۰.۱.۱)\\ K_۰(\bar{x},\bar{y}) &= K(a+(b-a)\bar{x},a+(b-a)\bar{y}),\\ \lambda_۰ &= \lambda(b-a) \end{aligned}$$

حال معادله‌ی (۹.۱.۱) بصورت زیر تبدیل می‌شود

$$f_۰(\bar{x})=\lambda_۰\int_۰^۱ K_۰(\bar{x},\bar{y})f_۰(\bar{y})d\bar{y}. \qquad (۱۱.۱.۱)$$

این معادله مشابه (۷.۱.۱) است اما بازه‌ی انتگرال‌گیری $[\circ, 1]$ است.

در حقیقت اگر فرض کنیم $x = (b-a)\bar{x} + a$ و $y = (b-a)\bar{y} + a$ آنگاه از $\bar{y} \in [\circ, 1]$ نتیجه می‌گیریم که $y \in [a, b]$ و همچنین از $\bar{x} \in [\circ, 1]$ می‌توان نتیجه گرفت $x \in [a, b]$. این عمل علاوه بر اینکه موجب بدون بعد شدن مسأله می شود بلکه موجب تسریع در حل دستگاه معادلاتی می‌گردد که متناظر با معادله‌ی انتگرال مورد نظر است. در حقیقت با مناسب اختیار کردن h می‌توانیم تعداد معادلات دستگاه و همچنین تعداد متغیرها را کمتر کنیم. لذا در مدت زمان کمتری می‌توانیم به جوابهای معادله دسترسی پیدا کنیم.

۲.۱ دسته بندی معادلات انتگرال

معادله‌ی انتگرال به معادله‌ای گفته می‌شود که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر شود. فرم کلی یک معادله‌ی انتگرالی به صورت زیر است

$$h(x)g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)g(y)dy, \qquad (۱۲.۲.۱)$$

که در آن $g(y)$ یک تابع مجهول و $f(x)$،$h(x)$ و $k(x, y)$ توابعی معلوم هستند. تابع دو متغیره‌ی $k(x, y)$ را هسته‌ی معادله‌ی انتگرال می‌نامیم و می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد و $\lambda \neq \circ$ حقیقی یا مختلط و b می‌تواند ثابت یا متغیر باشد. با توجه به تنوع مسائل مختلف در فیزیک و مهندسی ضرورت یک تقسیم بندی کلی حس می‌شود.

۱.۲.۱ معادلات انتگرال فردهلم

معادلات انتگرالی که در آنها دامنه‌ی انتگرال گیری ثابت است معادلات انتگرل فردهلم نامیده می‌شوند. معادلات انتگرال فردهلم خود به سه دسته تقسیم می‌شوند. معادله‌ی (۱۰.۲.۱) را در نظر بگیرید

الف) اگر $h(x) = 0$ آنگاه آن را معادله‌ی انتگرال نوع اول می‌گویند. در این صورت

$$f(x) = -\lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy \qquad (۱۳.۲.۱)$$

ب) اگر $h(x) = 1$ آنگاه آن را معادله‌ی انتگرال نوع دوم می‌گویند. در این صورت

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy \qquad (۱۴.۲.۱)$$

ج) اگر $h(x) = 1$ و $f(x) = 0$ آنگاه آن را معادله‌ی انتگرال نوع دوم همگن می‌گویند. در این صورت

$$g(x) = \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy \qquad (۱۵.۲.۱)$$

۲.۲.۱ معادلات انتگرال ولترا

اگر در رابطه‌ی (۱۰.۲.۱)، b متغیر باشد آن را معادله انتگرالی ولترا می‌نامیم. همانند معادله انتگرالی فردهلم معادلات انتگرال ولترا نیز به سه نوع تقسیم می‌شود.

الف) معادلات انتگرالی که در آنها تابع مجهول به غیر از زیر علامت انتگرال‌گیری در جای دیگر ظاهر نشده باشد، معادلات انتگرالی نوع اول گویند.

ب) معادلات انتگرالی که در آنها تابع مجهول خارج از زیر علامت انتگرال‌گیری در جای دیگر ظاهر شده باشد، معادلات انتگرالی نوع دوم گویند.

ج) معادلات انتگرالی که در آنها تابع مجهول خارج از زیر علامت انتگرال‌گیری در جای دیگر ظاهر شده باشد و تابع معلوم آن صفر باشد معادلات انتگرال نوع دوم همگن گویند.

حل معادلات انتگرال نوع اول در مقایسه با معادلات انتگرال نوع دوم مشکل‌تراست.

۳.۲.۱ تقسیم بندی دیگر معادلات انتگرال

هر یک از معادلات انتگرال نوع اول و دوم را به دو نوع می‌توان تقسیم کرد.

الف) معادلات انتگرال منفرد :

به معادلات انتگرالی گفته می‌شود که در آنها حدود انتگرال‌گیری نامحدود و یا هستهٔ بیکران باشد. مانند:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{x+y} f(y)dy, \qquad f(x) = \int_{\circ}^{x} \frac{g(y)}{(x-y)^{\alpha}}dy,$$

که در تئوری الاستیک کاربرد دارند.

ب) معادلات انتگرال نامنفرد :

به معادلات انتگرالی گفته می‌شود که هم هسته‌ی آنها کراندار است و هم حدود انتگرال‌گیری در آنها متناهی است. مانند:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_{\circ}^{۱} (x+y)f(y)dy. \qquad (۱۶.۲.۱)$$

۴.۲.۱ معادلات انتگرالی پیچشی

معادلات انتگرالی پیچشی، به فرم زیر

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)g(y)dy, \qquad -\infty < x < \infty \qquad (۱۷.۲.۱)$$

هستند که در آنها هسته‌ی معادله انتگرالی به صورت $k(x,y) = k(x-y)$ می‌باشد و با استفاده از تبدیلات لاپلاس و فوریه می‌توان آنها را حل کرد. این نوع معادلات کاربرد زیادی در ارتباطات و مسائل فیزیکی دارند و روابط زیر کمک زیادی در حل این معادلات می‌کنند

$$\begin{aligned} \int_{\circ}^{t} k(x-y)g(y)dy &= \int_{\circ}^{t} k(y)g(x-y)dy, \\ \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)g(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} k(y)g(x-y)dy. \end{aligned}$$

معادلات انتگرال نوع دوم پیچشی بد خیم می باشند.

۵.۲.۱ کاربرد معادلات انتگرال در علوم دیگر

معادلات انتگرال نقش مهمی را در آنالیز تابعی خطی و غیر خطی ایفا می‌کنند. هم چنین کاربرد وسیعی در بسیاری از مسائل علوم مهندسی، شیمی، فیزیک، مکانیک، الکترو مغناطیس و ... دارند [۲, ۷, ۸, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۲۲, ۲۴]. هم چنین معادلات دیفرانسیل با مقدار اولیه و مرزی را می‌توانیم به یک معادلهٔ انتگرال تبدیل کنیم. بنابراین می‌توانیم در حل معادلات دیفرانسیل از معادلات انتگرال کمک بگیریم. در زیر به بیان چند مثال از مدلهایی که منجر به معادلات انتگرال می‌شوند می‌پردازیم.

مسأله‌ی فنر را در نظر می‌گیریم. با توجه به کشش فنر و قوانین تعادل برای تغییر مکان‌های کوچک، مدل ریاضی فنر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$u(x) = \frac{1}{T}\int_{0}^{L} u(x,x')F(x')dx', \qquad (۱۸.۲.۱)$$

که $F(x')$ نیروی وارده در نقطه‌ی x' در واحد طول می‌باشد. معادله‌ی فوق با فرض معلوم بودن $u(x)$، نسبت به تابع نیرو یک معادله‌ی انتگرال نوع اول است. مدل ریاضی زیر که با استفاده از اصل بقای انرژی بدست آمده است، مدل مسأله‌ی مکانیکی آبل می‌باشد

$$T(y) = \frac{1}{(2g)^{1/2}}\int_{0}^{y} \frac{f(v)}{(y-v)^{1/2}}dv. \qquad (۱۹.۲.۱)$$

مدل فوق، تعیین شکل سیمی است که به صورت منحنی هموار خم شده و گلوله‌ای به جرم m روی سیم از حالت سکون به سمت مبدأ شروع به لغزیدن می‌کند. با در نظر گرفتن تابع معلوم $T(y)$ (مدت زمان فرود)، معادله‌ی فوق یک معادله‌ی انتگرال ولترای نوع اول با مجهول $f(v)$ می‌باشد.

مدل زیر

$$X(t) = \phi(t,o)X_0 + \int_{0}^{t}\phi(t,s)B(U(s))ds + \int_{0}^{t}\phi(t,s)F(X(s))ds \qquad (۲۰.۲.۱)$$

مدل مکانیکی یک راکتور شیمیایی می‌باشد. برای جزییات بیشتر به مرجع [۲۴] مراجعه شود.

حال مدل دیگری را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$u(x) - h(x) = \int_{\circ}^{1} k(x,t;\sigma) f(u(t)) dt. \qquad (۲۱.۲.۱)$$

معادله‌ی فوق یک مدل ریاضی از غشأ سلولی می باشد(σ یک پارامتر حقیقی است). در رابطه‌ی بالا داریم

$$f(u(t)) = (\sigma^{2} - 1)u(t) - u^{3}(t), \qquad (۲۲.۲.۱)$$

$$k(x,t;\sigma) = \begin{cases} \sinh \sigma t \cosh \sigma(1-x)/\sigma \cosh \sigma, & \circ < t \leq x, \\ \sinh \sigma x \cosh \sigma(1-t)/\sigma \cosh \sigma, & \circ < t \leq 1, \end{cases} \qquad (۲۳.۲.۱)$$

برای جزئیات بیشتر در مورد مدل بالا به مراجع [۲, ۸, ۲۲] می‌توان رجوع کرد.

آنچه را که نمی‌توان انکار کرد نقش کامپیوتر در حل عددی معادلات انتگرال می‌باشد. لذا صحبت از خطا و همگرایی اجتناب ناپذیر است.

بحث اصلی ما در مورد یکی از بهترین و جدیدترین روشها یعنی حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از روش هم محلی سینک می‌باشد.

فصل ۲

معرفی تابع سینک

۱.۲ مقدمه

دراین فصل تابع سینک و فرمولهای تقریب براساس تابع سینک را معرفی می‌کنیم که جایگاه ویژه‌ای در حل عددی مسائل فنی و مهندسی و ریاضی مانند معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال و... به خود اختصاص داده است. در بخش دوم به معرفی تابع سینک می پردازیم و در بخش سوم نگاشت‌هایی را می‌آوریم که نواحی D_d^i، $i = ۱, ۲, ۳, ۴$ را به ناحیه D_d تبدیل می کند. دربخش‌های چهارم وپنجم و ششم به ترتیب به معرفی فرمولهای درونیابی و کوادراتور سینک روی نواحی D_d، $(-\infty, \infty)$ و Γ پرداخته‌ایم و در آخر بخش ششم مثالهای مخصوص به این نواحی را آورده‌ایم. خطای فرمول‌های درونیابی و کوادراتور ارائه شده در این فصل با استفاده از روش سینک از مرتبه‌ی نمایی و به صورت کلی از مرتبه‌ی $O(e^{-cn^{۱/۲}})$ است. همه‌ی مطالب این فصل از مرجع [۳] تهیه شده است.

۲.۲ تابع سینک

روشهای عددی سینک بر اساس تابع پایه‌ای سینک می‌باشد. تابع سینک به صورت

$$Sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \qquad (۱.۲.۲)$$

تعریف می‌شود که این فرم تابع سینک بیشتر در فنی مهندسی کاربرد دارد. ولی ما برای اهدافمان از فرم تغییر یافته‌ی تابع سینک که به تابع سینک تبدیل یافته معروف است و به صورت زیر تعریف می‌شود استفاده می‌کنیم

$$S(k,h)(x) = \frac{\sin[\pi(x-kh)/h]}{\pi(x-kh)/h}. \qquad (۲.۲.۲)$$

در رابطه‌ی بالا تقریب سینک بر اساس تابع کاردینال می‌باشد که برای $f(x)$ کراندار به

ازای $x \in (-\infty, \infty)$، تابع کاردینال به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C(f,h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)S(k,h)(x). \qquad (۳.۲.۲)$$

تابع کاردینال نقش مهمی را برای روش سینک بازی می‌کند مانند چندجمله‌ای‌هایی که همان نقش را برای اکثر روشهای عددی کلاسیک بازی می‌کند. تاریخ تابع کاردینال به کارهای آقایان ویتاکر[۱] و پواسون[۲] بوهر [۳] برمی‌گردد. آقای مکنامی[۴] به درستی تابع زیبای $C(f,h)$ را «یک تابع اصیل شاهانه [۵] نامیدند که خصوصیات مجزای آن از سایر توابع را برادران بورژوار[۶] تشخیص دادند.» تحقیقات روی $C(f,h)$ بعد از ویتاکر[۷] به آهستگی پیش می‌رفت که بعد از مدتی در کاربرد مهندسی در مقاله‌های مهمی از هارتلی[۸] نیکویست[۹] و شانون [۱۰] ظاهر شد. آنها کاربرد $C(f,h)$ را در تئوری ارتباطات یا مخابرات نشان داده‌اند. در تحقیقات آنها تابع سینک به صورت

$$Sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \qquad (۴.۲.۲)$$

تعریف می‌شود. این تعریف از تابع سینک در رشته علوم مهندسی کاربرد زیادی دارد. ما تعریف متفاوتی از این تعریف که برای اهدافمان مناسب است استفاده می‌کنیم.

---

[۱] $E.T.Whettaker$

[۲] $DelaValleepoussin$

[۳] $Bohr$

[۴] $J.J.McNamee$

[۵] $Royalblood$

[۶] $bourgeoisbrethrn$

[۷] $J.M.Whittaker$

[۸] $Hartley$

[۹] $Nyquist$

[۱۰] $Shannon$