بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به...

پدر و مادر فداکار

و

همسر عزیزم

تشکر و قدردانی

به‌نام آنکه انسان را آفرید و او را اشرف مخلوقات قرار داد و به او قدرت تفکر، تصمیم‌گیری و توانایی بیان داد. خدای را شاکرم که این بنده حقیر را در تحصیل علم یاری فرمود و توانایی سپری کردن مدارج علمی را به اینجانب داد. امید است در آینده نیز بتوانم با مطالعه بیشتر و بالا بردن سطح آگاهی‌هایم پله‌های موفقیت و ترقی را پیموده و به همه اهدافی که در نظر دارم برسم.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر فداکارم که همیشه یار و یاورم بوده‌اند و همسرم که با تشویق‌ها و پشتیبانیهایش در طول این دو سال تحصیلم زحمات فراوانی برایم کشیدند و استاد راهنمایم جناب آقای دکتر احمدنسب بخاطر راهنمایهای ارزشمند و دلسوزانه و استاد مشاورم جناب آقای دکتر ساعدپناه و اساتید گرامی جناب آقای دکتر شانظری و جناب آقای دکتر قاسمی و نیز از همیاری و همدلی دوست عزیزم آقای عارف عطایی و همه اساتید و کارکنان دانشگاه کردستان نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم و از خداوند منان موفقیت این عزیزان را در تمامی مراحل زندگی خواستارم.

چکیده

در این پایان‌نامه تعدادی پیش‌بهبوددهنده مثلثی جدید برای مسائل نقطه‌زینی بر اساس تجزیه متقارن و مثلثی ST را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. علاوه بر این، تخمین‌هایی برای اعداد شرطی دستگاه‌های پیش‌بهبودشده به‌دست خواهد آمد و پارامترهای شبه‌بهینه را ارائه می‌کنیم. آزمایش‌های عددی ویژگی‌های پیش‌بهبوددهنده‌ها را نمایان و تأثیر آن‌ها بر همگرایی روش گرادیان مزدوج در حل دستگاه‌های پیش‌بهبودشده را تائید می‌کنند.

کلمات کلیدی: *تجزیه متقارن و مثلثی، پیش‌بهبوددهنده‌های مثلثی، مسائل نقطه‌زینی، عدد شرطی، روش گرادیان مزدوج.*

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

مقدمه

دستگاه نقطه‌زینی نامعین متقارن زیر را درنظر می‌گیریم

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

ویا

$$Ru = b \tag{۱}$$

که درآن $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$، $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $p \in \mathbb{R}^m$، $q \in \mathbb{R}^n$، $n \leqslant m$. این چنین مسائل نقطه‌زینی در مسائل کاربردی مختلفی رخ می‌دهد [۷، ۲۶، ۲۷]. روش‌های تکراری زیادی برای حل دستگاه (۱) وجود دارند. بنزی و همکاران [1] [۴] بررسی و مرور خوبی روی این روش‌ها انجام داده‌اند. چن و همکاران [2] روش‌هایی برای اعتبار سنجی جواب‌های این روش‌ها پیشنهاد کردند [۱۱، ۱۸]. روش گرادیان مزدوج (CG) یا نسخه پیش‌بهبودشده آن (PCG) توسط تبدیل دستگاه اصلی به یک دستگاه متقارن و معین‌مثبت در مراجع [۱، ۶، ۱۳، ۲۳، ۲۵] مورد بحث قرار گرفته‌اند. تجزیه متقارن و مثلثی ماتریس‌ها و برخی کاربردهای آن‌ها در مراجع [۱۲، ۱۴، ۲۱] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در مرجع [۲۵] سه پیش‌بهبوددهنده ST معرفی گردید. در این پایان‌نامه روش عمومی ساختن پیش‌بهبوددهنده‌های مثلثی بر اساس تجزیه ST از ماتریس بلوکی R در (۱) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به منظور افزایش نرخ همگرایی روش CG، پارامترهای شبه‌بهینه را برای تعدادی از پیش‌بهبوددهنده‌های ST به تفصیل مطالعه می‌کنیم. ترتیب و چیدمان موضوعات این پایان‌نامه به شرح زیر می‌باشد.

در فصل۱، به معرفی و یادآوری پیش‌نیازها و مقدماتی خواهیم پرداخت که در سایر قسمت‌های پایان‌نامه مورد نیاز هستند. فصل ۲، به معرفی تجزیه ST ماتریس‌ها می‌پردازد. در فصل ۳، روش ساخت پیش‌بهبوددهنده‌های ST مطرح خواهد شد و سپس پیش‌بهبوددهنده‌های ST جدید معرفی می‌گردند. در ادامه روش‌های CG و PCG مورد

[1] Benzi et al

[2] Chen et al

مطالعه قرار گرفته و پارامترهای شبه‌بهینه مطرح خواهند شد. در فصل ۴، نتایج عددی نشان می‌دهند که روش‌های CG یا PCG با پارامتر شبه‌بهینه خیلی خوب عمل می‌کنند.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل به بررسی مطالبی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیازمندیم. نمادهای استفاده شده در این پایان‌نامه معرفی خواهند شد و بعضی از قضایا و تعاریف مهم و اساسی استفاده شده در این پایان‌نامه را ارائه خواهیم کرد.

۱.۱ ماتریس‌ها

به منظور حفظ عمومیت، تمامی فضاهای مورد بحث در این پایان‌نامه را مختلط فرض می‌کنیم، مگر آنکه طور دیگری معرفی گردند. یک ماتریس مختلط A آرایه‌ای با $m \times n$ عضو مختلط

$$a_{ij},\ i = ۱, \cdots, m, \quad j = ۱, \cdots, n,$$

می‌باشد. مجموعه همه ماتریس‌های $m \times n$ یک فضای برداری مختلط را تشکیل می‌دهد که با $\mathbb{C}^{m\times n}$ نمایش داده می‌شود. هرگاه $n = ۱$، آنگاه $A \in \mathbb{C}^{m\times ۱}$ یک بردار ستونی می‌باشد و هرگاه $m = ۱$ آنگاه ماتریس $A \in \mathbb{C}^{۱\times n}$ یک بردار سطری نامیده می‌شود.

عملگرهای اصلی که روی ماتریس‌ها تعریف می‌شوند، بدین شرح هستند:

- جمع دو ماتریس: جمع دو ماتریس A و B ماتریسی مانند C می‌باشد که به‌صورت $C = A + B$ نشان داده می‌شود و در آن $A = (a_{ij})$، $B = (b_{ij})$ و $C = (c_{ij})$ ماتریس‌هایی با اندازه $m \times n$ هستند و

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = ۱, ۲, \cdots, m, \quad j = ۱, ۲, \cdots, n.$$

- ضرب عدد در ماتریس: ضرب عدد α در ماتریس A ماتریسی مانند C می‌باشد که به‌صورت $C = \alpha A$

نشان داده می‌شود که درآن

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = ۱, ۲, \cdots, m, \quad j = ۱, ۲, \cdots, n.$$

- ضرب دو ماتریس: ضرب ماتریس A در ماتریس B ماتریسی مانند C می‌باشد که به‌صورت $C = AB$ نشان داده می‌شود که درآن $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$ و $C \in \mathbb{C}^{m\times p}$

$$c_{ij} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = ۱, \cdots, m, \quad j = ۱, \cdots, p.$$

تعریف ۱.۱.۱. اگر $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $p \times q$ باشد، ضرب کرونکر دو ماتریس A و B که به‌صورت $A \otimes B$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{۱۱}B & a_{۱۲}B & \cdots & a_{۱n}B \\ a_{۲۱}B & a_{۲۲}B & \cdots & a_{۲n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱}B & a_{m۲}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

تعریف ۲.۱.۱. ترانهاده[۱] ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ماتریسی مانند $C \in \mathbb{C}^{n\times m}$ می‌باشد به طوری که

$$c_{ij} = a_{ji}, \quad i = ۱, \cdots, n, \quad j = ۱, \cdots, m.$$

ترانهاده ماتریس A را با A^T نمایش می‌دهیم. ترانهاده مزدوج ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ که با A^* یا A^H نشان داده می‌شود نیز دارای تعریف زیر است:

$$A^* = A^H = \overline{A}^T = \overline{A^T}.$$

۱.۱.۱ انواع ماتریس‌ها

انتخاب روشی برای حل عددی مسائل جبرخطی اغلب به ساختار ماتریس وابسته است. در زیر برخی از ساختارهای ویژه‌ی ماتریس‌ها آمده است که در آن میان خاصیت تقارن از معروفیت بیشتری برخوردار است:

- ماتریس متقارن[۲]: ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را متقارن گوییم هرگاه $A^T = A$.

- ماتریس هرمیتی[۳]: ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را هرمیتی گوییم هرگاه $A^H = A$.

[۱] Transpose
[۲] Symmetric
[۳] Hermitian

- ماتریس پاد[۴]متقارن: ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را پادمتقارن گوییم هرگاه $A^T = -A$.

- ماتریس پادهرمیتی: ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را متقارن گوییم هرگاه $A^H = -A$.

برخی دیگر از ماتریس‌های با ساختار خاص وجود دارند به گونه‌ای که برای بعضی اهداف محاسباتی مناسب‌اند و نقش مهّمی در تحلیل‌های عددی و کاربردهای محاسباتی بازی می‌کنند. از جمله این ماتریس‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ماتریس مربعی [۵] : یک ماتریس مربعی است اگر تعداد سطرها و ستونهای آن با هم برابر باشند.

- ماتریس پایین‌مثلثی [۶]: ماتریس مربعی A را پایین‌مثلثی گویند هرگاه به ازای $i < j$، $a_{ij} = ۰$. ماتریس پایین‌مثلثی را با L نمایش می‌دهند.

- ماتریس بالامثلثی [۷]: ماتریس مربعی A را بالامثلثی گویند هرگاه به ازای $i > j$، $a_{ij} = ۰$. ماتریس بالامثلثی را با U نمایش می‌دهند.

- ماتریس قطری [۸] : ماتریس مربعی D را قطری گویند هرگاه به ازای $i \neq j$، داشته باشیم $d_{ij} = ۰$. واضح است که ماتریس قطری هم بالامثلثی و هم پایین‌مثلثی است.

- ماتریس همانی [۹] : ماتریس مربعی قطری $A = (a_{ij})$ را همانی گویند هرگاه :

$$a_{ij} = \begin{cases} ۰ & if \quad i \neq j \\ ۱ & if \quad i = j \end{cases}$$

- ماتریس p -دوری [۱۰]: ماتریس مربعی A، p -دوری است هرگاه تمام درایه‌های آن بجز درایه‌های روی قطر اصلی و درایه‌های زیر قطر اصلی و درایه $a_{۱p}$ صفر باشند.

- ماتریس سه‌قطری: ماتریس مربعی A را سه‌قطری[۱۱] گویند هرگاه به ازای هر i و j که $|i - j| > ۱$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$.

---

[۴] Skew

[۵] Square matrix

[۶] Lower triangular matrix

[۷] Upper triangular matrix

[۸] Diagonal matrix

[۹] Identity matrix

[۱۰] p-cyclic matrix

[۱۱] Tridiagonal matrix

- ماتریس بلوکی: ماتریسی که هر عنصر آن با یک ماتریس جایگزین شود ماتریس بلوکی نامیده می‌شود.

- ماتریس قطری بلوکی: ماتریسی قطری که هر عنصر قطری آن با یک ماتریس جایگزین شود ماتریس قطری بلوکی نامیده می‌شود که به‌صورت زیر نشان داده می‌شود

$$A = diag(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{nn}).$$

- ماتریس تُنک[12]: ماتریس A را تُنک گویند هرگاه اکثر درایه‌های آن صفر باشند.

- ماتریس چگال[13]: ماتریس A را چگال گویند هرگاه اکثر درایه‌های آن ناصفر باشند.

- ماتریس متعامد[14]: ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را متعامد گویند هرگاه

$$A^T = A^{-1} \text{ یا } AA^T = A^T A = I.$$

- ماتریس یکانی[15]: ماتریس مربعی A با درایه‌های مختلط را یکانی نامند هرگاه $A^H = A^{-1}$.

- ماتریس مربعی $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ را معین‌مثبت [16] گویند هرگاه به ازای هر $o \neq x \in \mathbb{C}^m$ داشته باشیم:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$$

و اگر $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ آنگاه A را نیمه معین‌مثبت[17] گویند.

- ماتریس مربعی $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ را معین منفی[18] گویند هرگاه به ازای هر $o \neq x \in \mathbb{C}^m$ داشته باشیم:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$$

و اگر $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$ آنگاه A را نیمه معین منفی[19] گویند.

---
[12] Sparse
[13] Dense
[14] Orthogonal
[15] Unitary
[16] Positive definite matrix
[17] Positive semi-definite matrix
[18] Negative definite matrix
[19] Negative semi-definite matrix

برخی ویژگی‌ها و مشخصه‌های ماتریس‌های معین‌مثبت

۱. ماتریس A معین‌مثبت است اگر و تنها اگر همه‌ی مقادیر ویژه‌ی آن مثبت باشند.

۲. مجموع دو ماتریس معین‌مثبت، معین‌مثبت است.

۳. اگر $A = (a_{ij})$ معین‌مثبت باشد، آنگاه برای هر i، $a_{ii} > ۰$.

۴. برای ماتریس معین‌مثبت $A = (a_{ij})$، بزرگترین عضو در کل ماتریس روی قطر اصلی واقع است.

معکوس یک ماتریس

ماتریس مربعی A از مرتبه‌ی n را وارون پذیر گویند، هرگاه ماتریسی مانند B چنان یافت شود که

$$AB = BA = I_n.$$

در این صورت B را وارون A نامیده و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهند.

دترمینان یک ماتریس

دترمینان یک ماتریس به چندین روش قابل تعریف است، دترمینان یک ماتریس ۱×۱ ، $A = (a)$ برابر عدد a است. یکی از راه‌های تعیین دترمینان یک ماتریس $n \times n$ به‌صورت زیر می‌باشد

$$\det(A) = \sum_{j=۱}^{n} (-۱)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

که در آن A_{ij} یک ماتریس $(n-۱) \times (n-۱)$ است که با حذف سطر iام وستون jام A به‌دست می‌آید. این روش برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس A با استفاده از سطر iام ماتریس A می‌باشد. دترمینان A می‌تواند به طور مشابه با استفاده از سطرها و یا ستون‌های دلخواه A محاسبه گردد. یک ماتریس را منفرد گوییم وقتی $det(A) = ۰$، در غیر اینصورت آن را نامنفرد گوییم.

۲.۱ نرم برداری و نرم ماتریسی

۱.۲.۱ نرم برداری

نرم را می‌توان تعمیمی از مفهوم طول در نظر گرفت. در روش‌های تقریبی هدف این است که جواب تقریبی را محاسبه نموده و همزمان تفاوت بین جواب واقعی و جواب تقریبی را به‌دست آوریم. مفهوم اندازه و فاصله در یک

فضای برداری با استفاده از ایده نرم قابل تعریف است. نرم، تابعی حقیقی مقدار به‌صورت $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد که مقدار حقیقی طول یک بردار را تعیین می‌کند. یک نرم برداری باید در شرایط زیر صدق کند:

۱. به ازای هر بردار $x \in \mathbb{C}$، $\|x\| \geq ۰$،

۲. $\|x\| = ۰$ اگر و فقط اگر $x = o$،

۳. به ازای هر $x, y \in \mathbb{C}^n$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

۴. به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in \mathbb{C}^n$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

در زیر برخی نرم‌های برداری که موارد استفاده‌ی فراوانی دارند معرفی می‌گردند:

۱. $\|x\|_۱ = \sum_{j=۱}^{n} |x_j|$، که آن را نرم-یک می‌نامند.

۲. $\|x\|_۲ = \left(\sum_{j=۱}^{n} x_j{}^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$، که آن را نرم-دو (یا نرم اقلیدسی) می‌نامند. نرم اقلیدسی یک بردار مختلط از ضرب داخلی زیر به‌دست می‌آید: $\|x\|_۲ = \langle x, x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$.

۳. $\|x\|_\infty = \max_{۱\leq j\leq n} |x_j|$، که آنرا نرم ماکزیمم یا نرم بی‌نهایت می‌نامند.

ویژگی هم ارزی در نرم‌های برداری

همه نرم‌های برداری فضاهای با بعد متناهی هم ارزند،یعنی ثابت‌های مثبت α و β وجود دارند که

$$\alpha\|x\|_\mu \leq \|x\|_\nu \leq \beta\|x\|_\mu.$$

برای نرم‌های $۱, ۲, \infty$ ، ثابت‌های α و β به‌صورت زیر می‌باشند [۱۶]:

$$\|x\|_۲ \leq \|x\|_۱ \leq \sqrt{n}\|x\|_۲,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_۲ \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_۱ \leq n\|x\|_\infty.$$

۲.۲.۱ نرم ماتریسی

تعریف ۱.۲.۱. یک نرم ماتریسی که بر مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n \times n$ مختلط تعریف می‌شود، یک تابع حقیقی مقدار مانند $\|\cdot\|$ است که به ازای تمام ماتریس‌های $n \times n$ مانند A و B و تمام اعداد حقیقی مانند α در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. $\|A\| \geq 0$،

۲. $\|A\| = 0$ اگر وفقط اگر $A = o$،

۳. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$،

۴. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$، $\|\cdot\|_m$ یک نرم برداری بر $\mathbb{C}^m$، $\|\cdot\|_n$ یک نرم برداری بر $\mathbb{C}^n$ باشد. نرم القا شده[۲۰] در $\mathbb{C}^{m\times n}$ از نرم‌های برداری $\mathbb{C}^m$ و $\mathbb{C}^n$ با تعریف زیر به‌دست می‌آید:

$$\|A\|_{(m,n)} = \max_{0\neq x\in\mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n}.$$

فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$ و $x \in \mathbb{C}^n$ آنگاه می‌توان نشان داد که [۱۶]،

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|,$$

$$\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|.$$

از دو ویژگی بالا می‌توان نتیجه گرفت که نرم‌های القا شده در ویژگی زیر صدق می‌کنند:

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p\|B\|_p, \quad p = 1, 2, \infty.$$

نرم‌های ۱ و ۲ و ∞ ماتریسی را می‌توان به‌ترتیب به کمک روابط زیر به‌دست آورد:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \quad \text{(نرم ماکزیمم مجموع ستون)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \quad \text{(نرم ماکزیمم مجموع سطر)}$$

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho\left(A^T A\right)},$$

که ρ در آن شعاع طیفی ماتریس $A^T A$ می‌باشد که در بخش ۴.۱ آمده است.

یکی از موارد مهم نرم ماتریسی که از نرم برداری استنتاج نمی‌شود، نرم فروبنیوس[۲۱] است، که برای $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ دارای تعریف زیر می‌باشد:

$$\|A\|_F = \left(\sum_i^m \sum_j^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

---
[۲۰] Induced

[۲۱] Frobenius

تعریف ۳.۲.۱. برای ماتریس بلوکی و متقارن

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}.$$

مکمل شور[۲۲] ماتریس A در X به‌صورت $S = C - B^T A^{-1} B$ تعریف می‌شود. شرط نامنفرد بودن A برای وجود S الزامی است.

از معین‌مثبت بودن X می‌توان معین‌مثبت بودن A و S را نتیجه گرفت.

بطور مشابه مکمل شور بلوک C در X عبارت است از $A - BC^{-1}B^T$، که در آن C نامنفرد است.

۳.۱ عدد شرطی مسئله

در یک نگاه کلی می‌توان یک مسئله را به عنوان تابعی مانند $f : X \longrightarrow Y$ از یک فضای برداری نرم دار X از داده‌ها به یک فضای برداری نرم دار Y از جواب‌ها معرفی کرد. این تابع f معمولاً (حتی در جبرخطی عددی) غیرخطی است، اما در اکثر اوقات پیوسته است. در زیر چند تعریف ارائه می‌گردد که در هر یک از آن‌ها منظور از f تابع اشاره شده در بالا می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۱. یک مسئله‌ی f را خوش وضع گوییم، هرگاه هر اغتشاش کوچک موجود در $x \in X$ منجر به تغییری کوچک در $f(x)$ گردد، در غیر این صورت مسئله‌ی f را بدوضع گوییم.

مفاهیم کوچک و بزرگ بودن در تعریف ۱.۳.۱ وابسته به نوع کاربرد آن است.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید که δx نمایانگر اغتشاشی کوچک از x باشد. با فرض $\delta f = f(x+\delta x) - f(x)$ عدد شرطی مطلق $\widehat{k} = \widehat{k}(x)$ برای مسئله‌ی f در x به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\widehat{k} = \lim_{\delta \to 0} \sup_{\delta x \leq \delta} \frac{\|\delta f\|}{\|\delta x\|}.$$

در بسیاری از مسائل، به دلیل این فرض که δx ها بسیار کوچک‌اند، حد سوپریمم در فرمول اخیر نادیده گرفته می‌شود و داریم $\widehat{k} = \sup_{\delta x} \frac{\|\delta f\|}{\|\delta x\|}$. از طرفی اگر f مشتق پذیر باشد، به شرح زیر می‌توان عدد شرطی مسئله‌ی f را ارزیابی کرد:

فرض می‌کنیم $J(x)$ ماتریس با درایه‌های $J(i,j) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ باشد. به عبارت دیگر $J(x)$ ماتریس ژاکوبین f در x

[۲۲] schur complement

باشد، اگر مشتق تا مرتبه‌ی اول منجر به فرمول تقریبی $\delta f \approx J(x)\delta x$ شود، در این صورت عدد شرطی مطلق به شکل $\|J(x)\| \approx \widehat{k}$ قابل نمایش است.

تعریف ۳.۳.۱. طبق مفروضات بیان شده در تعریف ۲.۳.۱عدد شرطی نسبی $k = k(x)$ به‌صورت زیر معرفی می‌گردد.

$$k = \lim_{\delta \to 0} \sup_{\delta x \leq \delta} \left(\frac{\|\delta f\|}{\|f(x)\|} / \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \right),$$

که تحت مفروضات بسیار کوچک بودن δx و δf به‌صورت زیر قابل نمایش است:

$$k = \sup_{\delta x} \left(\frac{\|\delta f\|}{\|f(x)\|} / \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \right).$$

چنان‌چه f مشتق پذیر باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$k = \frac{\|J(x)\|}{\|f(x)\|/\|x\|}.$$

تعریف ۴.۳.۱. عدد شرطی $k(A)$ برای ماتریس نامنفرد A نسبت به نرم $\|\cdot\|$ برابر است با

$$k(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$$

۴.۱ مسائل مقدار ویژه‌ی ماتریس‌ها

۱.۴.۱ مسئله مقدار ویژه‌ی استاندارد

مسئله مقدار ویژه استاندارد برای ماتریس مفروض $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$، عبارت است از یافتن اسکالرهای $\lambda \in \mathbb{C}$ و بردارهای ناصفر $x \in \mathbb{C}^n$ به طوری که $Ax = \lambda x$. عدد مختلط λ مقدار ویژه [۲۳] ماتریس مربعی A است و بردار غیر صفر x در $\mathbb{C}^n$ را بردار ویژه[۲۴] راست متناظر با مقدار ویژه λ گوییم.

تعریف ۱.۴.۱. عدد مختلط λ یک مقدار ویژه ماتریس A است اگر و فقط اگر ریشه‌ی چندجمله‌ای مشخصه $P(z)$ با تعریف زیر باشد:

$$P(z) = \det(zI - A).$$

[۲۳] Eigenvalue
[۲۴] Eigenvector

چندجمله‌ای $P\left(z\right)$ دارای n صفر نه لزوماً متمایز در $\mathbb{C}$ است. مجموعه تمام این صفرها را طیف A نامیده و با $\Lambda\left(A\right)$ نمایش داده می‌شود بدین شکل که

$$\Lambda\left(A\right)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\ P\left(\lambda\right)=0\right\}.$$

اگر λ مقدار ویژه $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ آنگاه $\overline{\lambda}$ یک مقدار ویژه از A^H است. بردار ویژه y از A^H متناظر با مقدار ویژه $\overline{\lambda}$ بردار ویژه چپ A نام دارد. مقدار ویژه λ و بردارهای ویژه راست و چپ، $x,y\neq 0$ در روابط زیر صدق می‌کنند

$$Ax=\lambda x,$$

$$y^HA=\lambda y^H.$$

شعاع طیفی ماتریس A عددی حقیقی و نامنفی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho\left(A\right)=\max\left\{|\lambda|;\lambda\in\Lambda\left(A\right)\right\}.$$

مجموع همه عناصر روی قطر ماتریس $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ تریس یا اثر[25] ماتریس نام دارد و با نماد tr به‌صورت زیر

$$tr\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

نمایش داده می‌شود.

اگر $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ مقادیرویژه ماتریس $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ (نه لزوماً متمایز) باشند، آنگاه

$$tr\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i,$$

و

$$\det\left(A\right)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

در ادامه اصطلاحاتی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. چندگانگی جبری [26] مقدار ویژه‌ی λی ماتریس A برابر است با مرتبه‌ی تکرار آن مقدار ویژه در چند جمله‌ای مشخصه‌ی متناظر با ماتریس A.

به عبارت دیگر اگر چند جمله‌ای مشخصه‌ی متناظر با ماتریس A به‌صورت

$$P(z)=(z-\lambda)^mP_1(z),\ P_1(\lambda)\neq 0,$$

باشد. در این صورت m چندگانگی جبری برای مقدار ویژه‌ی λ است.

[25] Trace
[26] Algebric multiplicity