بسم الله الرحمن الرحیم

۱۱۱۷۲۵

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه علوم پایه دامغان
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

عنوان پایان نامه:

میانگین پذیری ضعیف عملگری جبر فوریه A(G)

نگارش:
زهرا حسنخانی

استاد راهنما:
دکتر غلامرضا عباسپور

استاد مشاور:
دکتر مرتضی ابطحی ایوری

مهر ۱۳۸۷

به نام خدا

عنوان پایان نامه

میانگین پذیری ضعیف عملگری جبرِ فوریه $A(G)$

به وسیله‌ی :

زهرا حسنخانی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی

از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی محض

۱۳۸۸ /۱۲/ ۱-آ

از دانشگاه علوم پایه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عا

دکتر غلامرضا عباسپور استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر (استاد راهنما)

آقای مرتضی ابطحی استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر (استاد مشاور)

دکتر عباس فخاری استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر (استاد داور)

دکتر مجید اسحاقی گرجی استادیار دانشکده ریاضی دانشگاه سمنان (استاد داور)

دکتر رشید ولی استادیار دانشکده فیزیک (نماینده تحصیلات تکمیلی)

رشید ولی

مهر ماه ۱۳۸۷

تقدیم به خدا

خداوندا:

خندیدن و عشق ورزیدن را به من بیاموز. بادا که در همه شرایط و موقعیتهای زندگی بخندم و بدانم که در هر چه روی می‌دهد رحمت تو نهفته است. کمکم کن تا همه چیز را به تو بسپارم زیرا یقین دارم تکیه‌گاهی محکمتر از تو نیست.

به نام خدا

شکر خدای بزرگ و توانا را به جا می‌آورم که به من توفیق داد تا دورهٔ کارشناسی ارشد را به پایان برسانم. بر خود لازم می‌دانم که اززحمات جناب دکتر غلامرضا عباسپور،استاد راهنمای اینجانب که از ایشان نه تنها علم بلکه اخلاق و سیرت آموختم قدردانی نمایم.

همچنین از اساتید ارجمند جناب آقای دکترابطحی استاد مشاور، جناب آقای دکترفخاری ، جناب آقای دکترپرویزی ، جناب آقای دکترایران منش و پدر و مادر خوبم که خداوندآنان را به عنوان دو فرشته محبوب و بزرگترین نعمت بر من ارزانی داشته است بی نهایت تشکر می‌نمایم.

زهرا حسنخانی

مهر۸۷

چکیده

جبر باناخ انقباضی کامل A را میانگین پذیر ضعیف عملگری گوییم، هر گاه هر اشتقاق کراندار کامل $D : A \longrightarrow A^*$ درونی باشد.

دراین پایان نامه به مطالعهٔ میانگین پذیری ضعیف عملگری جبر باناخ انقباضی کامل A می‌پردازیم. و با فرض این که G گروه توپولوژیک فشردهٔ موضعی باشد، ابتدا با جبر فوریهٔ $A(G)$ آشنا می‌شویم و نشان می‌دهیم $A(G)$، میانگین پذیر ضعیف عملگری است.

مقدمه

جبر فوریهٔ $A(G)$ توسط پی ایمارد در سال ۱۹۷۲ در [۷] تعریف شد. جانسون در [۴] اثبات کرد گروه توپولوژیک فشردهٔ موضعی G میانگین پذیر است اگروتنها اگر جبر باناخ $L^1(G)$ میانگین پذیر باشد. با این قضیه کلاسی از جبرهای باناخ میانگین پذیرمشخص شد. امّا بعد ازمدّتی جانسون در[۱۵] نشان داد گروه فشرده‌ای وجود دارد که جبر فوریهٔ $A(G)$ میانگین پذیر نیست. به عبارت دیگر میانگین پذیری G میانگین پذیری $A(G)$ رانمی‌رساند. سال ها بعد بحث میانگین پذیری عملگری و میانگین پذیری ضعیف عملگری برای جبر باناخ انقباضی کامل A مطرح شد. ورویان در [۱۷] نشان داد که $A(G)$ میانگین پذیری عملگری است اگروتنها اگر G میانگین پذیرباشد. وجالب آن که ساختار فضای عملگری روی $L^1(G)$ اجازه می‌دهد که برای $L^1(G)$ دو مفهوم میانگین پذیری و میانگین پذیری عملگری معادل باشند.

فورست و پی تردر [۱۰] اثبات کردند اگر G گروه توپولوژیک فشردهٔ موضعی باشد که به کلاسی از $[MAP]$[1]، و $[IN]$ [2] گروهها تعلق داشته باشد، آنگاه $A(G)$ میانگین پذیر ضعیف عملگری‌است. بالاخره نیکو اسپرانک در [۲۲] سال ۲۰۰۲ نشان داد برای هر گروه توپولوژیک فشردهٔ موضعی G، $A(G)$ میانگین پذیری ضعیف عملگری است.

در فصل اول این پایان نامه مقدمات مورد نیاز را که در فصول بعدی با آن سرو کار داریم، بیان می‌کنیم. به دلیل حجم نسبتاً زیاد قضایا سعی شده اغلب قضایا با یک ارجاع همراه باشد. در

---

[1] Maximality Almost Periodic

[2] Invariant Neighborhood

فصل دوم به‌مطالعهٔ خواص گروههای میانگین‌پذیر و جبرهای باناخ میانگین پذیر و جبرهای باناخ میانگین پذیرضعیف می‌پردازیم. در فصل سوم به معرفی جبرهای فوریه وفوریهٔ اشتیلیس متناظر با گروه فشردهٔ موضعی G و فضاهای عملگری می‌پردازیم. در فصل آخر نشان‌می دهیم، اگر G گروه توپولوژیک فشردهٔ‌موضعی باشد، آنگاه جبر فوریهٔ $A(G)$، همیشه میانگین پذیر ضعیف عملگری است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۱.۱ یک جبر روی میدان $I\!F$ عبارت است از یک فضای برداری A روی $I\!F$ همراه با نگاشت $xy \longrightarrow (x,y)$ از $A \times A$ به A که در شرایط زیر صدق کند:

برای هر $x,y \in A$ و $\alpha \in I\!F$

۱) $x(yz) = (xy)z$

۲) $(x+y)z = xz+yz \quad , \quad x(y+z) = xy+xz$

۳) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$

به علاوه اگر

۴) برای هر $x,y \in A$، $xy = yx$

آنگاه A، جبر جابجایی نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱ یک نرم جبری روی A عبارت است از یک نرم $\|\,.\,\|$ روی A به طوری که برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم: $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$.

تعریف ۳.۱.۱ فضای نرمدار $(A, \|.\|)$ را یک جبر نرمدار گوییم هرگاه A جبری باشد که به نرم جبری مجهز شده است.
هر گاه $(A, \|.\|)$ کامل باشد آن را یک جبر باناخ گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ جبر باناخ A، یکدار است اگرعنصر همانی $e \in A$ وجود داشته باشد، به طوری که $\|e\| = 1$. همچنین زیر فضای خطّی B از A را یک زیر جبر A گوییم، هر گاه B نسبت به ضرب بسته باشد.
فرض کنیم A جبر باناخ یکدار نباشد. در اینصورت A را می‌توان با ضرب $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \beta\alpha)$ و جمع $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$ و نرم $\|(a, \alpha)\| = \|a\| + |\alpha|$ که $a, b \in A$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ می‌باشند، در یک جبر باناخ یکه‌دار $A_1 = A \oplus_1 \mathbb{C}$ نشاند.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم A یک جبر باشد. زیر جبر I را یک ایده‌ال چپ (راست) گوییم، هرگاه برای هر $a \in A$ و هر $x \in I$، $ax \in I$ $(xa \in I)$. I را ایده‌ال دو طرفه گوییم، هرگاه یک ایده‌ال چپ و راست باشد.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم A, B, C جبرهای باناخ جابه‌جایی باشند
دنبالهٔ $0 \to C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \to 0$ را یک دنبالهٔ دقیق گوییم هرگاه $Imf = Kerg$ و f تکریختی و g پوشا باشد.

تعریف ۷.۱.۱ اگر A یک جبر مختلط باشد نگاشت $*: A \longrightarrow A$ را که هر x در A رابه x^* می‌نگارد یک برگشت[۱] روی A گوییم هرگاه خواص زیر برای هر $x,y \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ برقرار باشد.

۱) $(x+y)^* = x^* + y^*$

۲) $(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*$

۳) $(x^*)^* = x$

۴) $(xy)^* = y^* x^*$

در اینصورت جبر A را یک $*$–جبر می‌نامیم. همچنین زیر جبر B از A را یک $*$– زیر جبر یا$*$–پایا گوییم، هرگاه برای هر $x \in B$، $x^* \in B$.

تعریف ۸.۱.۱ اگر A یک $*$–جبر باناخ باشد و برای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$\|aa^*\| = \|a\|^۲.$$

در اینصورت A را یک C^*–جبر می گوییم.

همچنین C^*–جبرA را یک W^*–جبر باناخ گوییم، هر گاه A فضای دوگان یک فضای باناخ باشد. یعنی فضای باناخ A_* چنان موجود باشد که $A = (A_*)^*$. A_* را پیش دوگان [۲] A گوییم.

مثال ۹.۱.۱ میدان اسکالر $\mathbb{C}$ با برگشت روی $\mathbb{C}$ به گونه‌ای که

$$\alpha \longrightarrow \bar{\alpha}$$

[۱] Involotion
[۲] Predual

یک C^*−جبر یکدار است.

تعریف ۱۰.۱.۱ اگر B و A، $*$−جبرهای باناخ باشند و $\phi : A \longrightarrow B$ یک نگاشت همریختی باشد به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $\phi(a)^* = \phi(a^*)$، آنگاه ϕ را $*$−همریختی می‌گوییم. اگر برای هر $a \in A$ داشته باشیم $\|a\| = \|\phi(a)\|$، آنگاه ϕ را طولپا گوییم. اگر ϕ یک به یک و پوشا باشد، ϕ را یکریختی[۳] می‌گوییم.
جبرهای باناخ A, B را یکریخت طولپا گوییم هرگاه یک یکریختی طولپا[۴] از A به روی B وجود داشته باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار و $x \in A$ باشد. طیف[۵] $x \in A$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin G(A)\}.$$

که $G(A)$ مجموعهٔ همه عناصر معکوسپذیر A (یعنی برای هر $x \in A$، $y \in A$ وجود دارد به طوریکه $xy = yx = e$) می‌باشد.
همچنین شعاع طیفی x را به صورت

$$r(x) = \sup\{|\lambda| \quad ; \quad \lambda \in \sigma(x)\}$$

تعریف می‌کنیم. برطبق صفحه ۲۵۳ از [۱۹]، $r(x) = lim\|x^n\|^{1/n}$ که $n \to \infty$.

اگر A یک C^*− جبر باشد و $a = a^*$ آنگاه:

$$\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

[۳] Isomorphism
[۴] Isometric
[۵] Spectrum

برای $n \geq ۱$ با استقرا داریم:

$$\|a^{۲^n}\| = \|a\|^{۲^n}.$$

در نتیجه $\|a\| = \|a^{۲^n}\|^{۱/۲^n}$. پس

$$r(a) = \|a\| \quad (*).$$

قضیه ۱۲.۱.۱ فرض کنیم A و B، C^*−جبر باشند. و $p : A \longrightarrow B$، $*$−همریختی باشد . آنگاه

$$\|p(a)\| \leq \|a\|.$$

برهان. فرض کنیم $a \in A$ پس $\sigma(p(a)) \subseteq \sigma(a)$ در نتیجه $r(p(a)) \leq r(a)$ و بر طبق رابطه $(*)$

$$\|p(a)\|^{۲} = \|p(aa^*)\| = r(p(aa^*)) \leq r(aa^*) = \|aa^*\| = \|a\|^{۲}.$$

□

همچنین $p(A)$ در B بسته است. ر. ک .ص ۲۷۴ از [٦]

تعریف ۱۳.۱.۱ فضای برداری H همراه با ضرب داخلی $<.,.>$ را فضای هیلبرت گوییم هرگاه نسبت به نرم تعریف شده توسط

$$\|x\| = <x, x>^{۱/۲} \quad x \in H$$

کامل باشد.

قضیه ۱۴.۱.۱ اگر $T \in B(H)$، عملگر الحاقی [۶] منحصر به فرد $T^* \in B(H)$ وجود دارد به طوریکه به ازای هر $x, y \in H$، $< Tx, y >=< x, T^*y >$.
همچنین $B(H)$ با نرم

$$\|T\| = sup\{\|Tx\| \ : \ x \in H, \|x\| \leq ۱\}$$

و عمل برگشت $T \longrightarrow T^*$ تبدیل به یک C^*-جبر می‌شود. ر. ک. [۱۹]

قضیه ۱۵.۱.۱ فرض کنیم A یک C^*-جبر باشد. فضای هیلبرت H وجود دارد به طوری که A با C^*-زیر جبری از $B(H)$، $*$- یکریختی است.
برهان. قضیه ۵۶.۱ از [۸] را ببینید.

□

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنیم $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از فضاهای هیلبرت باشند. آنگاه $\bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha$ را مجموعهٔ همهٔ $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ تعریف می کنیم که

$$\sum_{\alpha \in I} \|x_\alpha\|^۲ < \infty.$$

$\bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha$ با جمع و ضرب اسکالر و ضرب داخلی

$$\{x_\alpha\} + \{y_\alpha\} = \{x_\alpha + y_\alpha\} \ \ , c\{x_\alpha\} = \{cx_\alpha\} \ \ , < \{x_\alpha\}, \{y_\alpha\} >= \sum_{\alpha \in I} < x_\alpha, y_\alpha >$$

تشکیل یک فضای هیلبرت موسوم به جمع مستقیم فضاهای هیلبرت می‌دهد. ر. ک . صفحهٔ ۲۵۴ از [۸]

---

[۶] Adjoint

مثال ۱۷.۱.۱ فرض کنید X فضای فشرده و هاسدورف باشد و $A = C(X)$، فضای تمام توابع مختلط مقدار پیوسته روی X باشد $C(X)$ با اعمال تعریف شده به صورت زیر و نرم

$$\|f\|_u = sup\ \{\ |f(x)| : x \in X\}$$

یک جبر باناخ یکدار و جابه‌جایی است.

برای هر $f, g \in C(X)$ و $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$،

۱) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

۲) $(\alpha f)(x) = f(\alpha x)$

۳) $(fg)(x) = f(x)g(x)$

همچنین براحتی قابل بررسی است که نگاشت $f \to \bar{f}$ یک برگشت روی $C(X)$ تعریف می‌کند که آن را به یک C^*–جبر تبدیل می‌کند .

قضیه ۱۸.۱.۱ فرض کنیم I ایده‌ال بسته‌ای از جبر باناخ A باشد. فضای خارج قسمتی $\frac{A}{I}$ عبارتست از تمام کلاسهای هم‌ارزی به شکل $x + I$ که $x \in A$. تحت اعمال جمع و ضرب اسکالر زیر $\frac{A}{I}$ تبدیل به یک جبر می‌شود.

$$(x+I) + (y+I) = (x+y) + I \quad x, y \in A$$

$$(x+I)(y+I) = xy + I \quad x, y \in A$$

$$\alpha(x+I) = \alpha x + I \quad \alpha \in \mathbb{F}, x \in A$$

همچنین برای $x + I \in \frac{A}{I}$ تعریف می‌کنیم.

$$\|x+I\| = \inf\{\|x+y\|\ ; y \in I\}.$$

این رابطه یک نرم روی $\frac{A}{I}$ تعریف می‌کند که $\frac{A}{I}$ را تبدیل به یک جبر باناخ می‌کند.ر.ک.ص ۲۷۶ از [۱۹]. اگر A یکدار باشد آنگاه $\frac{A}{I}$ چنین است. ر. ک.ص ۲۴۵ از [۶]. اگر I یک

ایده‌ال $*$–پایا باشد، آنگاه با تعریف $(x+I)^* = x^* + I$ جبر $\frac{A}{I}$ تبدیل به یک $*$–جبر می‌شود.
ر. ک .ص ۲۴۵ از [٦]

تعریف ۱۹.۱.۱ تابع حقیقی مقدار p را روی فضای برداری X یک نیم نرم نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in I\!F$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

$$p(\alpha x) = |\alpha| \, p(x)$$

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنیم H فضای هیلبرت باشد. دراینصورت توپولوژی عملگری ضعیف[۷] (WOT) روی $B(H)$ را توپولوژی تولید شده توسط نیم‌نرمهایی به صورت $x, y \in H \quad |< T(x), y >| \to T$ تعریف می‌کنیم. به همین ترتیب توپولوژی عملگری قوی[۸] (SOT) را توپولوژی تولید شده توسط نیم‌نرمهای $h \in H$ ، $\|T(h)\| \to T$ تعریف می‌کنیم.

گزاره ۲۱.۱.۱ فرض کنیم $A \subseteq B(H)$ در این حالت اگر $T \in B(H)$ آنگاه T در بستار A نسبت به توپولوژی عملگری ضعیف(قوی) قرار دارد اگروتنهااگر تور $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ در A موجود باشد به طوریکه $T_\alpha \xrightarrow{WOT} T$ $(T_\alpha \xrightarrow{SOT} T)$ یا بطور معادل برای هر $h, k \in H$،

$$< T_\alpha(h), k > \longrightarrow < T(h), k > \quad (\|T_\alpha(h) - T(h)\| \longrightarrow 0)$$

برهان. ر. ک .ص ۲۵٦ از [٦] □

---

[۷] Weak operator topology

[۸] Strong operator topology

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد و $\Phi \subseteq B(H)$ جابه‌جاگر[۹] Φ را با Φ' نشان داده و با $\Phi' = \{A \in B(H) \;\; ; AS = SA, S \in \Phi\}$ تعریف می‌کنیم. می‌توان ثابت کرد که Φ' همواره یک جبر است. به طور مشابه جابه‌جاگر Φ' را با Φ'' نشان می‌دهیم. در حالت کلی اگر A یک زیر جبر از $B(H)$ باشد $A \subseteq A''$. توجه ما بیشتر به آن دسته از زیر جبرهایی معطوف است که $A = A''$ این گونه زیر جبرهای $B(H)$ راجبرهای فون نویمان [۱۰] می‌نامیم. در حالت اخیر A'' را جبر فون نویمان تولید شده توسط A می‌نامیم.

گزاره ۲۳.۱.۱ فرض کنیم A، $*$-جبری از $B(H)$ باشد که H فضای هیلبرت است. و فرض کنیم که A شامل همانی $B(H)$ باشد. در اینصورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱) A به طور ضعیف بسته است. ۲) $A = A''$

برهان. قضیهٔ ۵۷.۱ از [۸]

□

گزاره ۲۴.۱.۱ فرض کنیم A یک جبر فون نویمان باشد. آنگاه A یک W^*-جبر است.

برهان. ر. ک. ص ۱۸۵ از [۱۶]

□

تعریف ۲۵.۱.۱ اگر A یک جبر و X یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. آنگاه X را یک A-مدول چپ[۱۱] گوییم، هرگاه تابعی به شکل $f : A \times X \longrightarrow X$ باضابطهٔ $(a, x) \mapsto ax$ و با خواص زیر برای هر $a, a_1, a_2 \in A$ و $m, m_1, m_2 \in X$ موجود باشد.

$$(a_1 + a_2) \cdot m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m.$$

---

[۹] Comutant

[۱۰] Von-Numann

[۱۱] Left A-modul