وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم
گروه ریاضی کاربردی

**پایان نامه**

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان:

# حل معادلات انتگرالی به‌وسیله‌ی روش هم‌محلی سینک با استفاده از تبدیل نمایی

استاد راهنما

**دکتر ناصر آقازاده**

استاد مشاور

**دکتر محمدحسین ستاری**

پژوهشگر

**فرهاد قربانی**

شهریور/ ۱۳۹۰
تبریز/ ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

مادر و همسرم

# سپاس‌گزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر ناصر آقازاده، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر محمدحسن ستاری که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از کلیه استادهای گرامی دوران تحصیلم، که در مدت تحصیلات اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدسش را و تشکر می‌کنم از همسرعزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، بهترین پشتیبان من بود.

## چکیده

در این پایان‌نامه از یک تغییر متغیر که بر اساس توابع نمایی دوگان می‌باشد استفاده می‌کنیم و سپس با نوشتن بسط یک تابع بر اساس تابع سینک انتگرال‌های معین و نامعین را به صورت عددی حل می‌کنیم و در ادامه با بکاربردن همین روش در مورد قسمت انتگرالی معادلات انتگرالی نوع اول و دوم ولترا و نوع دوم فردهلم، معادله را می‌توان به صورت ساده‌تری نوشت سپس با بکاربردن روش هم‌محلی که در فصل اول همین پایان‌نامه به آن پرداخته شده است به حل عددی معادلات می‌پردازیم. در این روش میزان تقریبی تابع در نقاط هم‌محلی بدست می‌آید که با استفاده از درونیابی می‌توان برای جواب دقیق، تابعی تقریب زد.

**کلید واژه‌ها:** تبدیل نمایی دوگان، انتگرال‌گیری نامعین، انتگرال‌گیری معین، معادله‌ی انتگرال، روش سینک

# فهرست مطالب

# لیست جداول

# فصل ۱

# مقدمات

## ۱.۱ روش‌های تصویری

می‌خواهیم یک جواب تقریبی برای معادله‌ی انتگرالی زیر پیدا کنیم

$$\lambda u(x) - \int_D K(x,t)u(t)dt = g(x), \qquad x \in D \tag{۱.۱}$$

که در آن $g(x)$ و $K(x,t)$ توابع موجود هستند و $u(t)$ جواب معادله است که باید تعیین شود. با انتخاب خانواده‌ی از توابع با بعد متناهی، که مطمئن هستیم شامل تابع $\tilde{u}(t)$ نزدیک به جواب واقعی مساله یعنی $u(t)$ هست، جواب تقریبی $\tilde{u}(t)$ طوری انتخاب می‌شود که به طور تقریبی در معادله‌ی (۱.۱) صدق کند. دیدگاه‌های متفاوتی وجود دارد که می‌شود گفت $\tilde{u}(t)$ به طور تقریبی درمعادله‌ی (۱.۱) صدق می‌کند که این دیدگاه‌ها به روش‌های متفاوتی منجر می‌شود.

مهمترین این روش‌ها دو روش هم‌محلی [۱] و گالرکین [۲] هستند، که به بررسی این دو روش می‌پردازیم.

## ۲.۱ نظریه‌ی عمومی

معادله‌ی انتگرال (۱.۱) را به شکل عملگری به صورت $(\lambda - \mathcal{K})u = g$ می‌نویسیم و عملگر $\mathcal{K}$ را فشرده روی فضای باناخ $\mathcal{X}$ به $\mathcal{X}$ فرض می‌کنیم. در عمل یک دنباله با بعد متناهی $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$ برای $n \geq ۱$ که بعد $\mathcal{X}_n$ برابر $d_n$ است را انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathcal{X}_n$ دارای پایه‌ی $\{\phi_۱, ..., \phi_d\}$ باشد. برای سادگی

[۱] Collocation

[۲] Galerkin

قرار می‌دهیم $d = d_n$. $u_n \in \mathcal{X}_n$ با توجه به پایه‌های $\{\phi_۱, ..., \phi_d\}$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_n(x) = \sum_{j=d}^{d} c_j \phi_j(x), \qquad x \in D \tag{۲.۱}$$

با جایگذاری (۱.۱) و (۲.۱) ضرایب $\{c_۱, c_۲, ..., c_d\}$ با شرط دقیق بودن معادله در بعضی نقاط تعیین می‌شود. معرفی می‌کنیم:

$$r_n(x) = \sum_{j=۱}^{d} c_j \left\{ \lambda \phi_j(x) - \int_D K(x,t)\phi_j(t)dt \right\} - g(x), \qquad x \in D \tag{۳.۱}$$

وقتی که از تقریب $u \approx u_n$ استفاده می‌کنیم $r_n(x)$ باقیمانده‌ی تقریب نامیده می‌شود. به‌طور نمادین

$$r_n = (\lambda - \mathcal{K})u_n - g$$

ضرایب $\{c_۱, c_۲, ..., c_d\}$ با اعمال شرط صفر بودن $r_n(x)$ در بعضی جاها تعیین می‌شوند. انتظار داریم $u_n(x)$ یک تقریب خوب برای جواب واقعی $u(x)$ باشد.

## ۳.۱ روش هم‌محلی

در این روش نخست نقاط گره‌ای $\{x_۱, x_۲, ..., x_d\} \in D$ را در نظر می‌گیریم که در این نقاط داشته باشیم:

$$r_n(x_i) = ۰, \qquad i = ۱, ..., d_n$$

حال با این معادلات می‌توان $\{c_۱, c_۲, ..., c_d\}$ و در نهایت جواب دستگاه خطی زیر را :

$$\sum_{j=۱}^{d} c_j \{\lambda \phi_j(x_i) - \int_D K(x_i,t)\phi_j(t)dt\} = g(x_i), \qquad i = ۱, ۲, ..., d_n \tag{۴.۱}$$

بدست آورد.

سوالی که به ذهن می‌رسد این است که آیا این دستگاه جواب دارد، و اگر جواب دارد آیا این جواب منحصربفرد است، و اگر این طور است آیا $u_n$ به $u$ همگراست؟

یادآوری می‌کنیم که دستگاه خطی که دارای انتگرال است باید معمولا به صورت عددی محاسبه شود. با توجه به رابطه‌ی (۴.۱) عملگر تصویری $\mathcal{P}_n$ را که $\mathcal{X} = C(D)$ را به روی $\mathcal{X}_n$ می‌نگارد در نظر می‌گیریم، برای هر $x \in C(D)$ تعریف می‌کنیم عملگر تصویری $\mathcal{P}_n$ که $\mathcal{X} = C(D)$ را به $\mathcal{X}_n$ می‌نگارد. برای هر $u$ متعلق

به $C(D)$ تعریف می‌کنیم $\mathcal{P}_n u$ را برای عناصر $\mathcal{X}_n$ که $u$ درونیابی برای نقاط گره‌ای $\{x_۱, x_۲, ..., x_d\} \in D$ است، بدین معنی است که :

$$\mathcal{P}_n u(x) = \sum_{j=۱}^{d} \alpha_j \phi_j(x) \tag{۵.۱}$$

که ضرایب $\alpha_j$ به صورت زیر در حل دستگاه خطی بدست می آید:

$$\sum_{j=۱}^{d} \alpha_j \phi_j(x_i) = u(x_i), \qquad i = ۱, ..., d_n \tag{۶.۱}$$

دستگاه دارای جواب منحصربفرد است اگر داشته باشیم :

$$det[\phi_j(x_i)] \neq ۰$$

برای آنکه بهتر بفهمیم $\mathcal{P}_n$ خطی است و برای بدست آوردن روابط واضح، ما پایه‌ی جدیدی از توابع را باید معرفی کنیم. برای هر $i$ که $۱ \leq i \leq d_n$ در نظر بگیرید $\ell \in \mathcal{X}_n$ که عناصر آن از شرایط درونیابی زیر بدست می‌آید:

$$\ell(x_j) = \delta_{ij}, \qquad j = ۱, ..., d_n$$

با توجه به $det[\phi_j(x_i)] \neq ۰$، یک $\ell_i$ منحصر بفرد وجود دارد و مجموعه‌ی $\{\ell_۱, ..., \ell_d\}$ یک پایه جدید برای $\mathcal{X}_n$ است. که این $\ell_i$ ها را توابع پایه‌ای لاگرانژ می‌نامیم و از این توابع همراه با تمامی انواع زیرفضاهای تقریب $\mathcal{X}_n$ استفاده خواهیم کرد و با این پایه‌ی جدید می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathcal{P}_n u(x) = \sum_{j=۱}^{d} u(x_j) \ell_j(x), \qquad x \in D \tag{۷.۱}$$

**دلیل:**

چون $\mathcal{P}_n u(x)$ درونیاب $u(x)$ است پس شرط درونیابی،

$$\mathcal{P}_n u(x_i) = u(x_i), \qquad i = ۱, ۲, ..., d_n$$

برقراراست. از طرفی $\ell_j(x)$ پایه‌ی $\mathcal{X}_n$ می‌باشد لذا داریم:

$$\mathcal{P}_n u(x) = \sum_{j=۱}^{d} \alpha_j \ell_j(x)$$

و چون مقدار $\ell_j(x_i)$ وقتی که $i=j$ است برابر یک می‌باشد یعنی $\ell_j(x_i)=1$ و چون $\mathcal{P}_n u(x_i)=u(x_i)$ پس $\alpha_j=u(x_j)$ در نتیجه،

$$\mathcal{P}_n u(x)=\sum_{j=1}^{d} u(x_j)\ell_j(x)$$

همچنین داریم $\mathcal{P}_n$ خطی و دارای رتبه‌ی متناهی است،

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n(\alpha u(x)+\beta g(x)) &= \sum_{j=1}^{d}\left(\alpha u(x_j)+\beta g(x_j)\right)\ell_j(x)\\ &= \alpha\sum_{j=1}^{d} u(x_j)\ell_j(x)+\beta\sum_{j=1}^{d} g(x_j)\ell_j(x)\\ &= \alpha\mathcal{P}_n u(x)+\beta\mathcal{P}_n g(x)\end{aligned}$$

علاوه بر این یک عملگر است از $C(D)$ به $C(D)$ و

$$\|\mathcal{P}_n\|=\max\sum_{j=1}^{d}|\ell_j(x)|$$

**دلیل:**

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}_n u(x)\| &= \|\sum_{j=1}^{d} u(x_j)\ell_j(x)\|\\ &\le \sum_{j=1}^{d}\|u(x_j)\|\|\ell_j(x)\|\\ &\le \sum_{j=1}^{d}\|u(x)\|\|\ell_j(x)\|\\ &= \|u(x)\|\sum_{j=1}^{d}\|\ell_j(x)\|\\ &= \|u(x)\|\sum_{j=1}^{d}\max_{x\in D}|\ell_j(x)|\\ &= \max_{x\in D}\sum_{j=1}^{d}|\ell_j(x)|\|u(x)\| \qquad (8.1)\end{aligned}$$

و برای $\|u_0(x)\|=1$ داریم:

$$\|\mathcal{P}_n u_0(x)\| = \|\sum_{j=1}^{d} 1\times\ell_j(x)\|$$

$$= \quad ۱ \times \max_{x\in D}\sum_{j=۱}^{d}|\ell_j(x)| = k.\underbrace{\|u_۰(x)\|}_{۱} \qquad (۹.۱)$$

با توجه به (۸.۱) و (۹.۱) داریم:

$$\|\mathcal{P}_n\| = \max\sum_{j=۱}^{d}|\ell_j(x)|$$

## ۱.۳.۱ مثال‌های عددی

**مثال ۱.۱.** *معادله‌ی زیر را حل کنید.*

$$u(x) - \int_{-۱}^{۱}(xt + x^۲t^۲)u(t)dt = (x+۱)^۲$$

**حل:**

*اگر پایه را به صورت $\{۱, x, x^۲\}$ در نظر بگیریم، جواب بایستی به فرم زیر باشد:*

$$u_۳(x) = c_۱ + c_۲x + c_۳x^۲$$

*که باید ضرایب $\{c_۱, c_۲, c_۳\}$ را بدست آوریم، اگر $u_۳(t)$ را در معادله جایگذاری کنیم داریم :*

$$c_۱ + c_۲x + c_۳x^۲ - \left[\frac{۲}{۱۵}x(۵xc_۱ + ۵c_۲ + ۳xc_۳)\right] = x^۲ + ۲x + ۱$$

*پس از ساده کردن داریم:*

$$x^۲\,(۱۵ + ۱۰c_۱ - ۹c_۳) - ۵x\,(c_۲ - ۶) - ۱۵\,(c_۱ - ۱) = ۰,$$

*با قرار دادن $x = ۰$ و $x = ۱$ و $x = -۱$ داریم:*

$$c_۱ = ۱, \quad c_۲ = ۶, \quad c_۳ = \frac{۲۵}{۹}$$

*پس جواب معادله به صورت زیر است:*

$$u(x) = \frac{۲۵}{۹}x^۲ + ۶x + ۱$$

*در این مثال جواب تقریبی با جواب دقیق برابر است.*

**مثال ۲.۱.** معادله‌ی زیر را با روش هم‌محلی حل کنید.

$$u(x) - ۶۰ \int_۰^۱ xt^۲ + x^۲tu(t)dt = \sqrt{۱ - x} - \frac{۶}{۱۷}x(۴ + x)$$

جواب دقیق این مساله

$$u(x) = \sqrt{۱ - x}$$

است. اکنون اگر پایه را $\{۱, x, x^۲\}$ در نظر بگیریم، شکل کلی جواب معادله به این صورت است:

$$u_۳(x) = c_۰ + c_۱x + c_۲x^۲$$

است. باجایگذاری در معادله بالا و با انتخاب مقدار $x$ بین صفر و یک خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x &= ۰ \Longrightarrow c_۰ - ۱ = ۰ \Rightarrow c_۰ = ۱, \\ x &= \frac{۳}{۴} \Longrightarrow \frac{۱}{۵۶}\{-۸۶۹ - ۱۲۱۸c_۱ - ۹۴۵c_۲\} = ۰, && (۱۰.۱) \\ x &= \frac{۱۶}{۲۵} \Longrightarrow -\frac{۲}{۴۳۷۵}\{۲۶۸۶۹ + ۳۷۵۲۰c_۱ + ۲۹۳۴۴c_۲\} = ۰, && (۱۱.۱) \end{aligned}$$

با حل (۱۰.۱) و (۱۱.۱) به صورت دستگاه، خواهیم داشت:

$$c_۱ = -\frac{۲۲۱۹}{۵۸۰۸} \qquad c_۲ = -\frac{۸۶۸۳}{۲۰۳۲۸}$$

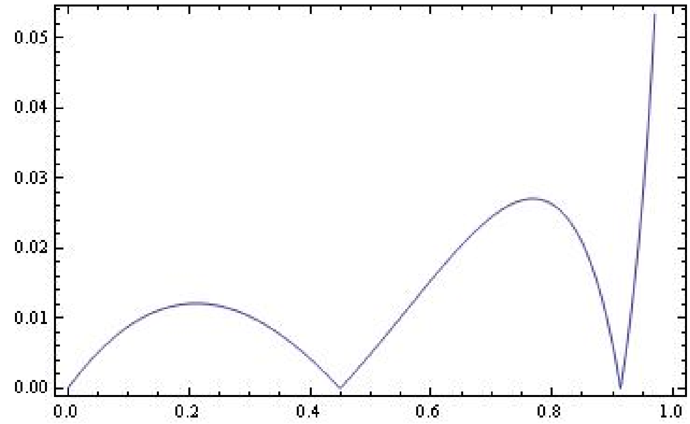
پس جواب تقریبی به صورت زیر است:

$$u(x) \approx u_۳(x) = ۱ - \frac{۲۲۱۹}{۵۸۰۸}x - \frac{۸۶۸۳}{۲۰۳۲۸}x^۲$$

نمودار خطای این مسئله برای پایه‌ی ۳ در شکل ۱.۱ آمده است. حال اگر پایه را $\{۱, x, x^۲, x^۳, x^۴, x^۵\}$ انتخاب کنیم جواب تقریبی زیر را خواهیم داشت:

$$u_۶(x) = ۱ - ۰/۴۹۵۱۳۷x - ۰/۱۰۷۳۶x^۲ - ۰/۲۸۱۸۷۴x^۳ + ۰/۳۸۷۴۲۷x^۴ - ۰/۳۵۱۲۹۷x^۵$$

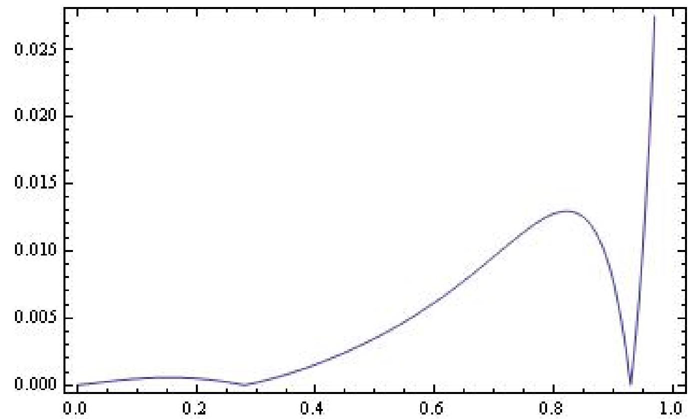
همچنین میزان این خطا در هر دو پایه در جدول ۱.۱ آمده است و نمودار میزان خطای $u_۶$ در این مثال در شکل ۲.۱ آمده است.




**شکل ۱.۱:** نمودار خطای با انتخاب با بعد ۳ $= n$

| مقدار $x$ | میزان خطای $u_۳$ | میزان خطای $u_۶$ |
|---|---|---|
| ۰/۲۵ | ۰/۰۱۱۷۶۳۲ | $۲/۴۶۴۲۱ \times ۱۰^{-۴}$ |
| ۰/۵ | $۴/۹۲۲۶ \times ۱۰^{-۳}$ | $۳/۵۱۳۳ \times ۱۰^{-۳}$ |
| ۰/۷ | ۰/۰۲۴۴۶۵ | $۹/۶۲۸۸۲ \times ۱۰^{-۳}$ |
| ۰/۸ | ۰/۰۲۶۲۳۳۷ | ۰/۰۱۲۷۷۵۹ |
| ۰/۹ | $۶/۰۶۸۳۸ \times ۱۰^{-۳}$ | $۷/۵۴۵۳ \times ۱۰^{-۳}$ |

**جدول ۱.۱:** میزان خطای دو تقریب با بعدهای ۳ و ۶




**شکل ۲.۱:** نمودار خطای با انتخاب با بعد ۶ $= n$

## ۴.۱ روش گالرکین

$\mathcal{X} = L^{۲}(D)$ یا هر فضای هیلبرت را در نظر بگیرید $(.,.)$ که بیان کننده‌ی ضرب داخلی در $\mathcal{X}$ است، با این تفاصیل برای $r_n$ داریم:

$$(r_n, \phi_i) = ۰, \qquad i = ۱, ..., d_n \tag{۱۲.۱}$$

که در سمت چپ ضرایب فوریه $r_n$ را براساس $\phi_i$ داریم. اگر $\{\phi_۱, ..., \phi_d\}$ اعضای خانواده‌ی متعامد یکه $\Phi = \{\phi_۱, ..., \phi_d, ...\}$ باشند که این پایه در $\mathcal{X}$ کامل است. آنگاه با توجه به (۱۲.۱) مورد نیاز است که مقدار بسط $r_n$ باید برابر صفر شود. برای یافتن $u_n$، با اعمال (۱۲.۱) و

$$r_n(x) = \sum_{j=۱}^{d} c_j \{\lambda \phi_j(x) - \int_D K(x,t)\phi_j(t)dt\} - g(x), \qquad x \in D$$

دستگاه خطی زیر بدست می آید:

$$\sum_{j=۱}^{d} c_j \left\{\lambda(\phi_j, \phi_i) - (\mathcal{K}\phi_j, \phi_i)\right\} = (g, \phi_i), \qquad i = ۱, ..., d_n \tag{۱۳.۱}$$

روش فوق را روش گالرکین می‌گوییم برای یافتن جواب تقریبی معادله

$$\lambda u(x) - \int_D \mathcal{K}(x,t)u(t)dt = g(x), \qquad x \in D \tag{۱۴.۱}$$

است.

حال این سوالات مطرح است: آیا سیستم دارای جواب است؟ درصورت وجود آیا یکتاست؟ آیا دنباله‌ی جواب های تقریبی $u_n$ به $u$ در $\mathcal{X}$ است؟ آیا دنباله همگرا به $u$ در $C(D)$ است؟

فرمول بالا دارای انتگرال دوگانه است، زیرا داریم:

$$(\mathcal{K}\phi_j, \phi_i) = \int_D \left[\int_D \mathcal{K}(x,t)\phi_j(t)dt\right] \phi_i(t)dt$$

که این رابطه معمولا به صورت عددی محاسبه می‌شود. با توجه به قسمت (۱۳.۱) برای نوشتن آن، به طور خلاصه‌تر عملگر تصویری $\mathcal{P}_n$ را که $\mathcal{X}$ را به $\mathcal{X}_n$ می‌نگارد معرفی می‌کنیم. برای $u \in \mathcal{X}$، $\mathcal{P}_n$ را جواب مسئله مینیمم سازی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|u - \mathcal{P}_n u\| = \min_{z \in \mathcal{X}_n} \|u - z\| \tag{۱۵.۱}$$

چون $\mathcal{X}_n$ متناهی است بعداً نشان می‌دهیم که این مساله جواب دارد و چون $\mathcal{X}_n$ فضای ضرب داخلی است می‌توان نشان داد که جواب منحصربفرد است. برای درک بهتر از $\mathcal{P}_n$ یک فرمول صریح از $\mathcal{P}_n$ ارائه می‌کنیم. بوسیله فرایند گرام اشمیت پایه‌ی جدید متعامد نرمال $\{\psi_۱, ..., \psi_d\}$ را که از روی پایه‌ی $\{\phi_۱, ..., \phi_d\}$ ساخته شده برای $\mathcal{X}_n$ معرفی می‌کنیم. عناصر $\psi_i$ یک ترکیب خطی از $\{\phi_۱, ..., \phi_d\}$ می‌باشد و علاوه بر این :

$$(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = ۱, ..., d_n$$

با این پایه جدید می‌توان مستقیما نشان داد که:

$$\mathcal{P}_n u = \sum_{i=۱}^{d} (u, \psi_i)\psi_i$$

و با این فرمول می‌توان روابط زیر را نشان داد:

$$\begin{aligned}
\|u\|^۲ &= \|\mathcal{P}_n u\|^۲ + \|u - \mathcal{P}_n u\|^۲, && (۱۶.۱)\\
\|\mathcal{P}_n u\|^۲ &= \sum_{i=۱}^{d} |(u, \psi_i)|^۲, && (۱۷.۱)\\
(\mathcal{P}_n u, y) &= (u, \mathcal{P}_n y), \qquad u, y \in \mathcal{X}, && (۱۸.۱)\\
((I - \mathcal{P}_n)u, \mathcal{P}_n y) &= ۰, \qquad u, y \in \mathcal{X}, && (۱۹.۱)
\end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{P}_n u$ را تصویر متعامد $u$ بر روی $\mathcal{X}_n$ می‌نامیم و عملگر $\mathcal{P}_n$ را عملگر تصویری متعامد می‌نامیم.
حال برای اثبات داریم:

در رابطه‌ی (۱۶.۱) داریم :

$$\begin{aligned}
\|u - \mathcal{P}_n u\|^۲ &= (u - \mathcal{P}_n u, u - \mathcal{P}_n u)\\
&= (u, u) - (u, \mathcal{P}_n u) - (\mathcal{P}_n u, u) + (\mathcal{P}_n u, \mathcal{P}_n u)\\
&= \|u\|^۲ + \|P_n u\|^۲ - (u, \mathcal{P}_n u) - (\mathcal{P}_n u, u)\\
&= \|u\|^۲ + \|P_n u\|^۲ - \|P_n u\|^۲ - \|\mathcal{P}_n u\|^۲\\
&= \|u\|^۲ - \|\mathcal{P}_n u\|^۲
\end{aligned}$$

اکنون دلیل تساوی دوم از زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}_n u\|^{2} &= \|\sum_{i=1}^{d}(u,\psi_i)\psi_i\|^{2} \\
&= (\sum_{i=1}^{d}(u,\psi_i)\psi_i, \sum_{i=1}^{d}(u,\psi_i)\psi_i) \\
&= ((u,\psi_1)\psi_1 + \ldots + (u,\psi_d)\psi_d, (u,\psi_1)\psi_1 + \ldots + (u,\psi_d)\psi_d) \\
&= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}((u,\psi_i)\psi_i, (u,\psi_j)\psi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}(u,\psi_i)(u,\psi_j)^*(\psi_i,\psi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{d}|(u,\psi_i)|^{2}
\end{aligned}$$

و برای اثبات یکی از موارد رابطه‌ی (۱.۱۶) داریم :

$$\begin{aligned}
(u,\mathcal{P}_n u) &= (u, \sum_{i=1}^{d}(u,\psi_i)\psi_i) \\
&= (u, (u,\psi_1)\psi_1 + \ldots + (u,\psi_d)\psi_d) \\
&= \sum_{i=1}^{d}(u,(u,\psi_i)\psi_i) \\
&= \sum_{i=1}^{d}(u,\psi_i)^*(u,\psi_i) \\
&= \sum_{i=1}^{d}|(u,\psi_i)|^{2} \\
&= \|\mathcal{P}_n u\|^{2}
\end{aligned}$$

وبه همین صورت داریم :

$$(\mathcal{P}_n u, u) = \|\mathcal{P}_n u\|^{2}$$

حال برای رابطه‌ی (۱.۱۸) داریم:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}_n u, y) &= \left(\sum_{i=1}^{d}(u,\psi_i), y\right) \\
&= \sum_{i=1}^{d}(u,\psi_i)(\psi_i, y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{d}(\psi_i, y)(u, \psi_i) \\
&= (u, \sum_{i=1}^{d}(\psi_i, y)\psi_i) \\
&= (u, \mathcal{P}_n y)
\end{aligned}
$$

و برای اثبات (۱.۱۹) داریم:

$$
\begin{aligned}
((I-\mathcal{P}_n)u, \mathcal{P}y) &= (\mathcal{P}_n(I-\mathcal{P}_n)u, y) \\
&= ((\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^2)u, y) \\
&= (0, y) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

از رابطه‌ی (۱.۱۶)

$$\|\mathcal{P}_n\| = 1,$$

با استفاده از (۱.۱۶)

$$\|\mathcal{P}_n u\|^2 = \|u\|^2 - \|u - \mathcal{P}_n u\|^2 \leq \|u\|^2,$$

همچنین مقدار $\|u_0 - \mathcal{P}_n u_0\|$ با فرض $u_0 = \sum_{j=1}^{d}\psi_j$ برابر صفر است چون :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_n u_0 &= \sum_{i=1}^{d}(u_0, \psi_i)\psi_i \\
&= \sum_{i=1}^{d}(\sum_{j=1}^{d}\psi_j, \psi_i)\psi_i \\
&= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}(\psi_j, \psi_i)\psi_i \\
&= \sum_{i=1}^{d}\psi_i = u_0
\end{aligned}
$$

چون $\|\mathcal{P}_n u_0 - u_0\| = 0$ و از روابط اخیر داریم :

$$\|\mathcal{P}_n u_0\|^2 = \|u_0\|^2 - \|\mathcal{P}_n u_0 - u_0\|^2 = \|u_0\|^2$$

بنابراین $\|\mathcal{P}_n u_0\| = 1.\|u_0\|$ و از روابط اخیر داریم:

$$
\begin{aligned}
\frac{\|\mathcal{P}_n u\|}{\|u\|} &\leq 1, \\
\sup \frac{\|\mathcal{P}_n u\|}{\|u\|} &\leq 1, \\
\|\mathcal{P}_n\| &\leq 1,
\end{aligned}
\tag{۲۰.۱}
$$

و داریم :

$$
\begin{aligned}
\frac{\|\mathcal{P}_n u_0\|}{u_0} &= 1 \\
1 \leq \sup \frac{\|\mathcal{P}_n u\|}{\|u\|} &= \|\mathcal{P}_n\|
\end{aligned}
\tag{۲۱.۱}
$$

با توجه به (۲۰.۱) و (۲۱.۱) داریم:

$$\|\mathcal{P}_n\| = 1$$

و با استفاده از (۱۹.۱) می‌توانیم نشان دهیم که:

$$\|u-z\|^2 = \|u-\mathcal{P}_n u\|^2 + \|\mathcal{P}_n u - z\|^2, \qquad z \in \mathcal{X}_n$$

**دلیل:**

$$
\begin{aligned}
\|u-\mathcal{P}_n u\|^2 + \|\mathcal{P}_n u - z\|^2 &= (x-\mathcal{P}_n u, u-\mathcal{P}_n u) + (\mathcal{P}_n u - z, \mathcal{P}_n u - z) \\
&= (u,u) - 2(u,\mathcal{P}_n u) + 2(u,\mathcal{P}_n^2 u) - 2(\mathcal{P}_n u, z) + (z,z) \\
&= (u,u) + (z,z) - 2(\mathcal{P}_n u, z) \\
&= 2(u,z) + (u-z, u-z) - 2(\mathcal{P}_n u, z) \\
&= ||u-z||^2 + 2((I-\mathcal{P}_n)u, z) \\
&= \|u-z\|^2 + 2((I-\mathcal{P}_n)u, \mathcal{P}_n y) \\
&= \|u-z\|^2
\end{aligned}
$$

که این نشان می‌دهد $\mathcal{P}_n u$ یک جواب منحصربفرد برای (۱۵.۱) است. زیرا:

$$\|u-\mathcal{P}_n u\|^2 = \|u-z\|^2 - \|\mathcal{P}_n u - z\|^2 \leq \|u-z\|^2 \qquad \forall z \in \mathcal{X}_n$$