پیشگفتار

هدف ما در این پایان نامه ارائه‌ی شیوه های گوناگون شبیه سازی فرایندهای نقطه‌ای فضایی بر اساس روشهای مونت کارلوی زنجیر مارکوفی (MCMC) است .

برای این منظور در فصل یک ، فرایندهای نقطه‌ای فضایی را تعریف کرده و مفاهیم وقضایای مربوط به آن را مورد بررسی قرار می دهیم .

در فصل دوم یکی از مهم ترین فرایندهای نقطه‌ای که فرایند نقطه ای مار کوف است را بیان می کنیم .زیرا در عمل اغلب با فرایندهای نقطه ای مارکوف سروکار داریم .

برای شبیه سازی فرایندهای نقطه‌ای باید زنجیر مارکوفی تولید کنیم که توزیع آن در بی نهایت به سمت توزیع هدف میل کند.برای این منظور در فصل سوم ابتدا زنجیرهای مارکوف ،ویژگی ها ومباحث حدی مربوط به آنها مورد مطالعه قرار می‌گیرند و سپس الگوریتم های MCMC (متروپولیس- هستینگس،نمونه گیری گیبس ،....) را که برای تولید زنجیر مارکوف به کار می روند ،بیان می کنیم. همچنین مسئله‌ی همگرایی آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل چهارم روش MCMC را برای مدل‌هایی که به دست آوردن برآورد ماکسیمم درستنمایی آنها به روش کلاسیک امکان‌پذیر نیست، به کار می‌بریم و برآورد ماکسیمم درستنمایی را به روش MCMC به دست می‌آوریم. در نهایت یک مثال کاربردی می‌آوریم.

مقدمه

بیش از ۳۰ سال است که فرایندهای نقطه‌ای فضایی[۱]، حوزه اصلی تحقیقات در آمار فضایی به حساب می‌آیند و در بسیاری از زمینه‌های علمی نظیر نجوم، زیست‌شناسی، جنگل‌شناسی، جغرافیا، همه‌گیر شناسی،[۲] علوم زمین و زمین‌شناسی کاربرد دارند.

این فصل به مفهوم فرایند نقطه‌ای مباحث مربوط به آن و همچنین فرایند نقطه‌ای پواسون می‌پردازد.

جزئیات بیشتر را می‌توان در [۲] و [۱٤] یافت.

تاریخچه

متروپولیس[۳] وهمکاران در سال ۱۹۵۳ برای اولین بار یک الگوریتم مونت کارلوی زنجیر مارکوفی (MCMC)[٤] برای شبیه سازی یک فرایند نقطه ای گیبسی با تعدادی متناهی نقطه معرفی کردند .هستینگس[٥] در سال ۱۹۷۰یک رده عمومی از الگوریتم MCMC معرفی نمود که تقریبا کلیه الگوریتم های ارائه شده تا آن موقع را شامل می شد .

بیشتر کارهای اولیه در حوزه فیزیک آماری مورد استفاده قرار می گرفت . در آمار، بسیاری از اولین ومهمترین کاربردهای MCMC در آمار فضایی توسط بیساگ[٦] در سال ۱۹۷٤ ارائه گردید.

1- Spatial point processes
2- epidemiology
3- Metropolis
4- Markov Chain Monte Carlo
5- Hastings
6- Besag

کروتز[1] درسال ۱۹۷۹ نمونه گیر گیبس[2] را که یک الگوریتم MCMC است معرفی کرد وآن را در فیزیک آماری مورد استفاده قرار دارد .گمان وگمان[3] (۱۹۸٤) این روش را در آمار به کار گرفتند و گلفاند و اسمیت[4] (۱۹۹۰) آن را گسترش دادند.

تکنیکهای زاد- مرگ توسط ریپلی[5] (۱۹۷۷) برای شبیه سازی فرایندهای نقطه‌ای متناهی با تعداد متناهی یا تعداد تصادفی از نقاط ارائه گردید.

الگوریتم های به روز کننده نقطه چندگانه توسط بیساگ وگرین[6] (۱۹۹۳)؛ مولر[7] (۱۹۹۲و۱۹۹۳)؛ هرن و ینیسن[8] (۱۹۹۳)؛ هاگستروم،لیشاوت[9] و مولر (۱۹۹٦)؛ طرحهای تعدیل کننده شبیه سازی توسط مارینـاری و پاریسی[10] (۱۹۹۲)؛ گه‌یر و تامپسون[11] (۱۹۹۵) و زنجیرهای مارکوف جفت شده ـ متروپولیس توسط گه‌یر (۱۹۹۱) به دلیل کارآرایی بیشتر برای شبیه‌سازی فرایندهای نقطه‌ای مارکوفی معرفی شده و توسعه یافتند.

گلمان ومنگ[12] (۱۹۹۸) یک الگوریتم MCMC برای برآورد نسبت ثابت‌های نرمال کننده توابع چگالی پیشنهاد کردند. مولر وهمکاران در سال ۲۰۰٤ روش کاراتری برای این منظور معرفی نمودند.

1- Creutz
2- Gibbs sampler
3- Geman & Geman
4- Gelfand & Smith
5- Ripley
6- Green
7- Moller
8- Hurn & Jennison
9- Haggstrom, Lieshout
10- Marinari & Parisi
11- Geyer & Thompson
12- Gelman & Meng

مولر و راسموسن (۲۰۰۶)[1] الگوریتمی برای شبیه سازی فرایندهای هاوس ارائه کردند که از الگوریتم کامل که توسط آنها معرفی شده (مولر و راسموسن،۲۰۰۵) بسیار سریعتر است .

در ایران تاکنون کاری در این زمینه انجام نشده است .

۱ـ۱ الگوهای نقطه‌ای

یک الگوی نقطه‌ای فضایی[2] (به اختصار، یک الگوی نقطه‌ای)، مجموعه‌ای از نقاط است که به طور نامنظم در یک ناحیه‌ی معینی از فضا توزیع و به طور تصادفی تولید شده‌اند. این نقاط که نشان دهنده‌ی مکان و موقعیت اشیاء در یک ناحیه‌ی یک، دو یا سه بعدی هستند، پیشامد نامیده می‌شوند. موقعیت گونه‌ای از درختان در یک جنگل، مکانهای وقوع زلزله، موقعیت مراکز سلولها در یک قطعه‌ی میکروسکوپی از یک بافت و مکان آشیانه‌های نوعی از پرندگان مثالهایی از الگوهای نقطه‌ای هستند.

فرایندهای نقطه‌ای مولد الگوهای نقطه‌ای و یک مدل احتمالاتی برای آنها هستند. فضایی که الگوهای نقطه‌ای در آن رخ می‌دهند را با S نشان داده وبه آن فضای وضعیت گوییم. در حالت کلی S یک فضای متریک تفکیک پذیر[3] در نظر گرفته می‌شود و فرایندهای نقطه‌ای زمانی و فضایی را دربرمی‌گیرد ولی ما تنها فرایندهای نقطه‌ای فضایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و فضای وضعیت را $\mathbb{R}^d$، $d \geq ۲$، یا یک زیر مجموعه‌ی بورل آن در نظر می‌گیریم.

1- Rossmosen
2 - Spatial point pattern
3 - Seperable

در این حالت $S \subseteq \mathbb{R}^d$ یک مجموعه‌ی بورل با متریک اقلیدسی $d(\xi,\eta) = \| \xi - \eta \|$ است که در آن $\xi, \eta \in S$.

در عمل چون همه‌ی S قابل بررسی نیست، اغلب بخشی از آن در قالب یک پنجره‌ی مشاهده شده کراندار W مورد بررسی قرار می‌گیرد. W یک زیرمجموعه‌ی کراندار S است که در بیشتر کاربردها بخشی از صفحه (فضای دوبعدی) در نظر گرفته می‌شود. در اکثر مواردی که n=۲ ، پیشامدها در یک مستطیل یا دایره مشاهده می‌شوند.

تذکر ۱ـ۱ ـ ۱ هر زیرمجموعه‌ی S، یک الگوی نقطه‌ای محسوب نمی‌شود و تنها زیر مجموعه‌های متناهی موضعی[1]، یک الگوی نقطه‌ای در S است. به همین دلیل ما توجه خود را به آن دسته از فرایندهای نقطه‌ای معطوف می‌کنیم که تحقق‌های[2] (الگوهای نقطه‌ای) آنها زیر مجموعه‌های متناهی موضعی در S باشند ([۹]).

۱ـ۲ فرایندهای نقطه‌ای فضایی

تعریف ۱ـ۲ ـ ۱ : مجموعه‌ی x متناهی موضعی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $B \in \mathcal{B}_\circ$ داشته باشیم:

$$n(x_B) = n(x \cap B) < \infty$$

که در آن $\mathcal{B}$ یک σ ـ میدان بورل روی S است و مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های بورل کراندار واقع در $\mathcal{B}$ را با $\mathcal{B}_\circ$ نشان می‌دهیم که به صورت زیر است:

$$\mathcal{B}_\circ = \{ B \in \mathcal{B} : B \text{ کراندار} \}.$$

1- Locally Finite
2 - Realization

بـه عبـارت دیگـر مجموعـه‌ی x متنـاهی موضـعی اسـت هرگـاه تعـداد نقـاط آن در هـر مجموعه‌ی بورل کراندار، متناهی باشد.

در تعریف بالا $n(x)$ نشان دهنده‌ی تعداد اعضای مجموعه‌ی x اسـت کـه اگـر x متنـاهی نباشد آنگاه $n(x)=\infty$.

فرض کنیم $N_{\backslash f}$ فضای تحقق‌های x باشد یعنی:

$$N_{\backslash f}=\{x\subseteq S: n(x_B)<\infty\ ,\ \forall\ B\in\mathcal{B}_{\circ}\}.$$

σ ـ میدان $\mathcal{N}_{\backslash f}$ را روی $N_{\backslash f}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{N}_{\backslash f}=\sigma(\{\{x\in N_{\backslash f}: n(x_B)=m\}: m\in I_{\circ}\ ,\ B\in\mathcal{B}_{\circ}\})$$

برای هر $B\in\mathcal{B}_{\circ}$ نگاشت $f_B: x\to n(x_B)$ از $N_{\backslash f}$ به $\mathbb{N}_{\circ}$ اندازه پذیر است یعنـی بـرای هر $M\subseteq I$ که در آن I مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی است، داریم $f_B^{-\backslash}(M)\in\mathcal{N}_{\backslash f}$. در واقع $\mathcal{N}_{\backslash f}$ کوچکترین σـ میدانی است که این نگاشت‌ها را اندازه‌پذیر می‌کند ([۹]).

اعضای $N_{\backslash f}$، الگوی نقطه‌ای یـا پیکربنـدی[1] نقطـه‌ای متنـاهی موضـعی در S اسـت و بـا $x,y\ldots$ نمایش می‌دهیم. درحالی که برای نـشان دادن اعـضای S از ξ و ηو... اسـتفاده می‌کنیم.

برای هر $x\in N_{\backslash f}$ و $\xi,\eta\in S$، $x\cup\{\xi\}$ را به صـورت $x\cup\xi$ نمـایش داده و از نمـاد $x\setminus\eta$ برای نشان دادن $x\setminus\{\eta\}$ استفاده می‌کنیم ([۹]).

الگوی نقطه‌ای ϕ را با $x=\phi$ نشان می‌دهیم.

اگر الگوی نقطه‌ای x را تنها بر $B\in\mathcal{B}$ در نظر بگیریم، آن را با $x_B=x\cap B$ نـشان داده

1 -configuration

و به آن تحدید الگوی نقطه‌ای[1] x به B گوییم.

تعریف ۱ـ۲ ـ ۲ : گیریـــم (Ω, F, P) فضای احتمال پایه باشد. تابع $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (N_{lf}$ و $\mathcal{N}_{lf})$ را یک فرایند تصادفی نقطـه‌ای (بـه اختـصار، یـک فراینـد نقطه‌ای) روی S و اندازه احتمال $P_X = PoX^{-1}$ روی $(N_{lf}$ و $\mathcal{N}_{lf})$ را توزیع آن می‌نامیم [۹].

تعریف ۱ـ۲ ـ ۳ : فرایند نقطه‌ای X ساده است اگر در هر تحقق آن، نقاط بیش از یک بار مشاهده نشده باشد. به عبـارت دیگـر بـرای هـر $\xi \in S$ و هـر $x \in N_{lf}$ داشـته باشـیم $n(x \cap \xi) \in \{0,1\}$ ([۳]).

تعریف ۱ـ۲ ـ ۴: گوییم یک فرایند نقطه‌ای متناهی است هرگاه $n(X_s) < \infty$ ([۳]).

لم ۱ـ۲ ـ ۱ σـ میدان $\mathcal{N}_{lf}$ کوچکترین σ ـ میدان شامل گردایه‌ی $\mathcal{A} = \{\{x \in N_{lf} : n(x_B) = 0\} \mid B \in \mathcal{B}_0\}$ است. یعنی $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{N}_{lf}$.

برهان: به [۹] مراجعه شود.

لم ۱ـ۲ ـ ۲ گیریم $\mathcal{A}$ یک $\pi-$ سیستم باشد و $\mathcal{N}_{lf} = \sigma(\mathcal{A})$. اگر دو اندازه‌ی احتمال P و Q روی $\mathcal{A}$ با هم برابر باشد آنگاه روی $\mathcal{N}_{lf}$ نیز برابرند.

برهان: به [۳] مراجعه شود.

تعریف ۱ـ۲ ـ ۵ : برای فرایند نقطه‌ای X روی S ، تابع شـمارای $N(B)$، تعـداد تـصادفی نقاط واقع در B، $B \subseteq S$، است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

1- restriction of a point configuration

$N(B) = n(X_B) = n(X \cap B)$.

با استفاده از قضیه‌ی زیر به سادگی می‌توان مشخص کرد که آیا تابع، فرایند نقطه‌ای است؟

قضیه ۱ـ۲ ـ ۱ یک تابع $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (N_{\circ f}, \mathcal{N}_{\circ f})$ اندازه‌پذیر است اگر فقط اگر برای هر $B \in \mathcal{B}_{\circ}$، تابع $N(B)$ یک متغیر تصادفی باشد. یعنی برای هر $n \in \mathbb{N}_{\circ}$ داشته باشیم $N(B)^{-1}(n) \in \mathcal{F}$.

برهان: به [۳] مراجعه شود.

ویژگی‌های مانایی و همسانگردی فرایندهای نقطه‌ای در تحلیل آماری الگوهای نقطه‌ای نقش بسزایی دارد.

تعریف ۱ـ۲ ـ ۶: گوییم فرایند نقطه‌ای x روی $\mathbb{R}^n$ مانا[1] است هرگاه توزیع آن تحت انتقال ناوردا باشد یعنی برای هر $s \in \mathbb{R}^d$ ، $X + s \overset{d}{=} X$ که در آن $X + s = \{\xi + s : \xi \in X\}$.

تعریف ۱ـ۲ ـ ۷: فرایند نقطه‌ای X همسانگرد[2] است اگر توزیع آن تحت هر دوران حول مبداء مانند O ناوردا باشد یعنی $OX \overset{d}{=} X$ که در آن $OX = \{o\xi : \xi \in X\}$.

۱ـ۳ مشخص سازی فرایندهای نقطه‌ای

همانطور که برای تشخیص توزیع یک متغیر تصادفی از توابعی چون تابع توزیع، تابع مولد گشتاور استفاده می‌کنیم، توزیع یک فرایند نقطه‌ای یعنی $[P(X \in F), F \in \mathcal{N}_{\circ f}]$ نیز

1 - Stationary
2 - Istropic

به طور یکتا به وسیله‌ی تابع احتمال پوچی[1] و تابعک مولد احتمال[2] مشخص می‌شود.

۱ ـ ۳ ـ ۱ مشخص‌سازی فرایند نقطه‌ای به وسیله تابع احتمال پوچی

مجموعه‌هایی به صورت $F_B = \{x \in N_{۱f} : n(x_B) = ۰\}$ که در آن $B \in \mathcal{B}_۰$، پیشامدهای پوچ نامیده می‌شوند.

تعریف ۱ـ۳ ـ۱: تابع احتمال پوچی یک فرایند نقطه‌ای X به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nu_X(B) = P(N(B) = ۰).$$

ساده‌ترین روش برای تشخیص توزیع فرایند نقطه‌ای X استفاده از تابع احتمال پوچی آن است که در قضیه زیر به آن می‌پردازیم.

قضیه ۱ـ۳ ـ ۱ (شوکه[3]) توزیع فرایند نقطه‌ای X به وسیله‌ی تابع احتمال پوچی آن، به طور یکتا مشخص می‌شود ([۹]).

برهان : فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ دو فرایند نقطه‌ای باشند که تابع احتمال پوچی آنها با هم برابر باشد. باید ثابت کنیم توزیع دو فرایند نقطه‌ای نیز با هم برابر است. چون تابع احتمال پوچی دو فرایند نقطه‌ای با هم برابر است پس داریم

$$\nu_{X_۱}(B) = \nu_{X_۲}(B).$$

برای هر $F \in \mathcal{A}$ از تعریف $\mathcal{A}$ در لم ۱ـ۲ ـ ۱ داریم $P_{X_۱}(F) = P_{X_۲}(F)$ بنابر لم ۱–۲–۲، $\mathcal{A}$ یک $\pi -$ سیستم تولید کننده‌ی $\mathcal{N}_{۱f}$ است یعنی $\mathcal{N}_{۱f}$ کوچکترین σ ــ میدان شامل $\mathcal{A}$ است لذا برای هر $F \in \mathcal{N}_{۱f}$ داریم:

1 - Void probability function
2 -Probability generating functional
3 -Choquet

$P_{X_1}(F) = P_{X_2}(F)$. ■

به همین ترتیب توزیع چند متغیره (X_1و ....و X_k) برای هر $K \in \mathbb{N}$ و B_1و...و$B_K \in \mathcal{B}_0$ و توابع شمارشی N_1 ، .....،N_K به طور یکتا به وسیله‌ی احتمال‌های پوچی زیر مشخص می‌شود.

$$\upsilon(B_1,...,B_K) = P(N_1(B_1) = 0,...,N_K(B_K) = 0) .$$

قضیه ۱ـ۳ـ ۲ توزیع فرایند نقطه‌ای X با داشتن توزیع ($N(B_1)$و...و$N(B_K)$) برای هر $K \in \mathbb{N}$ و هر B_1و...و$B_K \in \mathcal{B}_0$، به طور یکتا مشخص می‌شود.

برهان: به [۹] مراجعه شود.

۱ـ۳ـ۲ مشخص‌سازی به وسیله‌ی تابعک مولد احتمال

برای فرایند نقطه‌ای X روی S، تابعک مولد احتمال به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$G_X(u) = E\left[\prod_{\xi \in X} u(\xi)\right]$$

که در آن u به مجموعه‌ی توابع $u : S \to [0,1]$ که $\{\xi \in S : u(\xi) < 1\}$ کراندار است، تعلق دارد.

اگر برای $B \in \mathcal{B}_0$ قرار دهیم: $u(\xi) = t^{I[\xi \in B]}$,$0 \le t \le 1$، آنگاه تابعک مولد احتمال را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$G_x(u) = E\left[\, t^{N(B)}\right] .$$

به عبارتی $G_X(u)$ تابع مولد احتمال متغیر تصادفی $N(B)$ است.

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که تابع مولد احتمال ابزار دیگری برای مشخص کردن توزیع

فرایند نقطه‌ای است.

قضیه ۱ـ۳ ـ ۳ توزیع فرایند نقطه‌ای X توسط تابع مولد آن به طور یکتا تعیین می‌شود [۲].

برهان: برای $m \in \mathbb{N}$، $1 \le i \le m$، $B_i \in \mathcal{B}_0$ و $0 \le t_i \le 1$ قرار می‌دهیم.

$$u(\xi) = \prod_{i=1}^{m} t_i^{\,1[\xi \in B_i]}$$

در این صورت $G_X(u) = E[\prod_{\xi \in x} u(\xi)] = E[\prod_{i=1}^{m} t_i^{N(B_i)}] = G_{N(B_1),\dots N(B_m)}(t_1,\dots t_m)$

که $G_{N(B_1),\dots N(B_m)}$ تابع مولد احتمال متغیرهای تصادفی $N(B_m),\dots,N(B_1)$ است در نتیجه توزیع $N(B_m),\dots,N(B_1)$ به طور یکتا به وسیله‌ی $G_{N(B_1),\dots N(B_m)}$ مشخص می‌شود و طبق قضیه ۱ـ۳ ـ ۲ با داشتن توزیع $N(B_m),\dots,N(B_1)$، توزیع X به طور یکتا تعیین می‌شود. ■

۱ـ۴ برهم نهی[1] و تنک سازی[2] فرایندهای نقطه‌ای

حال دو عمل مهم برهم نهی و تنک‌سازی را برای فرایندهای نقطه‌ای تعریف می‌کنیم.

۱ـ۴ـ۱ برهم‌نهی فرایندهای نقطه‌ای

تعریف ۱ـ۴ ـ ۱ : گیریم $X_1,\dots,X_K$ فرایندهای نقطه‌ای روی S باشند در این صورت فرایند نقطه‌ای $X = \bigcup_{i=1}^{K} X_i$ را برهم نهی فرایندهای نقطه‌ای $X_1,\dots,X_K$ می‌نامیم.

در این پایان نامه برهم نهی فرایندهای نقطه‌ای دو به دو مجزا را بررسی می‌کنیم یعنی

1 -Superposition
2 - Thining

برای هر $i \neq j$ داشته باشیم، $X_i \cap X_j = \phi$.

۱ـ۴ـ۲ تنک‌سازی فرایند نقطه‌ای

تنک‌سازی روشی برای حذف تصادفی نقاط از فرایند نقطه‌ای X است و فرایند نقطه‌ای تنک شده‌ی X_{thin} را می‌سازد.

تعریف ۱ـ۴ ـ ۲: گیریم تابع p به صورت $p : S \to [0,1]$ و X یک فرایند نقطه‌ای روی S است. اگر $X_{thin} \subseteq X$ با احتمال $p(\xi)$ شامل $\xi \in X$ باشد به طوری که شمول مستقل از یکدیگر و از X مستقل باشد آنگاه X_{thin} را یک تنک‌سازی مستقل X با احتمال‌های نگهداری $p(\xi)$، $\xi \in S$، می‌نامند.

به طور دقیق‌تر قرار دهید $X_{thin} = \{\xi \in X : R(\xi) \leq p(\xi)\}$ به طوری که برای هر $\xi \in S$, $R(\xi) \sim unif\,[0,1]$ و $R(\xi)$ها دو به دو از هم مستقل و مستقل از X باشند. در این صورت X_{thin} را یک تنک‌سازی مستقل X می‌نامند.

حال ابتدا فرایند نقطه‌ای دو جمله‌ای و سپس فرایند نقطه‌ای پواسون، و مشخصه‌های آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱ـ۵ فرایند نقطه‌ای دو جمله‌ای

تعریف ۱ ـ ۵ ـ ۱: یک اندازه‌ی μ روی $B \in \mathcal{B}$ نااتمی یا منتشر[1] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\xi \in \mathcal{B}$ داشته باشیم $\mu(\{\xi\}) = 0$، در غیر این صورت اندازه را اتمی می‌نامند.

تعریف ۱ـ۵ ـ۲: فرض کنیم $B \in \mathcal{B}$ ، $n \in \mathbb{N}$ و f یک اندازه‌ی احتمال منتشر روی B

1- diffuse

باشد. فرایند نقطه‌ای X، شامل n نقطه‌ی i.i.d با تابع چگالی f را یک فرایند نقطه‌ای دو جمله‌ای nـ نقطه‌ای روی B با چگالی f می‌گوییم و می‌نویسیم $X \sim \text{binomial}(B,n,f)$.

تذکر ۱ـ۵ ـ ۱ توجه داشته باشید که در تعریف قبل اندازه‌ی لبگ B مثبت است:

$$\int_B f(\xi)d\xi = ۱ \ , (|B| > ۰)$$

ساده‌ترین حالت وقتی است که $|B| < \infty$ و n– نقطه‌ی i.i.d دارای توزیع یکنواخت باشند، یعنی $f(\xi) = \frac{۱}{|B|}$.

یکی از مهمترین فرایندهای نقطه‌ای که نقش اساسی در ساختن فرایندهای مفید دیگر دارد، فرایند نقطه‌ای پواسون است.

۱ـ۶ فرایند نقطه‌ای پواسون

فرایندهای نقطه‌ای پواسون روی فضای $S \subseteq \mathbb{R}^d$ تعریف شده و به وسیله‌ی تابع شدت $\rho : S \to [۰,\infty)$ که انتگرال پذیر موضعی است، یعنی برای هر مجموعه‌ی کراندار $B \subseteq S$، $\int_B \rho(\xi)d\xi$ متناهی است، مشخص می‌شوند.

تعریف ۱ـ۶ ـ ۱: یک اندازه‌ی μ متناهی موضعی است اگر برای هر $B \in \mathcal{B}_۰$ داشته باشیم $\mu(B) < \infty$.

تعریف ۱ـ۶ ـ ۲ : اندازه‌ی شدت فرایند پواسون را با $\mu(B)$ نشان می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu(B) = \int_B \rho(\xi)\, d\xi \quad , \quad B \subseteq S$$

که در آن B کراندار و اندازه‌ی $\mu(B)$ متناهی موضعی است.

تعریف ۱ـ۶ ـ۳ : گیریم μ یک اندازه‌ی متناهی موضعی و منتشر روی فضای S باشد. فرایند نقطه‌ای X روی S را یک فرایند پواسون با تابع شدت ρ گوییم هرگاه در دو شرط زیر صدق کند.

الف ـ برای هر $B \in \mathcal{B}$، متغیر تصادفی $N(B)$ دارای توزیع پواسون با میانگین $\mu(B)$ است. (هرگاه $\mu(B) = 0$ در این صورت $N(B) = 0$ ، یعنی متغیر تصادفی $N(B)$ در صفر تباهیده شده است).

ب ـ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $B \subseteq S$ که $0 < \mu(B) < \infty$، به شرط $\{N(B) = n\}$، X_B یک فرایند نقطه‌ای دو جمله‌ای n– نقطه‌ای روی B با چگالی $f(\xi) = \rho(\xi)/\mu(B)$ است که به صورت زیر می‌نویسیم:

$$X_B | N(B) = n \sim \text{Binomial}\,(B, n, \rho(\xi)/\mu(B)).$$

در این صورت می‌گوییم $X \sim \text{Poisson}\,(S, \rho)$ ([۹]).

برای هر مجموعه‌ی کراندار $B \subseteq S$، μ تعداد نقاط مورد انتظار در B است، یعنی $E[N(B)] = \mu(B)$.

تعریف ۱ـ۶ ـ۴ : فرایند نقطه‌ای پواسون X را همگن با شدت (نرخ) ρ می‌نامیم. هرگاه ρ ثابت باشد. در غیر این صورت فرایند نقطه‌ای پواسون را ناهمگن می‌گوییم.

تعریف ۱ـ۶ ـ۵ : هرگاه $X \sim \text{Poisson}(S, 1)$. در این صورت X را فرایند نقطه‌ای پواسون استاندارد یا فرایند پواسون با شدت واحد می‌نامند.

تذکر ۱ـ۶ ـ ۱ یک فرایند نقطه‌ای پواسون همگن، مانا و همسانگرد نیز می‌باشد.

در بعضی کتابها و مقاله‌ها به جای شرط ب ـ در تعریف ۱ ـ ٦ ـ۳، شرط زیر را جایگزین می‌کنند.

هرگاه برای $n \geq ۲$ ، $B_۱$، ...،B_n مجموعه‌های مجزا باشند، متغیرهای تصادفی $N(B_۱)$ ،...،$N(B_n)$ از یکدیگر مستقل هستند.

قضیه‌ی زیر بیانگر یکی از ویژگی‌های فرایند پواسون است. فرایند پواسون تنها فرایندی است که دارای ویژگی تصادفی بودن کامل فضایی[1] است.

قضیه ۱ـ۶ ـ ۱ فرض کنیم X یک فرایند نقطه‌ای پواسون روی S باشد و $B_۱$ و $B_۲$ و...مجموعه‌های مجزا در S باشند. در این صورت $X_{B_۱}$، $X_{B_۲}$،... از یکدیگر مستقل هستند.

برهان: به [۹] مراجعه شود.

۱ـ۶ـ۱ مشخص‌سازی فرایند نقطه‌ای پواسون

ساده‌ترین ابزار مشخص سازی فرایند پواسون، تابع پوچی آن است چون تابع احتمال پوچی آن فرم بسته‌ای دارد.

یک فرایند نقطه‌ای پواسون با اندازه‌ی شدت μ، دارای احتمال پوچی به فرم $P\{N(B) = ۰\} = e^{-\mu(B)}$ است.

به طور مشابه، اگر $X_۱$ و $X_۲$ دو فرایند پواسون روی S با اندازه‌های شدت به ترتیب $\mu_۱$ و$\mu_۲$ و از یکدیگر مستقل باشند، توزیع ($X_۱$ و $X_۲$) به طور یکتا به وسیله‌ی تابع احتمال پوچی زیر مشخص می‌شود.

$$P(x_۱ \cap A = \phi \, , \, x_۲ \cap B = \phi) = \exp(-\mu_۱(A) - \mu_۲(B))$$

1 -Completely spatial randomness

که در آن مجموعه‌های A و B کراندار و زیر مجموعه‌ی S هستند ([۹]).

بنابر شرط الف ـ در تعریف ۱ـ۶ ـ ۳، $N(B)$ دارای توزیع پواسون با میانگین $\mu(B)$ است. در نتیجه $P(N(B)=0)=\exp(-\mu(B))$ و طبق قضیه ۱ـ۳ ـ ۱، تابع احتمال پوچی به طور یکتا توزیع فرایند را مشخص می‌کند.

بنابراین شرط الف ـ در تعریف ۱ـ ۶ ـ۳، به تنهایی فرایند پواسون را مشخص‌سازی می‌کند که در قضیه زیر به آن می‌پردازیم.

قضیه ۱ـ۶ ـ ۲ فرایند نقطه‌ای X روی S ، یک فرایند نقطه‌ای پواسون است اگر و تنها اگر یک اندازه‌ی μ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $B\in\mathcal{B}_0$، متغیر تصادفی $N(B)$ دارای توزیع پواسون با پارامتر $\mu(B)$ باشد.

برهان : به [۲] مراجعه شود.

قضیه‌ی زیر وجود ویکتایی فرایند نقطه‌ای پواسون را بیان می‌کند.

قضیه ۱ـ۶ ـ ۳ یک فرایند نقطه‌ای یکتا وجود دارد که در دو شرط تعریف ۱ـ۶ ـ۳ صدق می‌کند و بنابراین یک فرایند نقطه‌ای پواسون با احتمال پوچی $e^{-\mu(B)}$ است.

برهان: به [۳] مراجعه شود.

حال تابعک مولد احتمال را برای فرایند پواسون به دست می‌آوریم که طبق قضیه‌ی ۱ـ۳ـ ۳ ، توزیع فرایند را مشخص می‌کند.

قضیه ۱ـ۶ ـ ۴ اگر $X\sim \text{Poisson}(S,\rho)$ ، آن گاه برای هر $u:S\to[0,1]$ داریم:

$$G_x(u)=\exp\left(-\int_S(1-u(\xi))\,\rho(d\xi)\right).$$

برهان : حالت خاصی از $u(\xi)$ را در نظر می گیریم که به صورت زیر است:

$$u(\xi) = ۱ - \sum_{i=۱}^{\infty} (۱ - a_i)\, ۱[\xi \in C_i]$$

که $۰ \le a_i \le ۱$ و $C_i \subseteq S$ مجموعه‌های کراندار و دو به دو مجزا هستند. (حالت کلی به وسیله‌ی برهان استاندارد در نظریه‌ی انتگرال لبگ[1] و قضیه‌ی همگرایی یکنوا[2] ثابت می‌شود).

$u(\xi)$ رفتاری شبیه تابع زیر دارد:

$$u(\xi) = \prod_{i=۱}^{\infty} a_i^{۱[\xi \in C_i]}.$$

هر دو تابع را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$u(\xi) = \begin{cases} a_i & \xi \in C_i \\ ۱ & \xi \notin C_i \end{cases}$$

از آنجا که هر دو تابع دامنه و برد یکسان دارند و مقادیر هر دو تابع به ازای یک ξ مشخص مساوی است بنابراین می‌توان تابع معرفی شده را به کار برد.

$$G_x(u) = E[\prod_{\xi \in x} u(\xi)] = E[\prod_{\xi \in x} \prod_{i=۱}^{\infty} a_i^{۱[\xi \in C_i]}]$$

$$= E[\prod_{i=۱}^{\infty} a_i^{N(C_i)}]$$

$$= \prod_{i=۱}^{\infty} E[a_i^{N(C_i)}] \qquad \text{قضیه همگرایی یکنوا}$$

$$= \prod_{i=۱}^{\infty} \exp[-(۱ - a_i)\mu(C_i)] \qquad N(C_i), N(C_i) \sim Poisson(\mu(Ci)) \text{ مستقل}$$

$$= \exp[-\sum_{i=۱}^{\infty} (۱ - a_i)\mu(C_i)]$$

$$= \exp\left[-\int (۱ - u(\xi))\rho(\xi) d\xi\right] \quad \blacksquare$$

1- Lebesgue integral
2- Monotone convergence theorem

قضیه‌ی زیر توزیع فرایند پواسون ارائه می‌کند.

قضیه ۱ـ۶ ـ ۵ فرض کنیم X یک فرایند نقطه‌ای روی S و μ یک اندازه‌ی منتشر باشد. در این صورت $X \sim Poisson(S,\rho)$ اگر و تنها اگر برای $B \subseteq S$ که $\mu(B) = \int_S \rho(\xi)\, d\xi < \infty$ و هر $F \subseteq N_{f}$ داشته باشیم :

الف ـ $$P(X \in F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\mu(B))}{n!} \int_B \dots \int_B 1[\{x_1,\dots,x_n\} \in F] \prod_{i=1}^{n} \rho(x_i)\, dx_1 \dots dx_n$$

(۱.۶.۱)

ب ـ اگر $X \sim Poisson(S,\rho)$ آن‌گاه برای توابع $h : N_{f} \to [0,\infty)$ که $B \subseteq S$ داریم:

$$E[\, h(X_B)\,] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\mu(B))}{n!} \int_B \dots \int_B h(\{x_1,\dots,x_n\}) \prod_{i=1}^{n} \rho(x_i)\, dx_1 \dots dx_n .$$

برهان:

الف ـ فرض کنیم $X \sim Poisson(S,\rho)$. اگر $B \in \mathcal{B}$ و $\mu(B) < \infty$، از آنجا که $N(B)$ دارای توزیع پواسون با میانگین $\mu(B)$ است، برای هر $F \subseteq N_{f}$ داریم:

$$P(X_B \in F) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\, X_B \in F \mid N(B) = n \,\} P\{\, N(B) = n \,\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu(B)}}{n!} (\mu(B))^n P\{\, X_B \in F \mid N(B) = n \,\}$$

بنابر شرط ب ـ قضیه ۱ ـ ۶ـ ۳ داریم:

$$X_B \mid N(B) = n \sim Binomial\,(B, n, \frac{\rho(x)}{\mu(B)})$$

$$P(X_B \in F \mid N(B)=n) = \int_B \dots \int_B 1\left[\{x_1,\dots,x_n\} \in F\right] \frac{\rho(x_1)}{\mu(B)} \cdots \frac{\rho(x_n)}{\mu(B)}\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \frac{1}{(\mu(B))^n} \int_B \dots \int_B 1\left[\{x_1,\dots,x_n\} \in F\right] \rho(x_1) \dots \rho(x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$P(X_B \in F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\mu(B))}{n!} \int_B \dots \int_B 1\left[\{x_1,\dots,x_n\} \in F\right] \prod_{i=1}^{n} \rho(x_i)\, dx_1 \dots dx_n$$

به عکس فرض کنیم برای هر $B \in \mathcal{B}$ که $\mu(B) < \infty$ و هر $F \in \mathcal{N}_{1f}$ تساوی (۱.۶.۱) برقرار باشد . برای $B \in \mathcal{B}$ که $\mu(B) < \infty$ و $m \in \mathbb{N}_0$

$$\{N(B)=m\} = [X_B \in F_m]$$

که در آن $F_m \in \mathcal{N}_{1f}$ به صورت:

$$F_m = \{x \in N_{1f} : n(x) = m\}$$

تعریف می شود . بنابراین:

$$P[N(B) = m\} = P(X_B \in F_m)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu(B)}}{n!} \int_{B^n} 1[\{x_1,\dots,x_n\} \in F_m]\, \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n)$$

$$= \frac{e^{-\mu(B)}}{m!} \int_{B^m} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) = \frac{e^{-\mu(B)}}{m!} (\mu(B))^m .$$

لذا شرط الف - در مورد X برقرار است و بنابر قضیه ی ۱ــ۶ــ۲

$X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$.

ب) از برهان استاندارد استفاده می کنیم .

۱) فرض کنیم h تابع نشانگر باشد . یعنی:

$$h(X_B) = 1[X_B \in F].$$

در این صورت: