بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی‌ارشد

ریاضی محض

عنوان

خواص کوهن-مکالی ایده‌ال های تک جمله‌ای خالی از مربع

استاد راهنما

آقای دکتر مسعود طوسی

استاد مشاور

آقای دکتر چنگیز اصلاح‌چی

نگارش

عباس بهاءالدینی اردکانی

آذر ۱۳۸۶

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

دانشگاه شهید بهشتی

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

باز گشت به مجوز دفاع شمارهٔ **۲۰۰/۳۱۵۴/ت/د** مورخ **۸۶/۹/۲۱** جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه: **آقای عباس بهاءالدینی اردکانی** شماره شناسنامه:**۱۴۰۵۸** صادره از: **سپیدان** متولد: **۱۳۶۱** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد: **ریاضی محض**

با عنوان:

خواص کوهن-مککولی ایده‌آل‌های تک جمله‌ای خالی از مربع

به راهنمایی:

آقای دکتر مسعود طوسی

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۶/۹/۲۴** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره هیجده و هفتاد و پنج ۱۸/۷۵ و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱- **استاد راهنما:** آقای دکتر مسعود طوسی	دانشیار	شهید بهشتی	طوسی
۲-**مشاور:** آقای دکتر چنگیز اصلاح‌چی	استادیار	شهید بهشتی	
۳- **داور:** آقای دکتر علیرضا سالمکار	استادیار	شهید بهشتی	سالمکار
۴- **داور:** آقای دکتر حسین سبزرو	استادیار	پژوهشگاه دانشهای بنیادی	
۴- **مدیر گروه:** آقای دکتر علیرضا سالمکار	استادیار	شهید بهشتی	سالمکار

تقدیم به اولین آموزگارانم
پدر و مادر

پدر، آموزگار گذشت و فداکاری، اسطوره صبر و شکیبایی،

تقدیم به او که آسایش و راحتی را بر خود حرام کرد تا من آسوده خاطر باشم.

تقدیم به او که جوانی و زندگیش را همچون شمعی سوخت تا من از گرمی و روشنی آن بهره برم.

تقدیم به او که هر چه دارم از اوست. تقدیم به او که تا دنیا دنیاست نمی‌توانم ذره‌ای از آن همه فداکاری و محبت را جبران کنم.

مادرم، ای مهربان، ای همیشه باقی

محبت را در خنده‌هایت، صبر را در قطرات اشکت،

امید را در تلاش بی وقفه‌ات و عشق را در پرستشت برایم هدیه آوردی.

پس تقدیم به تو ای دنیای محبت و عشق، ای اسطوره انسانسیت، هر چند که شایسته زحمات بی دریغت نخواهد بود.

سپاسگزاری

در آغاز برخود واجب می‌دانم که از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر مسعود طوسی که تجربه‌های گرانبهای خود را که نتیجهٔ سالها مرارت و کوشش است با گشاده نظری در اختیار اینجانب قرار دادند و جناب آقای دکتر چنگیز اصلاح‌چی استاد مشاور اینجانب، که مرا همواره از راهنمایی‌های خود بهره‌مند ساختند، تشکر و قدردانی کنم. همچنین از کلیه دوستان و همکلاسی‌هایم که مرا در انجام این پایان‌نامه یاری دادند ، قدردانی می‌کنم. همچنین بر خود واجب می‌دانم که از زحمات کلیه اساتید و اعضای دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی تشکر کنم.

عباس بهاءالدینی اردکانی

آذر ماه یک هزار و سیصد و هشتاد و شش

چکیده

در این رساله مجتمع های سادکی را به عنوان گراف هایی از بُعد بالا مطالعه کرده و درباره ایده‌ال های وجه واره ای آنها نتایجی جبری، به دست می‌آوریم. ضمن تعمیم مفاهیمی از نظریه گراف به مجتمع های سادکی، کلاس بزرگی از ایده‌ال های تک جمله‌ای خالی از مربع با خارج قسمت های کوهن-مکالی و نیز محکی برای کوهن-مکالی بودن ایده‌ال های وجه واره ای درخت های سادکی ارائه می‌دهیم.

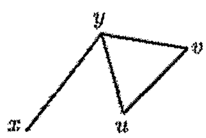
واژه‌های کلیدی: تک جمله‌ای های خالی از مربع، کوهن-مکالی، ایده‌ال های وجه واره‌ای ، درخت های سادکی

فهرست مطالب

مقدمه

یکی از شاخه های جدید جبر جابجایی، جبر جابجایی ترکیبیاتی است که اولین بار توسط استنلی [1] و هاکستر[2] در اواسط دهه ۷۰ به وجود آمده و در دهه اخیر توجه زیادی به آن شده است. با افزوده شدن اشیا و روش ها از شاخه هایی چون هندسه چند وجهی، فیزیک نظری، نظریه نمایش، برنامه نویسی عددی، نظریه گراف، جبر همولوژی، توپولوژی جبری و نظریه احتمال به آن، قدرت و جذابیت ویژه‌ای پیدا کرده است. از جمله اولین مراجع برای مطالعه این شاخه می‌توان کتاب های ترکیبیات و جبر جابجایی مرجع [S] و نسخه جدید آن، قسمت دوم کتاب حلقه‌های کوهن_مکالی [BH] و کتاب جدید جبر جابجایی ترکیبیاتی مرجع [MS] را نام برد.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با n رأس باشد. در [Vil] ایده‌ال یالی [3] وابسته به گراف G در حلقه چند جمله‌ای $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ با n متغیر روی میدان K تعریف شد. هر متغیر از این حلقه متناظر با یک رأس از گراف است. ایده‌ال تولید شده به وسیله تک جمله‌ای های xy، به طوری که رئوس x و y به وسیله یک یال به هم متصل هستند را ایده‌ال یالی می‌نامیم. برای مثال ایده‌ال $I = (xy, yu, yv, uv)$ متناظر با گراف زیر است.



ایده‌ال I از حلقه R را کوهن_مکالی گوییم هرگاه R/I حلقه کوهن_مکالی باشد. در [Vil] محکی که ایده‌ال یالی یک درخت، کوهن_مکالی شود، مورد بحث قرار می‌گیرد. در [SVV] بررسی این ایده‌ال های یالی خاص ادامه یافته و روی آنها مطالعه شده است. در [Fa] توسط فریدی مفهوم ایده‌ال یالی

[1] Stanley
[2] Hochster
[3] Edge ideal

به ایده‌ال وجه واره ای در مجتمع های سادکی تعمیم یافت و مفهوم درخت برای مجتمع های سادکی تعریف شد. همچنین نتایج [SVV] از کلاس ایده‌ال های یالی به ایده‌ال های تک جمله‌ای خالی از مربع تعمیم یافت. [برای دیدن مفاهیم مجتمع سادکی، ایده‌ال وجه‌واره‌ای، درخت و ایده‌ال های تک جمله‌ای خالی از مربع به ترتیب به ۱.۲.۱، ۴.۲.۱، ۵.۳.۱ و ۱.۱.۱ در رساله مراجعه کنید.]

در این رساله با مطالعه ساختار مجتمع های سادکی، محک کوهن-مکالی [Vil] برای گراف های درختی را به مجتمع های سادکی تعمیم می‌دهیم. ما شرطی روی مجتمع های سادکی معرفی می‌کنیم که ایده‌ال وجه‌واره ای آن کوهن-مکالی می‌شود و یک روش برای ساختن ایده‌ال کوهن-مکالی از ایده‌ال تک جمله‌ای خالی از مربع داده می‌شود.

در فصل اول رساله ما به تعریف ها و قضایای پایه‌ای در مورد مجتمع های سادکی می‌پردازیم. در ابتدا مفهوم یک مجتمع سادکی و سپس مفاهیم وابسته به آن را بیان می‌کنیم و در ادامه به قضایای وابسته به این مفاهیم می‌پردازیم.

در فصل دوم به تعریف و خواص حلقه‌های کوهن-مکالی پرداخته و بعضی از قضایای وابسته به حلقه‌های کوهن-مکالی که مورد نیاز ما در رساله است را بیان می‌کنیم.

در فصل سوم حلقه ها و مدول های مدرج را معرفی کرده، سپس خواصی که این حلقه و مدول ها دارند را بیان می‌کنیم و در ادامه برخی مفاهیم بیان شده در فصل های قبل را در حلقه و مدول های مدرج بررسی می‌کنیم.

در فصل چهارم که فصل نهایی رساله است، به ارتباط میان حلقه های کوهن-مکالی و مجتمع های سادکی می‌پردازیم. در ابتدا به ارتباط میان مجتمع های سادکی کوهن-مکالی و نامخلوط ها و سپس به ارتباط میان مجتمع های سادکی پیوند یافته و حلقه های کوهن-مکالی می‌پردازیم. [برای دیدن مفاهیم مجتمع سادکی کوهن-مکالی، نامخلوط و مجتمع سادکی پیوند یافته به ترتیب به ۱.۱.۴، ۹.۲.۱ و ۱.۷.۱ در رساله مراجعه کنید.]

مرجع اصلی ما در تدوین این رساله مرجع [Fa2] می‌باشد.

فصل ۱

مجتمع های سادکی

در این فصل تعریف ها و قضیه های پایه‌ای در مورد مجتمع های سادکی را بررسی می‌کنیم. ابتدا مفهوم یک مجتمع سادکی و سپس مفاهیم وابسته به آن را بیان کرده و در ادامه به قضیه های وابسته به این مفاهیم می‌پردازیم.

۱—۱ ایده‌ال های تک جمله‌ای

تعریف ۱.۱.۱ . فرض کنیم K یک میدان و $R = K[X_1, \dots, X_n]$ یک حلقه چند جمله‌ای بر روی میدان K باشد. یک تک جمله ای[1] در $K[X_1, \dots, X_n]$ به صورت

$$X^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

است که در آن $a = (a_1, \dots, a_n)$ از اعداد صحیح نامنفی اند. ایده‌ال $I \subseteq K[X]$ یک ایده‌ال تک جمله‌ای نامیده می‌شود اگر به وسیله تک جمله‌ای ها تولید شود. همچنین تک جمله ای X^a را خالی از مربع [2] می‌نامیم هرگاه همه مختصات از a، صفر یا یک باشد. اگر یک ایده‌ال به وسیله تک جمله‌ای

[1] monomial
[2] square free

های خالی از مربع تولید شده باشد آن را یک **ایده‌ال خالی از مربع** می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. هر نمایش یک ایده‌ال I از اشتراک ایده‌ال ها به صورت $I = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ را **نافزونه**[۳] گوییم هرگاه هیچ یک از ایده‌ال های Q_i را نتوان از نمایش حذف کرد.

قضیه ۳.۱.۱. فرض کنیم I یک ایده‌ال تک جمله ای از حلقه $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ باشد. در این صورت $I = \bigcap\limits_{i=1}^{m} Q_i$، به طوری که هر Q_i به شکل $(x_{i_1}^{a_1}, \ldots, x_{i_k}^{a_k})$ است. به علاوه نمایش نافزونه به این شکل از I یکتاست.

برهان. به [Vi, Th. 5.1.17] مراجعه کنید. $\square$

لم ۴.۱.۱. ایده‌ال $X^a = (x_{i_1}^{a_1}, \ldots, x_{i_k}^{a_k})$، $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$–اولیه است.

برهان. به [Vi, Pr. 5.1.16] مراجعه کنید. $\square$

لم ۵.۱.۱. ایده‌ال های اول مینیمال از یک ایده‌ال تک جمله ای به شکل $< x_{i_1}, \ldots, x_{i_r} >$ هستند.

برهان. با توجه به ۳.۱.۱ و ۴.۱.۱، ایده‌ال تک جمله‌ای I تجزیه اولیه مینیمال به شکل $I = \bigcap\limits_{i=1}^{m} Q_i$ دارد که $\sqrt{Q_i} =< x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} >$. می‌دانیم هر ایده‌ال اول مینیمال I متعلق به $\{\sqrt{Q_i} | 1 \leq i \leq m\}$ است. لذا حکم از این مطلب نتیجه می‌شود. $\square$

تعریف و تذکر ۶.۱.۱. مجموعه تمام تک جمله‌ای های $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ را با $\mathrm{Mon}(R)$ نشان می‌دهیم.

$\mathrm{Mon}(R)$ یک پایه برای فضای برداری R روی میدان K است. به عبارت دیگر، هر $f \in R$ را می‌توان به طور یکتا به صورت ترکیب خطی از عناصر $\mathrm{Mon}(R)$ با ضرایب در K نوشت. قرار دهید

$$f = \sum_{u \in \mathrm{Mon}(R)} a_u u \ \ (a_u \in K).$$

---

[۳] irredundant

در این صورت مجموعه

$$\{u \in \mathrm{Mon}(R) \mid a_u \neq 0\}$$

را با $\mathrm{Supp}(f)$ نشان می‌دهیم و آن را **محمل** f[۴] می‌نامیم.

قضیه ۷.۱.۱. فرض کنیم $\{u_1, \ldots, u_m\}$ تک جمله‌ای هایی باشند به طوری که مولد برای ایده‌ال تک جمله‌ای I هستند. فرض کنید v یک تک جمله‌ای باشد. در این صورت v متعلق به I است اگر و فقط اگر تک جمله‌ای w و i، $1 \leq i \leq m$، وجود داشته باشد به طوری که $v = wu_i$.

برهان. فرض کنیم $v \in I$. بنابراین چندجمله‌ای $f_i \in R = K[x_1, \ldots, x_n]$ وجود دارد به طوری که

$$v = \sum_{i=1}^{m} f_i u_i$$

در نتیجه با توجه به ۶.۱.۱ داریم $v \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{Supp}(f_i u_i)$. بنابراین $1 \leq i \leq m$ وجود دارد به طوری که $v \in \mathrm{Supp}(f_i u_i)$. لذا دوباره با توجه به ۶.۱.۱ $w \in \mathrm{Supp}(f_i)$ ی وجود دارد به طوری که $v = wu_i$.

حالت عکس واضح است. □

---

۴ support

۱ــ۲ مفاهیم پایه‌ای در یک مجتمع سادکی

تعریف ۱.۲.۱ . مجتمع سادکی[۵] $\triangle$ بر روی یک مجموعه از رأس های $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه های V است که در شرایط زیر صدق می کند.

الف) برای هر i، $\{v_i\} \in \triangle$.

ب) اگر $F \in \triangle$، آنگاه همه زیر مجموعه های F نیز در $\triangle$ هستند. (مجموعه تهی را نیز شامل می‌شود)

هر عنصر $\triangle$ یک وجه[۶] $\triangle$ نامیده می‌شود. **بُعد وجه** F از $\triangle$ برابر $|F| - 1$ تعریف می‌شود که منظور از $|F|$ تعداد رأس های F است.

وجه های با بُعد صفر را رأس و وجه های با بُعد یک را یال[۷] می گویند. قرار داد می کنیم بُعد مجموعه تهی برابر با -1 باشد.

هرگاه $\triangle$ تحت عمل شمول به طور جزئی مرتب شود هر وجه ماکسیمال را یک وجه واره [۸] $\triangle$ گویند. همچنین بُعد یک مجتمع سادکی $\triangle$ را برابر با ماکزیمم بُعد وجه واره های آن مجتمع سادکی در نظر می گیریم. در واقع

$$\dim \triangle = \max\{\dim(F) \mid F \in \triangle\}$$

اگر $F_1, \ldots, F_q$ تمام وجه واره های $\triangle$ باشند، آنگاه $\triangle$ را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\triangle = < F_1, \ldots, F_q >$$

و مجموعه $\{F_1, \ldots, F_q\}$ را **مجموعه وجه واره های** $\triangle$ می‌نامیم. یک مجتمع سادکی که تنها یک فاسیت داشته باشد را یک سادک[۹] می‌نامیم.

[۵] simplicial xomplex
[۶] face
[۷] edge
[۸] facet
[۹] simplex

تعریف ۲.۲.۱. اگر $\triangle$ یک مجتمع سادکی باشد، آنگاه یک زیر گردایه $\triangle$ یک مجتمع سادکی است که مجموعه وجه واره های آن زیر مجموعهٔ، مجموعه وجه واره های $\triangle$ است.

تعریف ۳.۲.۱. مجتمع سادکی $\triangle =< F_1, \ldots, F_q >$، **همبند**[10] نامیده می‌شود اگر برای هر جفت i,j به طوری که $1 \leq i < j \leq q$ دنباله‌ای از وجه واره های $F_{t_1}, \ldots, F_{t_r}$ از $\triangle$ موجود باشد به طوری که $F_{t_1} = F_i$ و $F_{t_r} = F_j$ و $F_{t_s} \cap F_{t_{s+1}} \neq \emptyset$ برای $s = 1, \ldots, r-1$.

تعریف معادل دیگر از مجتمع های سادکی همبند. $\triangle$ را **ناهمبند**[11] می‌گوییم اگر مجموعه رأس های V را بتوان به صورت $V = V_1 \cup V_2$ نوشت به طوری که V_1 و V_2 زیر مجموعه های غیر تهی از V باشند و هیچ وجه واره ای از $\triangle$ وجود نداشته باشد به طوری که در هر دو V_1 و V_2 دارای رأس باشد. در غیر این صورت $\triangle$ همبند نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم $\triangle$ یک مجتمع سادکی روی n رأس $v_1, \ldots, v_n$، K یک میدان و $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای های n–متغیره روی میدان K باشد.

(الف) $F(\triangle)$ را ایده‌الی از R تولید شده توسط تک جمله‌ای های خالی از مربع $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ تعریف می‌کنیم که در آن $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}\}$ یک وجه واره در $\triangle$ است. $F(\triangle)$ را **ایده‌ال وجه واره ای** متناظر با $\triangle$ می‌نامیم.

(ب) $N(\triangle)$ را ایده‌الی از R تولید شده توسط تک جمله‌ای های خالی از مربع $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ تعریف می‌کنیم که در آن $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}\}$ یک وجه برای $\triangle$ نباشد. $N(\triangle)$ را **ایده‌ال نا وجه** متناظر با $\triangle$ یا **ایده‌ال استنلی–رایزنر**[12] متناظر با $\triangle$ می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم $I =< M_1, \ldots, M_q >$ یک ایده‌ال در حلقه چند جمله‌ای $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ باشد به طوری که $M_1, \ldots, M_q$ تک جمله‌ای های خالی از مربع در R و

---
[10] connected
[11] disconnected
[12] Stanley-Reisner ideal

مجموعه مولد مینیمال برای I هستند.

الف) برای هر $1 \leq i \leq q$ قرار دهید

$$F_i = \{v_j \ : \ x_j \mid M_i \ , \ 1 \leq j \leq n\}$$

$\delta_F(I)$ را مجتمع سادکی روی مجموعه رأس های $v_1, \ldots, v_n$ با وجه واره های $F_1, \ldots, F_q$ تعریف می‌کنیم. و $\delta_F(I)$ را **مجتمع‌وجه واره ای** I گوییم.

ب) مجموعه‌ای از زیر مجموعه های $\{v_1, \ldots, v_n\}$ که در شرط زیر صدق می‌کند

$$\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\} \in \delta_N(I) \Longleftrightarrow x_{i_1} \ldots x_{i_n} \notin I$$

را با $\delta_N(I)$ نشان می‌دهیم، $\delta_N(I)$ یک مجتمع سادکی است. $\delta_N(I)$ را **مجتمع نا وجه** [۱۳] یا مجتمع استنلی-رایزنر متناظر با I می گوییم.

قضیه ۱.۲.۶. فرض کنید K یک میدان باشد. میان مجتمع های سادکی روی مجموعه رئوس $\{v_1, \ldots, v_n\}$ و ایده‌ال های تک جمله‌ای خالی از مربع از $K[x_1, \ldots, x_n]$ یک تناظر دوسویی برقرار می‌باشد.

برهان. کافی است نشان دهیم $\Delta = \delta_F(F(\Delta))$ و $I = F(\delta_F(I))$ و لذا حکم ثابت شده است. فرض کنیم $F = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$ یک وجه واره Δ باشد. در این صورت $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ یک مولد $F(\Delta)$ است و لذا $F = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$ یک وجه واره در $\delta_F(F(\Delta))$ است.

برعکس. فرض کنیم $F(\Delta) =< M_1, \ldots, M_q >$ و $F = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$ یک وجه واره در $\delta_F(F(\Delta))$ باشد. در این صورت طبق تعریف δ_F، $v_{i_r} \in F$ اگر و تنها اگر j، $1 \leq j \leq q$، موجود است که $x_{i_r} | M_j$. بنابراین $M_j = x_{i_1} \ldots x_{i_n}$. لذا طبق تعریف $F(\Delta)$، $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$ یک وجه واره از Δ است.

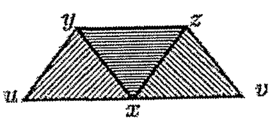
[۱۳] non-face complex

نشان دادیم F یک وجه واره $\triangle$ است اگر و تنها اگر F یک وجه واره $\delta_F(F(\triangle))$ باشد. پس $\delta_F(F(\triangle)) = \triangle$. حال قرار می‌دهیم $\triangle = \delta_F(I)$ و نشان می‌دهیم $I = F(\delta_F(I))$.

اگر $M_1 = x_{i_1}\dots x_{i_n}$ یک مولد I باشد، آنگاه $\{v_{i_1},\dots,v_{i_n}\}$ یک وجه واره $\delta_F(I)$ است. لذا $x_{i_1}\dots x_{i_n}$ یک مولد $F(\delta_F(I))$ است.

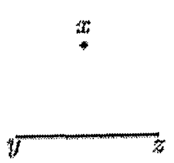
برعکس. فرض کنیم $M_1 = x_{i_1}\dots x_{i_n}$ یک مولد $F(\delta_F(I))$ باشد. پس $\{v_{i_1},\dots,v_{i_n}\}$ یک وجه واره $\delta_F(I)$ است و در نتیجه $x_{i_1}\dots x_{i_n}$ یک مولد I است. بنابراین ثابت شد که $I = F(\delta_F(I))$ و اثبات تمام است. □

مثال ۱.۲.۷. فرض کنیم $\triangle$، مجتمع سادکی زیر باشد

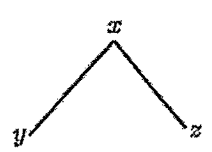


در اینجا $N(\triangle) = (yv, zu, uv)$ و $F(\triangle) = (xyu, xyz, xzv)$ ایده‌ال های در حلقه چند جمله‌ای $K[x,y,z,u,v]$ هستند.

مثال ۱.۲.۸. اگر $I = (xy, xz) \subseteq K[x,y,z]$، پس $\delta_N(I)$ یک مجتمع سادکی یک بُعدی و $\delta_F(I)$ یک گراف ساده است که در زیر نشان داده شده‌اند.



$\delta_N(I)$



$\delta_F(I)$

حال بعضی مفاهیم از نظریه گراف ها را به مجتمعهای سادکی تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱ . فرض کنیم $\triangle$ یک مجتمع سادکی با مجموعه رأس های V و وجه واره های $F_1,\dots,F_q$ باشد. یک **پوشش رأسی** [۱۴] برای $\triangle$، یک مجموعه A از V با این خاصیت است که به ازای هر وجه واره F_i، عضو $v \in A$ موجود باشد که $v \in F_i$.

یک پوشش رأسی **مینیمال** از $\triangle$، یک پوشش رأسی از $\triangle$ است که زیر مجموعه های سره از آن یک پوشش رأسی برای $\triangle$ نباشند. کوچکترین کاردینال از پوشش های رأسی مجتمع سادکی $\triangle$ را عدد پوشش رأسی [۱۵] می گویند و آن را با $\alpha(\triangle)$ نشان می‌دهند. توجه داریم که یک مجتمع سادکی ممکن است چندین پوشش رأسی مینیمال داشته باشد.

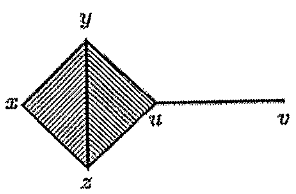
مجتمع سادکی $\triangle$، نامخلوط [۱۶] نامیده می‌شود اگر همه پوششهای رأسی مینیمال، کاردینال یکسان داشته باشند.

تعریف ۱۰.۲.۱ . فرض کنیم $\triangle$ یک مجتمع سادکی باشد. مجموعهٔ $\{F_1,\dots,F_u\}$ از وجه واره های $\triangle$ یک **مجموعه مستقل** نامیده می‌شود هرگاه برای هر i,j که $i \neq j$، داشته باشیم $F_i \cap F_j = \emptyset$.

ماکزیمم کاردینال ممکن یک مجموعه مستقل از وجه واره های $\triangle$ **عدد مستقل** [۱۷] $\triangle$ نامیده شده و با $\beta(\triangle)$ نشان داده می‌شود.

یک مجموعه مستقل از وجه واره ها که زیرمجموعه سره از هر مجموعه مستقل دیگر نباشد را **مجموعه مستقل ماکزیمال** از وجه واره ها می‌نامیم.

مثال ۱۱.۲.۱ . اگر $\triangle$ مجتمع سادکی زیر باشد،



vertex cover [۱۴]
vertex covering number [۱۵]
unmixed [۱۶]
independence number [۱۷]

پس $\beta(\triangle) = ۲$ و همچنین $\triangle$ با توجه به پوشش های رأسی مینیمال، نامخلوط است. زیرا همه پوشش های رأسی مینیمال دارای کاردینال مساوی و برابر با ۲ هستند. در زیر این پوشش های رأسی مینیمال بیان شده‌اند.

$$\{x,u\}\ ,\ \{y,u\}\ ,\ \{y,v\}\ ,\ \{z,u\}\ ,\ \{z,v\}$$

گراف $\delta_F(I)$ که در مثال ۸.۲.۱ بیان شده بود یک نامخلوط نیست زیرا $\{x\}$ و $\{y,z\}$ هر دو پوشش رأسی مینیمال برای $\delta_F(I)$ هستند که کاردینال های متفاوت دارند. پس $\alpha(\delta_F(I)) = ۱$ و همچنین $\beta(\delta_F(I)) = ۱$ زیرا فقط با یک وجه واره از مجتمع سادکی مورد نظر می‌توان مجموعه مستقل درست کرد. بحث مشابه در مجتمع سادکی مثال ۷.۲.۱ نشان می‌دهد که آن نیز نامخلوط نیست.

قضیه ۱۲.۲.۱. فرض کنیم $\triangle$ یک مجتمع سادکی روی n رأس $\{x_۱,\dots,x_n\}$ باشد و ایده‌ال $I = F(\triangle)$ در حلقه چند جمله‌ای $R = K[x_۱,\dots,x_n]$ روی میدان K در نظر می گیریم که توسط تک جمله‌ای ها تولید می‌شود. در این صورت $\mathfrak{p} =< x_{i_۱},\dots,x_{i_s} >$ ایده‌ال اول مینیمال I است اگر و فقط اگر $\{x_{i_۱},\dots,x_{i_s}\}$ یک پوشش رأسی مینیمال برای $\triangle$ باشد.

برهان. فرض کنیم $I =< M_۱,\dots,M_q >$ که برای هر $۱ \le i \le q$، M_i تک جمله‌ای خالی از مربع حاصل از وجه واره $\triangle$ و $\mathfrak{p}$ ایده‌ال اول مینیمال آن باشد. با توجه به قضیه ۳.۱.۵ از کتاب Villareal هر ایده‌ال اول مینیمال I توسط یک زیر مجموعه از $\{x_۱,\dots,x_n\}$ تولید می‌شود.

$\Longleftarrow$) فرض کنیم $\mathfrak{p} =< x_{i_۱},\dots,x_{i_s} >$ ایده‌ال اول مینیمال I باشد. چون $I \subseteq \mathfrak{p}$ و I خالی از مربع است پس به ازای هر M_i، x_{i_j} ای وجود دارد به طوری که $x_{i_j}|M_i$. پس با توجه به تعریف $F(\triangle)$، $\{x_{i_۱},\dots,x_{i_s}\}$ یک پوشش رأسی برای $\triangle$ است. ادعا می‌کنیم این پوشش رأسی، مینیمال است. فرض کنیم $A \subsetneq \{x_{i_۱},\dots,x_{i_s}\}$ پس j، $۱ \le j \le s$، وجود دارد به طوری که $x_{i_j} \notin A$. چون $\mathfrak{p}$ ایده‌ال اول مینیمال است و ایده‌ال اول

$$\mathfrak{q} =< x_{i_۱},\dots,x_{i_{j-۱}},x_{i_{j+۱}},\dots,x_{i_s} >$$

مشمول در $\mathfrak{p}$ است پس $I \nsubseteq \mathfrak{q}$. بنابراین M_r ای وجود دارد که $x_{i_j}|M_r$ اما $M_r \nmid x_{i_k}$ $(k \neq j)$. بنابراین A یک پوشش رأسی برای $\triangle$ نیست.

$(\Longleftarrow)$ فرض کنیم $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$ پوشش رأسی مینیمال برای $\triangle$ باشد و $\mathfrak{p} =< x_{i_1}, \ldots, x_{i_s} >$. ادعا می‌کنیم $\mathfrak{p}'$ ایده‌آل اول مینیمال I مشمول در $\mathfrak{p}$ است. به وضوح $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول است. با توجه به ایده‌آل اول مینیمال بودن $\mathfrak{p}'$ زیر مجموعه A از $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$ وجود دارد که $\mathfrak{p}' =< A >$. طبق قسمت اول اثبات A پوشش رأسی مینیمال $\triangle$ است. پس $A = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$. پس $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$. □

لم ۱۳.۲.۱. فرض کنید $\triangle =< F_1, \ldots, F_q >$ یک مجتمع سادکی روی n رأس $\{1, 2, \ldots, n\}$ باشد. در این صورت

$$N(\triangle) = \bigcap_{F \in \triangle} P^{[n] \setminus F}$$

که در آن $[n] = \{1, \ldots, n\}$ و $P^{[n] \setminus F} =< x_i : i \in [n] \setminus F >$.

برهان. فرض کنیم $u = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ یک تک جمله‌ای از $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ باشد و $F_u = \{i \in [n] : a_i \neq 0\}$. اگر $u \in N(\triangle)$ آنگاه نتیجه می‌شود $F_u \notin \triangle$. لذا هیچ وجه واره ای از $\triangle$ شامل F_u نیست. بنابراین برای هر وجه واره F در $\triangle$ داریم $F_u \cap ([n] \setminus F) \neq \emptyset$. از این نتیجه می‌شود که برای هر وجه واره F در $\triangle$ داریم $u \in P^{[n] \setminus F}$. بنابراین $u \in \bigcap_{F \in \triangle} P^{[n] \setminus F}$. از سوی دیگر اگر $u \notin N(\triangle)$، پس $F_u \in \triangle$. لذا وجه واره ای مانند F در $\triangle$ وجود دارد به طوری که $F_u \subseteq F$. پس $u \notin P^{[n] \setminus F}$ و در نتیجه $u \notin \bigcap_{F \in \triangle} P^{[n] \setminus F}$. □

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم $\triangle$ یک مجتمع سادکی با وجه واره های $F_1, \ldots, F_q$ و $F(\triangle) = (M_1, \ldots, M_q)$ ایده‌آل وجه واره ای در $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ باشد. مجتمع سادکی به دست آمده به وسیله **حذف فاسیت** F_i از $\triangle$، مجتمع سادکی زیر است.

$$\triangle \setminus < F_i > =< F_1, \ldots, \hat{F_i}, \ldots, F_q >$$

توجه داریم که $F(\triangle \setminus < F_i >) = (M_1, \ldots, \hat{M_i}, \ldots, M_q)$. همچنین مجموعهٔ رئوس $\triangle \setminus < F_i >$ زیر مجموعهٔ مجموعه رأس های $\triangle$ است.