دانشکده علوم پایه

مرکز تبریز

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

تعمیم روش آنالیز هموتوپی برای حل معادله لوتکا—ولترا

استاد راهنما

آقای دکتر حسین خیری

استاد مشاور

آقای دکتر محمد چایچی

پژوهشگر

رقیه محمد علیزاده بخشمندی

تیر ۱۳۹۰

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به:

مادرم که بهشت خدا با حقارت زیر پاهایش

جای گرفت،

پدرم که مسیر سربلندی را به شیواترین روش

به من آموخت

و

همسرم به خاطر تمام مهربانیهایش

نام خانوادگی دانشجو: محمد علیزاده بخشمندی نام: رقیه

عنوان: تعمیم روش آنالیز هموتوپی برای حل معادله لوتکا—ولترا

استاد راهنما : آقای دکتر حسین خیری

استاد مشاور: آقای دکتر محمد چایچی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: تیر ۱۳۹۰ تعداد صفحه: ۸۹

کلید واژه‌ها: معادله چند گونه ای لوتکا—ولترا، روش اختلال هموتوپی، روش آنالیز هموتوپی

چکیده

در این پایان‌نامه روش‌های اختلال هموتوپی و آنالیز هموتوپی برای حل معادله لوتکا—ولترا به کار برده می‌شوند. هر دو روش دقت قابل ملاحظه‌ای را برای تقریب جواب‌های دقیق فراهم می‌کنند. نتایج عددی نشان می‌دهد که این روش‌ها شیوه کارایی را برای حل معادله لوتکا—ولترا فراهم می‌کنند.

فهرست مطالب

مقدمه

در دهه‌های اخیر با توسعه سریع مسائل غیر خطی، علاقه فزاینده دانشمندان و مهندسین به تکنیک‌های تحلیلی برای حل مسائل خطی و غیر خطی آشکار شده است. در بسیاری از موارد تکنیک‌های اختلال به کار برده می‌شوند. اما همانند دیگرتکنیک‌های تحلیلی، روش‌های اختلال نیز دارای محدودیت‌هایی هستند. تقریباً همه روش‌های اختلال قدیمی بر اساس این که باید یک پارامتر کوچک در معادله وجود داشته باشد پایه‌گذاری شده‌اند. در حالی که اکثر مسائل غیر خطی این پارامتر کوچک را ندارند، همچنین تعیین پارامتر کوچک نیاز به تکنیک‌های ویژه و خاص دارد. یک انتخاب مناسب از پارامتر کوچک به نتیجه ایده‌آل منجر می‌شود و یک انتخاب نامناسب از پارامتر کوچک در بعضی موارد اثر بدی را در نتایج خواهد داشت، به علاوه جواب‌های تقریبی حل شده به وسیله روش‌های اختلال در بعضی موارد فقط برای مقادیر کوچک از پارامترها معتبر هستند. تمام این محدودیت‌های روش‌های اختلال ناشی از ایجاد یک پارامتر کوچک در مسأله است. روش‌های جدید زیادی مانند روش اختلال هموتوپی هی [1] و روش آنالیز هموتوپی لیاو[2] برای رفع این محدودیت مطرح شده‌اند.

در فصل اول پایان نامه به ارائه تعاریف و مفاهیم اولیه و قضایای مقدماتی پرداخته شده که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است. در فصل دوم روش اختلال هموتوپی هی معرفی شده و همگرایی این روش مورد بررسی قرار گرفته است و این روش در حل معادله لوتکا—ولترا چند گونه‌ای به کار گرفته شده است. در فصل سوم روش آنالیز هموتوپی لیاو معرفی شده و همگرایی این روش بررسی شده است. همچنین کاربرد این روش در حل معادله لوتکا—ولترا چند گونه‌ای مورد توجه قرار گرفته است. در فصل چهارم تأکید ما بر روی مقایسه روش‌هاست، که با جزئیات به آن پرداخته می‌شود. فصل پنجم شامل نتیجه‌گیری کلی و فصل ششم شامل برنامه‌های

[1] J.H. He

[2] Liao

کامپیوتری می‌باشد. مطالب این پایان نامه بر اساس مقالات [۱۴، ۱۳] گردآوری شده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز است، می‌پردازیم.

۱.۱ معادله دیفرانسیل

معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود.
منظور از جواب یک معادله دیفرانسیل، یافتن تابعی است که خود و مشتقات متوالی آن در معادله صدق می‌کنند.

۱.۱.۱ معادله دیفرانسیل معمولی

تعریف ۱.۱ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n ام به صورت:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

یا

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

می‌باشد.

نکته: در معادله دیفرانسیل معمولی تنها یک متغیر مستقل وجود دارد.

تعریف ۲.۱ مرتبه بالاترین مشتق موجود در یک معادله را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می‌نامند.

تعریف ۳.۱ معادله دیفرانسیل به شکل

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = Q(x),$$

را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n گویند.

تعریف ۴.۱ منظور از $C^m[a,b]$ مجموعه توابع تعریف شده روی $[a,b]$ هستند که تا مرتبه m ام مشتق‌پذیر بوده و پیوسته باشند.

تعریف ۵.۱ اگر علاوه بر معادله دیفرانسیل داده شده، مقدار y و مشتقات متوالی آن در نقطه $x = x_0$ معین باشد، آن را مسأله مقدار اولیه می‌گویند.

تعریف ۶.۱ اگر معادله مرتبه دوم در حالت خاص دارای شرایطی در دو نقطه جداگانه $x_0 = a$ و $x_0 = b$ باشد، آنگاه مسأله را مسأله مقدار مرزی می نامند.

به عنوان مثال مسأله زیر یک مسأله مقدار مرزی است:

$$y'' = f(x,y), \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

قضیه ۷.۱ (قضیه منحصر بفردی): فرض کنید تابع f در مسأله مقدار مرزی:

$$y'' = f(x,y,y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

بر مجموعه:

$$D = \{(x,y,y')|\ a \leq x \leq b,\ -\infty < y < \infty,\ -\infty < y' < \infty\}$$

پیوسته بوده و $\frac{df}{dy}$ و $\frac{df}{dy'}$ بر D پیوسته باشند. هرگاه داشته باشیم:

۱) به ازای هر $(x,y,y') \in D$، $\frac{df}{dy}(x,y,y') > 0$

۲) یک ثابت M وجود داشته باشد که به ازای هر$(x,y,y') \in D$ ،

$$|\frac{df}{dy}(x,y,y')| \leq M$$

آنگاه مسأله مقدار مرزی فوق جواب منحصر به فرد دارد.

برهان. رجوع کنید به [۱]. □

قضیه ۸.۱ (قضیه تیلور): اگر تابع f در همسایگی نقطه x_0 مشتق مرتبه $(n+1)$ ام متناهی داشته باشد، در این صورت مقدار f در هر نقطه x متعلق به این همسایگی، به صورت

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 f''(x_0) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) + R_n(x), \end{aligned}$$

به دست می آید، که در آن

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi),$$

و

$$f^{(k)}(x_0) = \frac{d^k f}{dx^k}|_{x=x_0},$$

و ξ نقطه‌ای بین x_0 و x است.

برهان. رجوع کنید به [۲]. □

تعریف ۹.۱ در قضیه تیلور همسایگی نقطه x_0 را با $I=(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$ نشان داده و فرض کنید بازاء $\forall x \in I$:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

دراینصورت:

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x_0) + \cdots$$

که سری توانی سمت راست، سری تیلور f در x_0 نامیده می‌شود.

نکته: سری تیلور در نقطه $x_0 = 0$، سری مک‌لورن نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و d تابعی به صورت $d : X \times X \longrightarrow R^+ \cup \{0\}$ باشد. زوج (X, d) را یک فضای متریک گویند هرگاه $\forall x, y, z \in X$ داشته باشیم

۱) $d(x, y) \geq 0 \quad \wedge \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$،

۲) $d(x, y) = d(y, x)$،

۳) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری باشد، تابع $\|\,.\,\| : X \longrightarrow R$ را یک نرم روی X گویند، هرگاه $\forall x, y, z \in X$ و $\forall \lambda \in R$ داشته باشیم

۱) $\| x\| \geq 0$ و $\| x\| = 0 \iff x = 0$،

۲) $\| \lambda x\| = |\lambda| \, \| x\|$،

۳) $\| x + y\| \leq \| x\| + \| y\|$.

نرم‌های اقلیدسی، بی‌نهایت و یک به ترتیب با نمادهای l_2، l_∞ و l_1 نشان داده می‌شوند و برای بردار $x = (x_1, \cdots, x_n)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

۱) $\| x \|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{2}}$، ۲) $1 \leq i \leq n \quad \parallel x \parallel_\infty = Max|x_i|,$ ،

۳) $\parallel x \parallel_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

نکته: فضای خطی X را به همراه نرم تعریف شده روی آن، فضای نرم‌دار می‌گویند.

تعریف ۱۲.۱ دنباله $\{x_n\}$ از عناصر فضای نرم‌دار X را همگرا در X گویند، اگر $\alpha \in X$ وجود داشته باشد، بطوریکه:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel x_n - \alpha \parallel = 0,$$

و این مستلزم آن است که:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad (\; n \geq N \quad \longrightarrow \quad \parallel x_n - \alpha \parallel < \epsilon \;).$$

تعریف ۱۳.۱ دنباله $\{x_n\}$ از عناصر فضای نرم‌دار X را دنباله کوشی گویند هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall k \quad (\; n \geq N \quad \longrightarrow \quad \parallel x_{n+k} - x_n \parallel < \epsilon \;).$$

نکته: یک دنباله همگرا در فضای متریک، دنباله‌ای کوشی است.

تعریف ۱۴.۱ فضای کامل یا تام، فضایی است که هر دنباله کوشی در آن، همگرا باشد.

تعریف ۱۵.۱ هر فضای باناخ یک فضای خطی نرم دار است که با متر تعریف شده بوسیله نرمش یک فضای تام می‌باشد.

تعریف ۱۶.۱ اگر T یک عملگر از فضای خطی X به روی خودش باشد، آنگاه $x \in X$ را نقطه ثابت T گویند، هرگاه $Tx = x$.

تعریف ۱۷.۱ نگاشت $T : X \to X$ را در گوی $B(z,r)$ نگاشت انقباض گویند اگر ثابتی چون $0 \leq \theta < 1$ موجود باشد بطوریکه:

$$\forall x_1, x_2 \in B(z,r) \qquad \parallel Tx_1 - Tx_2 \parallel \leq \theta \parallel x_1 - x_2 \parallel .$$

θ را ضریب انقباض گویند و گوی $B(z,r)$، گوی بسته‌ای به مرکز z و شعاع r است که بصورت:

$$B(z,r) = \{z \mid \parallel z - z_0 \parallel \leq r\}$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۱۸.۱ (قضیه نگاشت انقباض یا نقطه ثابت باناخ)

فرض کنید

۱) X یک فضای باناخ،

۲) $T : X \to X$،

۳) T در گوی $\bar{B}(u_0, r)$ یک نگاشت انقباض (با ضریب انقباض $0 \leq \theta < 1$)،

۴) $\frac{1}{1-\theta}||u_1 - u_0|| = r_0 \leq r$،

آن گاه

الف) T دارای نقطه ثابت منحصربفرد u^* درون $\bar{B}(u_0, r)$ می‌باشد.

ب) دنباله تکرار $u_k = Tu_{k-1}$، $k = 1, 2, \ldots$، به نقطه ثابت u^* همگراست.

ج) $|| u_k - u^* || \leq \theta^k r_0$.

برهان. T یک نگاشت انقباض است بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
\forall k \quad \| u_{k+1} - u_k \| = \| Tu_k - Tu_{k-1} \| &\leq \theta \| u_k - u_{k-1} \| \\
&= \theta \| Tu_{k-1} - Tu_{k-2} \| \\
&\leq \theta^2 \| u_{k-1} - u_{k-2} \| \\
&\vdots \\
&= \theta^k \| u_1 - u_0 \| \\
&= \theta^k (1-\theta) r_0.
\end{aligned}$$

به استقراء می‌توان نشان داد $\| u_k - u_0 \| \leq r_0(1-\theta^k)$. حکم به ازاء $k = 1$ طبق فرض برقرار است. فرض کنیم به ازاء k برقرار باشد، ثابت می‌کنیم برای $k + 1$ نیز برقرار است.

$$\begin{aligned}
\forall k \quad \| u_{k+1} - u_k \| = \| u_{k+1} - u_k + u_k - u_0 \| &\leq \| u_{k+1} - u_k \| + \| u_k - u_0 \| \\
&\leq \theta^k (1-\theta) r_0 + (1-\theta^k) r_0 \\
&= (\theta^k - \theta^{k+1}) r_0 + (1-\theta^k) r_0 \\
&= r_0 (1-\theta^{k+1}).
\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم $\{u_k\}$ یک دنباله کوشی است، یعنی

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists N \qquad \forall n \qquad (k \geq N \Longrightarrow \| u_{n+k} - u_k \| < \epsilon).$$

$$\begin{aligned}
\| u_{n+k} - u_k \| &= \| u_{n+k} - u_{n+k-1} + u_{n+k-1} - ... + u_{k+1} - u_k \| \\
&\leq \| u_{n+k} - u_{n+k-1} \| + \cdots + \| u_{k+1} - u_k \| \\
&\leq \theta^{n+k-1} \| u_1 - u_0 \| + \cdots + \theta^k \| u_1 - u_0 \|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \theta^k[\theta^{n-1}+\theta^{n-2}+\cdots+\theta+1](1-\theta)r_0 \\ &\leq \theta^k(1-\theta)r_0[\frac{1}{1-\theta}] \\ &= \theta^k r_0 \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

می‌دانیم هر دنباله کوشی در فضای باناخ، همگراست. پس $\exists u^* \in X$ به طوری که u_k به u^* همگرا باشد، بنابراین داریم

$$u^* = Tu^*$$

یعنی u^* نقطه ثابت T است.

ثابت می‌کنیم u^* یکتاست. فرض کنیم u_m نقطه ثابت دیگری برای نگاشت انقباضی T باشد. یعنی

$$\forall u^*, u_m \in X \qquad u^* = Tu^*, \qquad u_m = Tu_m,$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \| u^* - u_m \| &= \| Tu^* - Tu_m \| \\ &\leq \theta \| u^* - u_m \| \\ &< \| u^* - u_m \|. \end{aligned}$$

که یک تناقض است. پس u^* یکتاست. داریم

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k - u_0 \| \leq \lim_{k\to\infty} (1-\theta^k) r_0,$$

و این یعنی

$$\| u^* - u_0 \| \leq r_0.$$

پس u^* درون $\bar{B}(u_0, r)$ است. $\square$