دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

عنوان پایان نامه :

حل مسایل استوکس و ناویر– استوکس به روش شبکه‌های عصبی

مؤلف :

مجتبی بایمانی

ارایه شده به عنوان بخشی از ملزومات جهت اخذ درجه
دکتری در رشته ریاضی کاربردی

استاد راهنما:
دکتر اصغر کرایه چیان

اساتید مشاور :
دکتر سهراب عفتی – دکتر حمید نیازمند

مهرماه ۱۳۸۹

قدردانی

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیات است و چون بر می آید مفرح ذات. پس در هر نفس دو نعمت است و بر هر نعمتی شکری واجب.

در ابتدا شایسته است از جناب آقای دکتر اصغر کرایه‌چیان، استاد راهنمای محترم که متحمل زحمات فراوانی در امر تدوین و راهبری این رساله شده اند و همچنین در طول دوره دکتری اینجانب، گام به گام و با حوصله فراوان اینجانب را یاری نموده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. به علاوه از استاد ارجمند جناب آقای دکتر سهراب عفتی که در تمامی دوران تحصیل از حمایت ها و راهنمایی های بی دریغ ایشان استفاده نموده، و مشاوره این رساله را متقبل شده‌اند، تشکر ویژه‌ای داشته باشم. همچنین از جناب آقای دکتر حمید نیازمند استاد گروه مکانیک سیالات دانشکده مهندسی نیز که زحمت مشاوره این رساله را عهده دار بوده‌اند، سپاسگزارم. همچنین لازم است مراتب تشکر و قدردانی خود را از آقایان، دکتر مهدی دهقان، دکتر مسعود امان، دکتر مرتضی گچ‌پزان و خانم دکتر فائزه توتونیان که داوری رساله حاضر را برعهده داشته‌اند، ابراز دارم. در انتها، سپاس فراوان از خانواده و همسر بزرگوارم که با صبر و تحمل فراوان بنده را از حمایتهای خویش بهره مند ساختند.

مجتبی بایمانی

مهرماه ۱۳۸۹

پیشگفتار

یکی از مسایل مهم در مکانیک سیالات، درک خواص ریاضی و به دست آوردن جواب آنها برای سیالات لزج می‌باشد. معادلات حاکم بر این جریانات، معادلات ناویر—استوکس می‌باشند که جز در موارد خاص جواب تحلیلی آن‌ها را نمی‌توان به دست آورد. بنابراین باید روش‌های عددی را برای آن‌ها به‌کار برد. ضمن آن‌که با وجود قدرت و سرعت کامپیوترها این عمل امکان‌پذیر است. روشهای عددی متفاوتی برای حل معادلات ناویر—استوکس وجود دارند. در یک دسته‌بندی می توان روشها را به دو دسته تقسیم کرد. دسته اول آن‌هایی هستند که با متغیرهای اولیه (سرعت و فشار) کار می‌کنند. دسته دوم آن‌هایی هستند که از متغیرهای ثانویه استفاده می‌کنند. یکی از مهمترین روش‌ها مبتنی بر متغیرهای ثانویه، روش توابع جریان — چرخش می‌باشد. این روش‌ها در یک مطلب اشتراک دارند که توابع جریان[۱] — چرخش[۲] را به عنوان متغیرهای وابسته به کار می‌برند. نامعلوم بودن میدان فشار در اغلب روش‌های عددی و چگونگی رفتار با این جمله در مجموع معادلات ناویر—استوکس، بخش عمده تفاوت روش‌های گوناگون را تشکیل می‌دهد. برای حل این مشکل، یکی از ساده‌ترین روش‌ها حذف جمله فشار و یافتن معادلاتی برای محاسبه سرعت می‌باشد. این امر به راحتی با مشتق‌گیری از معادلات و ترکیب آنها صورت می‌پذیرد. پس از تحلیل کامل سرعت، حل معادلات مربوط به محاسبه میدان فشار انجام می‌شود. از سویی دیگر یک دسته از روش‌ها با گسسته‌سازی، جواب را فقط در نقاط گره‌ای می‌دهند در حالی که دسته دیگر جواب را به صورت یک تابع ارایه می‌دهند. روش‌هایی نظیر تفاضلات متناهی[۳] و حجم‌های متناهی[۴] هم با متغیرهای اولیه و هم با متغیرهای ثانویه به کار برده می‌شوند ([۱۱]، [۳۴]، [۳۵]).

---

[۱] Stream

[۲] Vorticity

[۳] Finite Difference

[۴] Finite Volume

در روش عناصر متناهی [۵] معمولاً از متغیرهای اولیه استفاده می‌شود. در این روش نیز تقریبی از جواب را در نقاط گره‌ای به دست می‌آوریم. اگرچه در این روش جواب را روی عناصر مختلف به صورت تابع قطعه‌ای خطی یا درجه دوم در دست داریم امّا در عمل وقتی تعداد عناصر خیلی زیاد باشند، استفاده از این توابع برای به دست آوردن جواب در نقاطی غیر از نقاط گره‌ای کار دشواری است و اغلب از هندسه‌ی این توابع استفاده می‌شود.

تقریب گالرکین فنی است که برای به دست آوردن جواب مسأله‌ی استوکس (مسأله‌ی ناویر–استوکس صرف نظر از جمله غیر خطی)، مسأله را به یک سیستم معادلات خطی تبدیل می‌کند. اگر از عناصر متناهی آمیخته(دو فضای توابع مختلف) به عنوان توابع پایه‌ای استفاده شود ماتریس ضرایب این سیستم معادلات بلوکی و تُنک می‌باشد. اگرچه این روش دارای پشتوانه‌ای محکم از لحاظ تئوری ریاضی است، امّا در عمل وقتی با تعداد بالایی از عناصر کار می کنیم، معمولاً با مشکلاتی از قبیل بد وضع شدن ماتریس ضرایب رو به رو می‌شویم ([۲]، [۱۲] و [۳]).

روش‌هایی وجود دارند که جواب مسأله‌ی استوکس یا ناویر–استوکس را در حالت خاص به صورت یک تابع تحلیلی ارایه می‌دهند. زید [۶] و شاهر [۷] به کمک تبدیلات لاپلاس یک جواب تحلیلی برای معادلات ناویر– استوکس در یک لوله مدور ارایه کرده‌اند. نمایش‌های تفضیلی جواب‌ها به شکل سری‌های همگرا تولید می‌شوند([۳۹]). محمد[۸] و همکارانش نیز جواب‌های تحلیلی از معادلات ناویر–استوکس در فضای دو بعدی برای جریان‌های تراکم ناپذیر ارایه نموده‌اند([۲۱]). آن‌ها جواب‌ها را با استفاده از روش تبدیل هدوگراف – لژاندر[۹] به دست آورده‌اند. ژانگ[۱۰] و همکارانش روش سری فوریه را برای به دست آوردن جواب تحلیلی جریان‌های الکترواسمزی[۱۱] در میکرو کانال‌ها با پتانسیل‌های زتای ناهمگن به کار گرفته‌اند([۴۰]). آن‌ها جریان‌ها را به وسیله حل معادلات استوکس

---

[۵] Finite Element
[۶] Zaid
[۷] Shaher
[۸] Muhammad
[۹] Hodograph-Legendre
[۱۰] Zhang
[۱۱] Electroosmotic

با شرایط مرزی ناهمگن برای سرعت تحلیل کرده‌اند و نتایج تحلیلی به دست آمده را با شبیه‌سازی عددی از معادلات ناویر استوکس مقایسه نموده‌اند. همچنین هوریوچی[۱۲] یک جواب تحلیلی برای جریان سیال دو بعدی در یک میکرو کانال مستطیلی با تغییرات پله‌ای در پتانسیل زتای دیوار ارایه نموده است. تابع جریان از تقریب سیال لغزنده برای معادلات ناویر استوکس، با فرض میدان الکتریکی ثابت و درون دو لایه متقارن مشخص شده است. معادله دوهم‌ساز[۱۳] حاصل با استفاده از تبدیل لاپلاس می‌شود([۱۵]). در این رساله روش‌هایی را که بر مبنای شبکه‌های عصبی مصنوعی[۱۴] هستند برای حل مسایل استوکس و ناویر—استوکس ارایه می‌کنیم به طوری که تقریب جواب‌ها به صورت یک تابع تحلیلی هستند.

در فصل اول مقدمه‌ای از شبکه‌های عصبی و چگونگی تقریب تابع با استفاده از شبکه‌های عصبی را همراه با قضایای تقریب بیان می‌نماییم. در فصل دوم ابتدا روش گالرکین را برای به دست آوردن جواب مسأله‌ی استوکس بیان نموده، سپس روش دیگری که مبتنی بر برنامه‌ریزی درجه دوم می‌باشد برای حل آن مسأله ارایه می‌کنیم به طوری که جواب آن معادل جواب روش گالرکین است. در فصل سوم، ابتدا روش شبکه‌های عصبی را برای حل معادله پواسن ارایه می کنیم. سپس با تبدیل مسأله‌ی استوکس به سه مسأله‌ی پواسن، روش شبکه های عصبی را برای حل آن به کار می‌گیریم. سرانجام در فصل چهارم ابتدا روش توابع جریان—چرخش را برای به دست آوردن معادله‌ی جریان به کار می گیریم. سپس روش شبکه‌های عصبی را برای حل معادلات با مشتقات جزیی مرتبه چهار ارایه می دهیم. در ادامه جریان‌های الکترواسمزی را با شرایط مرزی متفاوت به دست می آوریم. در آخر هم بابه دست آوردن جریان پایدار در حفره مربعی با سرپوش متحرک در دو حالت شرایط مرزی پیوسته و ناپیوسته فصل را به پایان می‌رسانیم.

---

[۱۲] Horiuchi

[۱۳] Biharmonic

[۱۴] Artificial Neural Networks

فهرست مندرجات

۱ مقدمه‌ای بر شبکه‌های عصبی ۲

۱—۱ مقدمه ۳

۱—۲ تشابهات ۳

۱—۳ انتظارات ۳

۱—۴ کاربردهای شبکه‌های عصبی ۵

۱—۵ نورون‌های مصنوعی ۷

۱—۶ انواع توابع محرک ۹

۱—۷ ساختار شبکه‌های عصبی پیش‌خور چند لایه ۱۱

۱—۸ قضیه تقریب سراسری ۱۴

۱—۹ آرایش نورون‌ها ۱۵

۱—۱۰ حالات خاص ۱۵

۲ روش برنامه ریزی درجه دوم برای حل مسأله استوکس ۱۹

۲—۱ مروری بر مسأله استوکس ۲۰

۲—۱—۱ مقدمه ۲۰

۲—۱—۲ معادلات استوکس ۲۴

۲—۲ شکل تغییراتی مسأله استوکس ۲۵

۲—۳ شکل آمیخته گسسته ۲۷

۲—۴ روش برنامه ریزی درجه دوم برای حل مسأله استوکس ۲۹

۲—۵ حل مسایل برنامه ریزی غیرخطی محدب به روش شبکه‌های عصبی ۳۲

۲—۶ نتایج عددی ۳۴

۳ شبکه‌های عصبی مصنوعی برای حل معادلات استوکس ۳۷

۳—۱ مقدمه ۳۸

۳–۲ تشریح روش ۳۸

۳–۳ جواب معادلات با مشتقات جزیی ۴۰

۳–۴ تبدیل مسأله استوکس به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی ۴۲

۳–۵ حل معادلات استوکس به روش شبکه‌های عصبی ۴۴

۳–۶ نتایج عددی ۴۵

۴ شبکه عصبی مصنوعی برای حل معادلات ناویر–استوکس ۵۰

۴–۱ مقدمه ۵۱

۴–۲ مدل ریاضی مسأله ۵۱

۴–۳ تشریح روش شبکه‌های عصبی برای معادلات با مشتقات جزیی مرتبه چهار . . ۵۲

۴–۴ جریان الکترواسمزی در میکرو کانال‌های ناهمگن ۵۳

۴–۵ جواب تحلیلی با روش سری‌های فوریه برای معادلات الکترواسمزی ۵۵

۴–۶ جواب تحلیلی تقریبی با روش شبکه‌های عصبی برای معادلات الکترواسمزی . ۵۹

۴–۷ نتایج عددی ۶۰

قدردانی

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیات است و چون بر می آید مفرح ذات. پس در هر نفس دو نعمت است و بر هر نعمتی شکری واجب.

در ابتدا شایسته است از جناب آقای دکتر اصغر کرایه‌چیان، استاد راهنمای محترم که متحمل زحمات فراوانی در امر تدوین و راهبری این رساله شده اند و همچنین در طول دوره دکتری اینجانب، گام به گام و با حوصله فراوان اینجانب را یاری نموده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. به علاوه از استاد ارجمند جناب آقای دکتر سهراب عفتی که در تمامی دوران تحصیل از حمایت ها و راهنمایی های بی دریغ ایشان استفاده نموده، و مشاوره این رساله را متقبل شده‌اند، تشکر ویژه‌ای داشته باشم. همچنین از جناب آقای دکتر حمید نیازمند استاد گروه مکانیک سیالات دانشکده مهندسی نیز که زحمت مشاوره این رساله را عهده دار بوده‌اند، سپاسگزارم. همچنین لازم است مراتب تشکر و قدردانی خود را از آقایان، دکتر مهدی دهقان، دکتر مسعود امان، دکتر مرتضی گچ‌پزان و خانم دکتر فائزه توتونیان که داوری رساله حاضر را برعهده داشته‌اند، ابراز دارم. در انتها، سپاس فراوان از خانواده و همسر بزرگوارم که با صبر و تحمل فراوان بنده را از حمایتهای خویش بهره مند ساختند.

مجتبی بایمانی

مهرماه ۱۳۸۹

فصل ۱

مقدمه‌ای بر شبکه‌های عصبی

۱ — ۱ مقدمه

در سال‌های اخیر شاهد حرکتی مستمر، از تحقیقات صرفاً تئوری به تحقیقات کاربردی به خصوص در زمینه پردازش اطلاعات، برای مسایلی که برای آنها راه‌حلی موجود نیست و یا به راحتی قابل حل نیستند بوده‌ایم. با عنایت به این امر، علاقه فزاینده‌ای در توسعه تئوریک سیستم های دینامیکی هوشمند مدل آزاد — که مبتنی بر داده‌های تجربی هستند — ایجاد شده است. شبکه‌های عصبی مصنوعی[۱] جزو این دسته از سیستم‌های دینامیکی قرار دارند که با پردازش روی داده‌های تجربی دانش یا قانون نهفته در ورای داده‌ها را به ساختار شبکه منتقل می‌کند. به همین دلیل به این سیستم ها هوشمند[۲] گویند، زیرا بر اساس محاسبات بر روی داده‌های عددی یا مثال‌ها، قوانین کلی را فرا می‌گیرند.

۱ — ۲ تشابهات

الف — بلوک‌های ساختاری در هر دو شبکه مصنوعی و بیولوژیکی، دستگاه‌های محاسباتی خیلی ساده‌ای هستند و علاوه بر این نورون‌های مصنوعی از سادگی بیشتری برخوردارند.

ب — ارتباط بین نورون‌ها عملکرد شبکه را تعیین می‌کنند. هدف شبکه‌های عصبی مصنوعی تعیین ارتباط‌های مناسب جهت حل مسایل می‌باشد. اگرچه نورون‌های بیولوژیکی از نورون‌های مصنوعی که توسط مدارهای الکتریکی ساخته می‌شوند، بسیار کندتر هستند (یک میلیون بار)، اما عملکرد مغز خیلی سریع‌تر از عملکرد یک کامپیوتر معمولی است. علت این پدیده بیش‌تر به خاطر ساختار کاملاً موازی نورون‌ها می‌باشد و این به آن معنی است که همه نورون‌ها معمولاً همزمان کار می‌کنند و پاسخ می‌دهند.

۱ — ۳ انتظارات

شبکه‌های عصبی مصنوعی با وجود این که با سیستم عصبی طبیعی قابل مقایسه نیستند ویژگی‌هایی دارند که آن‌ها را در بعضی کاربردها مانند تفکیک الگو، رباتیک، کنترل و به طور کلی در هر جا که نیاز

---

[۱] Artificial Neural Networks

[۲] Entelligent

به یادگیری یک نگاشت خطی و غیرخطی می‌باشد ممتاز می‌نمایند. این ویژگی‌ها به شرح زیرند:

۱. قابلیت یادگیری

قابلیت یادگیری یعنی توانایی تنظیم پارامترهای شبکه (وزن‌های سیناپسی[۳]) در طی زمان که محیط تغییر می‌کند و شبکه شرایط جدید را تجربه می‌کند. با این هدف که اگر شبکه برای یک وضعیت خاص آموزش دید و تغییر کوچکی در شرایط محیطی آن رخ داد، شبکه بتواند با آموزش مختصر برای شرایط جدید نیز کارآمد باشد.

۲. پردازش اطلاعات به صورت متن

آن‌چه شبکه فرا می‌گیرد (اطلاعات یا دانش) در وزن‌های سیناپسی مستتر است. رابطه یک به یک بین ورودی‌ها و وزن‌های سیناپسی وجود ندارد. می‌توان گفت که هر وزن سیناپسی مربوط به همه ورودی‌ها است ولی به هیچ یک از آن‌ها به طور مجزا مربوط نیست. به عبارت دیگر هر نورون در شبکه از کل فعالیت سایر نورون‌ها متأثر می‌شود. در نتیجه اطلاعات به صورت متن توسط شبکه‌های عصبی پردازش می شوند.

۳. قابلیت تعمیم

پس از آن‌که مثال‌های اولیه شبکه‌های آموزشی داده شد، شبکه می‌تواند در مقابل یک ورودی آموزش داده نشده قرار گیرد و یک خروجی مناسب ارایه دهد. این خروجی بر اساس مکانیسم تعمیم، که همانا چیزی جز فرایند درون‌یابی نیست، به دست می آید.

۴. پردازش موازی

هنگامی که شبکه عصبی در قالب سخت افزار پیاده می‌شود سلول‌هایی که در یک تراز قرار می‌گیرند می‌توانند به طور همزمان به ورودی‌های آن تراز پاسخ دهند. این ویژگی باعث افزایش سرعت پردازش می‌شود. زیرا زیرپردازی در پردازنده‌های کوچک‌تر مستقل از یکدیگر انجام می‌شوند.

۵. مقاوم بودن [۴]

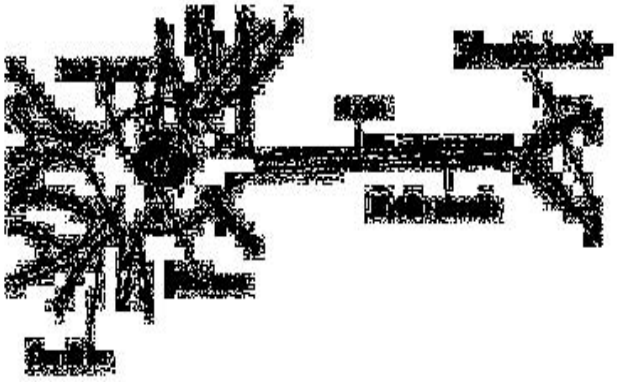
در یک شبکه عصبی هر سلول به طور مستقل عمل می‌کند و رفتار کلی شبکه، برآیند رفتارهای محلی

[۳] Synaptic Weights
[۴] Robustness

سلول‌های متعدد است. این ویژگی باعث می‌شود تا خطاهای محلی از چشم خروجی نهایی دور بمانند. به عبارتی دیگر، سلول‌ها در یک روند همکاری، خطاهای محلی یکدیگر را تصحیح می‌کنند. این خصوصیت باعث افزایش قابلیت مقاوم بودن (تحمل پذیری) در سیستم می‌گردد.

۶. شباهت بیولوژیکی [۵]

طراحی شبکه عصبی از شباهت با مغز الهام گرفته شده است (شکل ۱—۱). زیست شناسان عصبی[۶] به شبکه‌های عصبی مصنوعی به عنوان یک ابزار تحقیقاتی برای تفسیر پدیده‌های زیست محیطی نگاه می‌کنند.



شکل ۱—۱: شکل یک نورون طبیعی.

۱—۴ کاربردهای شبکه‌های عصبی

۱. طبقه‌بندی، شناسایی تشخیص الگو

انواع و اقسام شبکه‌های عصبی استاتیکی و دینامیکی برای طبقه‌بندی، خوشه‌بندی، شناسایی و تشخیص الگوها مورد استفاده قرار می‌گیرد. مثلاً برای شناسایی حروف لاتین، عربی، فارسی، چینی در

[۵] Neurobiological Analogy
[۶] Neurobiologist

سیستم‌های OCR [۷] شناسایی سبک نگارش شکسپیر و جداسازی و تمییز آن از دیگران توسط شبکه‌های عصبی می‌توان اشاره نمود.

۲. پردازش سیگنال

در این راستا می‌توان به کاربرد شبکه‌های عصبی در فیلترهای تطبیقی، پردازش صحبت و تصویر، بینایی ماشین و غیره اشاره نمود که از هر دو نوع شبکه‌های عصبی استاتیک و دینامیک به کرات استفاده شده است.

۳. پیش بینی سری‌های زمانی

از شبکه‌های عصبی برای پیش بینی سری‌های زمانی به ویژه جایی که شرایطی از قبیل ایستایی یا شرایط دیگری که راه را برای به کارگیری تکنیک‌های کلاسیک فراهم می‌سازد، برقرار نیست و سری‌های زمانی پیچیده بسیار استفاده شده است. مثلاً می‌توان به پیش بینی بار در سیستم‌های قدرت اشاره نمود.

۴. مدل‌سازی و کنترل

در سیستم‌های تطبیقی مخصوصاً در زمانی که فرآیند تحت بررسی بسیار پیچیده است شبکه‌های عصبی راه حل‌های مناسبی ارایه می‌دهند. در این‌جا عموماً اول شناسایی و سپس طراحی کنترل کننده آن‌گونه که پاسخ سیستم رفتار خاصی را دنبال کند صورت می‌پذیرد. هر دو سیستم شناسایی کننده و کنترل کننده مبتنی بر شبکه‌های عصبی می‌باشند.

۵. بهینه سازی

چه در سیستم‌های کنترلی و چه در سیستم‌های مدیریت، تخصیص و تقسیم منابع و چه در سیستم‌های مالی بانک‌داری از شبکه‌های عصبی دینامیکی بازگشتی بسیار استفاده گردیده است.

٦. سیستم‌های خبره و فازی

از شبکه‌های عصبی جهت تنظیم بهتر و رفتار مناسب‌تر سیستم‌های خبره‌ای که برای مسایل مالی و مدیریتی زیاد مورد استفاده قرار گرفته‌اند، استفاده شده است.

۷. مسایل مالی، بیمه، امنیتی، بازار بورس و وسایل سرگرم کننده

---

[۷] Optical Charater Recognition

به طور مثال می‌توان از کاربرد شبکه‌های عصبی به عنوان مشاور در امور تخصیص سرمایه در مکان‌های مناسب، آنالیز امور مالی، پیش بینی قیمت سهام در بازار بورس، ارزیابی سیاست‌های مختلف امور بیمه‌ای و ایجاد انیمیشن برای وسایل سرگرم کننده نام برد.

۸. ساخت وسایل صنعتی، پزشکی و امور حمل و نقل

کنترل پردازشگرها، ساخت و پیاده‌سازی دستگاه‌های آنالیز و طراحی محصولات صنعتی خانگی، ماشین پیش بینی خطا و عیب‌یاب تحلیل کیفیت جوشکاری و بسیاری از مسایل دیگر، مثال‌هایی از کاربردهای شبکه‌های عصبی در این زمینه می‌باشند. نکته حایز اهمیت آن است که بسیاری از این نوع کاربردها در ایران (در دانشگاه‌های مختلف و مراکز صنعتی) انجام گرفته و در حال انجام است. آن چه که شبکه‌های عصبی را در آینده جذاب‌تر خواهد نمود، سرعت بالای کامپیوترها و الگوریتم‌های یادگیری سریع‌تر است که استفاده از شبکه‌های عصبی را در مسایل صنعتی با محاسبات زیاد یاری می‌کند.

بخش‌های ۱—۱ تا ۱—۴ بر گرفته از کتاب مبانی شبکه‌های عصبی نوشته‌ی دکتر محمد باقر منهاج می‌باشد.

۱—۵ نورون‌های مصنوعی

یک نورون یک پردازشگر اطلاعات است که اساس عملکرد شبکه‌های عصبی را تشکیل می‌دهد. شکل ۱—۲ مدل یک نورون را نشان می‌دهد که پایه‌ای برای طراحی شبکه‌های عصبی مصنوعی است. نورون‌های مصنوعی که برای ساخت شبکه‌های عصبی استفاده می‌کنیم شبیه به نورون‌های درون مغز هستند. یک نورون مصنوعی ورودی‌های مختلف امّا فقط یک خروجی دارد. در این‌جا چهار عنصر اساسی از مدل نورونی تعریف می‌کنیم:

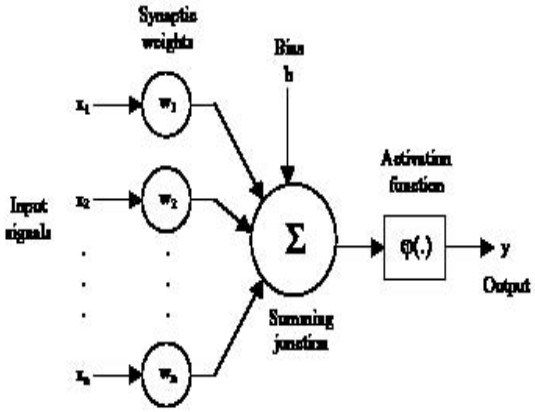
۱. پیوند اتصال دهنده‌ها یا سیناپسی که به وسیله وزن یا مقاومت خودشان توصیف می‌شوند. به ویژه، یک سیگنال x_j سیناپس ورودی j متصل به یک نورون در وزن سیناپسی w_j ضرب می‌شود.

۲. یک جمع کننده برای جمع کردن سیگنال‌های ورودی، به وسیله سیناپس مربوط به نورون وزن‌دار می‌شود.

۳. یک تابع محرک[۸] برای محدود کردن دامنه خروجی یک نورون مورد استفاده قرار می‌گیرد. به طور نمونه دامنه نرمال شده خروجی یک نورون به صورت بازه بسته $[۰, ۱]$ یا متقارن $[-۱, ۱]$ نوشته می‌شود.

۴. مدل یک نورون شامل یک بایاس خارجی b می باشد که اثر افزایش دهنده یا کاهنده روی ورودی تابع محرک دارد.

به زبان ریاضی می‌توانیم یک نورون را به وسیله رابطه زیر شرح دهیم.



شکل ۱—۲: مدل یک نورون مصنوعی.

$$y = \phi(\sum_{j=۱}^{n} w_j x_j + b)$$

که در آن $x_۱$ ،...، x_n سیگنال‌های ورودی، $w_۱$ ،...، w_n وزن‌های سیناپسی، ϕ تابع محرک، b بایاس و y سیگنال خروجی نورون می‌باشد.

شبکه‌های عصبی مصنوعی سیستم‌های ساخته شده از اتصالات داخلی واحدهای پردازشگر به نام نورون‌های مصنوعی می‌باشند. اصطلاحات، ساختار و مکانیزم پردازش این سیستم‌ها در اصل از سیستم‌های عصبی بیولوژیکی نتیجه شده است. حتی شرح مکانیزم پردازشگر این سیستم‌ها ساده‌تر از سیستم‌های بیولوژیکی می‌باشند. این سیستم‌ها در رشته‌های علمی متفاوتی کاربرد دارند. یکی از

[۸] Activation function

مهم‌ترین کاربرد آن‌ها تقریب توابع است.

۱–۶ انواع توابع محرک

تابع محرک به صورت $\phi : I\!R \to I\!R$ نمایش داده می شود و خروجی نورون را تعریف می‌کند. در این رساله هر تابع محرک که از آن صحبت می‌کنیم کراندار است و

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = a, \quad \lim_{x\to-\infty} \phi(x) = b, \quad (a \neq b)$$

سه نوع اساسی از توابع محرک به صورت زیر هستند:

۱. **تابع هوی ساید**[۹]

$$\phi(x) = \begin{cases} ۱ & x \geq ۰ \\ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

۲. **تابع قطعه‌ای خطی**[۱۰]

$$\phi(x) = \begin{cases} ۱ & x \geq \frac{۱}{۲} \\ x + \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \leq x \leq \frac{۱}{۲} \\ ۰ & x \leq -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۳. **تابع سیگموئید**[۱۱]

$$\phi(x) = \frac{۱}{۱ + e^{-x}}$$

تابع سیگموئید یکی از مهم‌ترین شکل‌های تابع محرک مورد استفاده در ساخت شبکه‌های عصبی مصنوعی می‌باشد. یکی از ویژگی‌های مهم تابع سیگموئید، مشتق پذیری آن است (در حالی که توابع پله‌ای مشتق پذیر نیستند). برد این توابع محرک بازه‌ی $[۰, ۱]$ می‌باشد. بعضی مواقع به تابع محرکی

[۹] Heaviside
[۱۰] Piecewise linear
[۱۱] Sigmoid function(logistic function)

که برد آن بازه‌ی $[-۱, ۱]$ باشد، نیاز داریم. تابع تانژانت هذلولوی به صورت زیر می کنیم:

$$\phi(x) = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

برد این تابع بازه‌ی $[-۱, ۱]$ می‌باشد و شرایط تابع محرک را نیز دارد. همچنین مانند تابع سیگموئید مشتق پذیر است.

۴. توابع محرک دیگر

اگر چه توابع فوق اغلب به عنوان تابع محرک استفاده می‌شوند، توابع دیگری هم می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. برای مثال، از آنالیز فوریه، ما می‌دانیم که هر تابع متناوب را می‌توان به صورت یک مجموع نامتناهی بر حسب سینوس و کوسینوس نوشت (سری فوریه):

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

این مجموع را می‌توانیم به صورت مجموع سینوسی زیر بنویسیم:

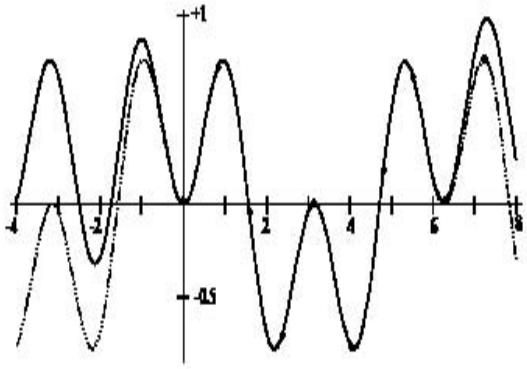
$$f(x) = a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} c_n \sin(nx + \theta_n),$$

به طوری که $c_n = \sqrt{a_n^۲ + b_n^۲}$ و $\theta_n = \arctan(\frac{b_n}{a_n})$. این می‌توانند به عنوان یک شبکه عصبی پیش خور [۱۲] با یک واحد ورودی x، یک واحد خروجی $f(x)$ و واحدهای مخفی با تابع محرک $\phi(x) = \sin(x)$ در نظر گرفته‌می‌شود. فاکتور $a_۰$ بایاس واحد خروجی، فاکتورهای c_n وزن‌های واحدهای مخفی به واحد خروجی، فاکتورهای θ_n بایاس‌های واحدهای مخفی، و فاکتور n وزن میان لایه ورودی و لایه مخفی می‌باشند.

تفاوت اساسی میان روش فوریه و روش شبکه‌های عصبی آن است که در روش سری فوریه وزن‌های میان واحدهای ورودی و مخفی (n) اعداد صحیح ثابت هستند در حالی که در شبکه‌های عصبی این وزن‌ها هر مقدار دلخواهی را می‌توانند اختیار کنند و با استفاده از فرایند یادگیری مشخص می‌شوند.برای تشریح استفاده از این گونه توابع یک شبکه عصبی پیش‌رو با یک واحد ورودی، چهار واحد مخفی، و یک خروجی با ده نقطه گره‌ای با تابع $f(x) = \sin(۲x)\sin(x)$ آزمایش شده است.

[۱۲] Feedforward

نتایج در شکل ۱—۳ رسم شده است (منحنی کمرنگ‌تر منحنی $f(x) = \sin(۲x)\sin(x)$ است و نقاط گره‌ای در شکل مشخص شده‌اند). همچنین این تابع با نقاط گره‌ای دیگری با هشت واحد مخفی، با تابع سیگموئید آزمایش شده است که نتایج آن در شکل ۱—۴ آورده شده است که در آن منحنی کمرنگ‌تر منحنی $f(x) = \sin(۲x)\sin(x)$است و نقاط گره‌ای در شکل مشخص هستند([۱۸]).



شکل ۱—۳: تقریب تابع $f(x) = \sin(۲x)\sin(x)$ با استفاده از تابع سینوس.

۱—۷ ساختار شبکه‌های عصبی پیش‌خور چند لایه

در شبکه‌های عصبی چند لایه، نورون‌ها به فرم طبقه دسته بندی می‌شوند. حداقل دو لایه داریم: لایه ورودی و لایه خروجی. لایه‌های بین این دو لایه (در صورت وجود) لایه‌های مخفی و گره‌های محاسبات متقابلاً نورون‌ها یا واحدهای مخفی نامیده می‌شوند. گره‌های مبدأ در لایه ورودی شبکه عناصر مربوط به الگوی محرک را تولید می‌کند (بردار ورودی). سیگنال‌های ورودی به کار برده شده، نورون‌ها را در لایه دوم (لایه مخفی اول) ترکیب می‌کنند. سیگنال‌های خروجی لایه دوم به عنوان ورودی‌های لایه سوم استفاده می‌شوند، و به همین صورت روند ادامه می‌یابد. یک لایه، محاسبات انجام شده روی گره‌ها را برای لایه دیگر ارسال می‌کند، امّا برعکس آن اتفاق نمی‌افتد. به عبارتی دیگر این شبکه اکیداً از نوع پیش‌خور و غیر قابل برگشت است. مجموعه سیگنال‌های خروجی شبکه، جواب