تشکر و قدردانی

(مَن لَم یَشکُرُ المَخلوق، لَم یشکُرُ الخالِق)

خدای را سپاس که گویندگان، به عرصهٔ ستایش او نمی‌رسند و شماره‌گران از عهدهٔ شمردن نعمت‌هایش برنیایند، خدایی که اندیشه‌های بلند او را درک ننمایند و هوش‌های ژرف به حقیقتش دست نیابند، اکنون که با یاری خداوند متعال، کار نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده است؛

بدین وسیله از اساتید بزرگوار و فرهیخته، اساتید راهنمایم جناب آقای دکتر سعید عباس بندی و جناب آقای دکتر داود رستمی که تجارب ارزشمندشان را در اختیار اینجانب قرار داده‌اند صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نمایم. بدون تردید بدون راهنمایی های ارزشمند ایشان تکمیل این پایان نامه امکان پذیر نبود. از خدای منّان سلامتی و پیشرفت و توفیق روز افزون را برایشان آرزومندم.

چکیده

در این پایان نامه یک روش شبه طیفی[1] برای معادلهٔ لین—امدن[2] که بسیاری از پدیده‌ها را در ریاضی فیزیک [3] و اخترفیزیک [4] مدلسازی می کند، ارائه خواهد شد. ما همچنین این روش را برای حل معادلهٔ گاز ناپایدار[5] که جریان ناپایدار یک گاز را مدلسازی می کند، استفاده می کنیم.
این ایده بر پایهٔ بعضی توابع متعامد[6]، استوار است و جواب این دسته مسائل را به جواب سیستمهای معادلات جبری کاهش می دهد. در محاسبات علمی اغلب نیاز داریم تا معادلات دیفرانسیل را در دامنه های بی کران به طور عددی حل کنیم. معمولاً بعضی کران های مصنوعی را وارد کرده و شرایط مرزی مصنوعی معینی را تحمیل می کنیم و سپس آنها را دوباره حل می‌کنیم.حال آنکه این رفتار خطاهای اضافی را سبب می شود. یکی از راه ها ی منطقی برای حل چنین مسائلی استفاده از روشهای طیفی یا روشهای شبه طیفی مرتبط به سیستم های متعامد چندجمله‌ای ها در دامنه های بی کران است.
کلید واژه: چندجمله‌ای های چبیشف، چندجمله‌ای های لاگوور تعمیم یافته، نقاط گاوسی، درونیابی گاوس—رادو

---

[1] Pseudospectral method
[2] Lane-Emden equation
[3] mathematical physics
[4] astrophsics
[5] unsteady gas equation
[6] orthogonal function

پیشگفتار

در مطالعهٔ مدلسازی نجوم و کیهان شناسی، یک مدل ریاضی مهم با معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم زیر شرح داده شده است:

$$y'' + ۲y' + xg(y) = ۰ \quad , \quad x > ۰ \qquad (۱.۰)$$

که در این معادله $g(y)$ بر حسب y داده می شود و با شرایط مرزی زیر همراه است:

$$y(۰) = ۱ \quad , \quad y'(۰) = ۰$$

یکی از معروفترین شکل های $g(y)$ به صورت $g(y) = y^m$ است، که اینرا معادلهٔ لین—امدن استاندارد می‌نامند.

این معادله ابتدا توسط لین[۷] شرح داده شد و مدتی بعد توسط امدن[۸] مطالعه شد.

معادلهٔ لین—امدن یک گسترهٔ وسیعی از پدیده‌ها را در فیزیک نظری و اخترفیزیک که شامل جنبه‌هایی از ساختار اختری، پیشینهٔ گرمایی ابر کروی گاز، کره‌های گاز عایق حرارتی و جریان گرمایونی است را در بر می گیرد [۲]. این معادله یکی از معادلات پایه‌ای در نظریهٔ ساختار اختری است و مطالعات بسیاری روی آن انجام شده است. آن نوسان دمای ابر کروی گاز زیر جاذبهٔ دوسویی مولکول هایش را شرح می دهد و به قوانین ترمودینامیک کلاسیک می پردازد.

نظریهٔ چند مداری ستارگان اساساً ملاحظات ترمودینامیکی که به موضوع انتقال انرژی از طریق

[۷] Lane
[۸] Emden

انتقال مواد بین سطوح مختلف ستاره مربوط است را به پایان رسانیده است.حالات جالب فیزیکی برای $\circ \leq m \leq ۵$ اتفاق می افتد. ادعا شده است که فقط برای $m = \circ, ۱, ۵$ جواب های معادلهٔ لین—امدن (که معادلات دیفرانسیل چندمداری نامیده می شود) در فرم بسته می تواند ارائه شود[۱۴].

در حقیقت برای $m = ۵$ فقط یک خانوادهٔ ۱−پارامتری از جواب ها، که معادلهٔ لین—امدن تعمیم‌یافته از نوع اول نامیده می شود، این موضوع توسط ژونر در [۴] و [۵] ارائه شده است.

همچنین معادله دیفرانسیل معمولی گاز ناپایدار به صورت زیر است:

$$y'' + \frac{۲xy'}{(۱-\alpha y)^{۱/۲}} = \circ \qquad x > \circ \quad , \quad \circ < \alpha < ۱ \qquad (۲.\circ)$$

ویژگی‌های فیزیکی شرایط مرزی خاصی را به آن تحمیل کرده است که عبارتند از :

$$y(\circ) = ۱ \quad , \quad y(\infty) = \circ$$

در این پایان نامه ابتدا مفاهیم اولیه و قضایای مقدماتی بحث شده و در فصل دوم به معرفی پایه‌های چبیشف و لاگوور و ویژگی های آنها و نقاط گاوس و گاوس—رادو پرداخته شده، در فصل سوم از توابع چبیشف گویا و لاگوور اصلاح شدهٔ تعمیم یافته و همگرایی و پایداری روشهای درونیابی آنها بحث شده و نهایتاً فصل آخر دو معادلهٔ لین—امدن و گاز ناپایدار را با این روشهای شبه طیفی حل کرده است.

فهرست مندرجات

فهرست جدول ها

فهرست شکل ها

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱—۱.۱ فرض کنیم A یک مجموعه باشد، نقطهٔ $a \in A$ را یک نقطهٔ درونی A می‌نامیم، درصورتی که گوی بازی مانند $S(a,r)$ بتوان یافت که جزء A باشد؛ مجموعه A را باز می‌نامیم درصورتی که هر نقطه آن درونی باشد.

تعریف ۱—۲.۱ برای هر بازهٔ (a,b)، اندازهٔ آنرا با $l(a,b)$ نشان می‌دهیم و برابر است با:
$l(a,b) = b - a$

تعریف ۱—۳.۱ اندازه بیرونی[۱]: برای هر مجموعهٔ A از اعداد حقیقی، یک دسته شمارش‌پذیر $\{I_n\}$ از فاصله‌ی باز را در نظر می‌گیریم که A را می‌پوشاند، یعنی برای این دسته داریم: $A \subset \cup I_n$.
اندازه بیرونی A (m^*A)، به شکل بزرگترین کران پایین (inf) همهٔ این مجموعه‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m^*A = \inf \sum_{A \subset \cup I_n} l(I_n) \qquad (۱.۱)$$

از تعریف m^* نتیجه می‌شود که $m^*\phi = ۰$ و اگر $A \subset B$ باشد، آنگاه $m^*A \le m^*B$.

[۱] Exterior measure

تعریف ۱ــ۴.۱ مجموعهٔ E را اندازه پذیر[۲] می‌گوییم، هرگاه برای هر مجموعهٔ A داشته باشیم:

$$m^*A = m^*(A \cup E) + m^*(A \cup \tilde{E}) \quad (۲.۱)$$

تعریف ۱ــ۵.۱ تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع اندازه‌پذیر[۳] گوییم، در صورتی‌که به ازای هر مجموعهٔ باز $\mathbb{R}$ مانند o، $f^{-1}(o)$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر[۴] باشد.

تعریف ۱ــ۶.۱ شبه نرم:[۵] فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد،آنگاه عملگر $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ را یک نرم[۶] گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$۱. \quad \forall \alpha \in F\ ,\ \forall v \in V \qquad : \qquad \|\alpha v\| = |\alpha|.\|v\|$$

$$۲. \ \forall u, v \in V \qquad : \qquad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$۳. \quad \forall v \in V \qquad : \qquad \|v\| = ۰ \Rightarrow v = o$$

اگر شرط سوم برقرار نباشد، یعنی از اینکه $\|v\| = ۰$ نتوان نتیجه گرفت که $v = o$ ، آنگاه عملگر را شبه‌نرم می گوییم.

تعریف ۱ــ۷.۱ فرض کنیم $\Lambda \in \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز و از پایین کراندار، $۱ \leq p < \infty$ و تابع اندازه‌پذیر f روی Λ تعریف شده باشد. گوییم $f \in L^p(\Lambda)$، هرگاه رابطه زیر برقرار باشد:

$$\left(\int_\Lambda |\ f\ |^p \right) < \infty \quad (۳.۱)$$

و برای هر $f \in L^p(\Lambda)$ نرم آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_{L^p(\Lambda)} = \left(\int_\Lambda |\ f\ |^p \right)^{۱/p} \quad (۴.۱)$$

[۲] Measurable
[۳] Measurable function
[۴] Measurable set
[۵] Pseudonorm
[۶] Norm

فضای تمام تابع‌های اندازه‌پذیر روی Λ که به جز بر روی یک مجموعهٔ با اندازهٔ صفر کراندار هستند را با L^{∞} نشان می‌دهیم. L^{∞} یک فضای خطی نرم‌دار[۷] با نرم زیر است:

$$\|f\|_{L^{\infty}(\Lambda)} = ess \quad sup \mid f(t) \mid = inf\{M : \mid f \mid \leq M \quad a.e.\} \qquad (۵.۱)$$

تعریف ۱ — ۸.۱ فرض کنیم $\Lambda = \{x | \circ < x < \infty\}$ و $w(x)$ تابع وزن[۸] مربوط به آن باشد، $L^{۲}_{w}(\Lambda)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L^{۲}_{w}(\Lambda) = \Big\{ v | \quad \|v\|_{L^{۲}_{w}} = \Big(\int_{\Lambda} \mid v(x) \mid^{۲} w(x) \mathrm{d}x \Big)^{۱/۲} < \infty \Big\} \qquad (۶.۱)$$

ضرب داخلی پیوستهٔ[۹] فضای $L^{۲}_{w}(\Lambda)$ را با $(u,v)_{w}$ به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$(u,v)_{w} = \int_{\Lambda} u(x)v(x)w(x)\mathrm{d}x \qquad (۷.۱)$$

تعریف ۱ — ۹.۱ به ازای هر عدد صحیح نامنفی m فضای $H^{m}_{w}(\Lambda)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H^{m}_{w}(\Lambda) = \Big\{ v | \partial^{k}_{x} v = \frac{d^{k}v}{dx^{k}} \in L^{۲}_{w}(\Lambda), \quad \circ \leq k \leq m \Big\} \qquad (۸.۱)$$

با استفاده از ضرب داخلی، نیم نرم و نرم زیر را بدست می‌آوریم:

$$(u,v)_{m,w} = \sum_{k=\circ}^{m} (\partial^{k}_{x} u, \partial^{k}_{x} v)_{w}, \quad \mid v \mid_{m,w} = \|\partial^{m}_{x} v\|_{w}, \quad \|v\|_{m,w} = (v,v)^{۱/۲}_{m,w} \qquad (۹.۱)$$

اگر $w \equiv ۱$، معمولا w از فرمول‌ها حذف می‌شود.

اگر r یک عدد حقیقی مثبت باشد، برای تعریف فضای $H^{r}_{w}(\Lambda)$ از درونیابی استفاده می‌کنیم.

---

[۷] Normed linear space

[۸] weight function

[۹] Continuous internal product

تعریف ۱—۱۰.۱ توزیع فوق هندسی:[۱۰] در انتخاب n شئ، از N شئ که k تای آن دارای مشخصه‌ای خاص است و x تعداد موفقیتهای این انتخاب باشد، احتمال این انتخاب برای $x = ۰, ۱, ..., n$ برابر است با:

$$P(x) = \frac{C_x^k \; C_{n-x}^{N-k}}{C_n^N}$$

که در آن داریم:

$$C_a^b = \frac{b!}{a!(b-a)!}$$

تعریف ۱—۱۱.۱ تابع گاما:[۱۱] برای مقادیر $x > ۰$ تابع با ضابطهٔ زیر را تابع گاما می نامیم:

$$\Gamma(x) = \int_۰^\infty t^{x-۱} e^{-t} dt$$

تعریف ۱—۱۲.۱ توزیع گاما:[۱۲] توزیعی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر است، که در آن Γ نمایشگر تابع گاما بوده و پارامترهای α و β مثبت می باشند.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{۱}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \; x^{\alpha-۱} \; e^{\frac{-x}{\beta}} & x > ۰ \\ ۰ & x \leq ۰ \end{cases}$$

تعریف ۱—۱۳.۱ فرض کنیم $-۱ \leq x \leq ۱$ و $w(x)$ تابع وزن مربوط به آن باشد، فضای $L_w^۲[-۱, ۱]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_w^۲[-۱, ۱] = \left\{ v | \; \|v\|_{L_w^۲} = \left(\int_{-۱}^{۱} | \, v(x) \, |^۲ \, w(x) \mathrm{d}x \right)^{۱/۲} < \infty \right\}$$

[۱۰] Hypergeometric distribution

[۱۱] Gamma function

[۱۲] Gamma distribution

۱—۲ دستگاه چند جمله‌ایهای متعامد

تعریف ۱—۲.۱ ضرب داخلی گسستهٔ[۱۳] دو تابع حقیقی $u(x)$ و $v(x)$ را با فرض اینکه $w_0, w_1, ..., w_N$ ثابت های مثبتی هستند، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\left\langle u, v \right\rangle_w = \sum_{n=0}^{N} w_n u(x_n) v(x_n)$$

به گونه ای که $N+1$ نقطه‌ی $x_0, x_1, ..., x_N$ نقاط فرمول های انتگرال گیری گاوس[۱۴] یا گاوس—رادو[۱۵] هستند و $w_0, w_1, ..., w_N$ وزن های[۱۶] متناظر با آنها است.

تعریف ۱—۲.۲ دو تابع حقیقی $u(x)$ و $v(x)$ را روی $[a,b]$ نسبت به ضرب داخلی گسستهٔ $\left\langle .,. \right\rangle_w$ متعامد گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\left\langle u, v \right\rangle_w = 0$$

تعریف ۱—۲.۳ فرض کنیم H یک فضا با ضرب داخلی گسسته باشد، در اینصورت اگر با نرم زیر یک فضای کامل[۱۷] باشد،آنگاه H را یک فضای هیلبرت[۱۸] می‌نامیم.

$$\left\langle u, u \right\rangle_w = \|u\|_w^2$$

تعریف ۱—۲.۴ فرض کنیم $\{p_k\}_{k\in \mathbb{Z}^+}$ دنبالهٔ چند جمله‌ای‌های جبری[۱۹] باشد که درجهٔ p_k برابر k است به طوری که این چند جمله‌ای‌ها دو به دو نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ روی بازهٔ $[-1,1]$ متعامدند؛ یعنی به ازای $m, k \in \mathbb{Z}^+$ داریم:

$$\int_{-1}^{+1} \omega(x) p_k(x) p_m(x) \mathrm{d}x = \delta_{km} = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases} \qquad (1.10)$$

[۱۳] Discrete internal product
[۱۴] Gauss integration
[۱۵] Gauss-Rado integration
[۱۶] Weights
[۱۷] complete space
[۱۸] Hilbert space
[۱۹] Algebraic polynomials

که در آن δ_{km} دلتای کرونکر [۲۰] است.

قضیهٔ کلاسیک وایرشتراس در [۱۲] نشان می‌دهد که چنین دنباله‌ای یک پایهٔ کامل [۲۱] برای فضای $L^2_\omega[-1,1]$ می‌باشد.

کامل بودن دنبالهٔ $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ نشان می‌دهد برای هر $u \in L^2_\omega[-1,1]$ می‌توان نوشت :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k p_k(x) \tag{۱۱.۱}$$

به طوری که $\hat{u}_k$ یعنی ضرایب بسط فوریه [۲۲] به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\hat{u}_k = \frac{1}{\|p_k\|^2_\omega} \int_{-1}^{+1} \omega(x)u(x)p_k(x)\mathrm{d}x = (u, p_k)_\omega \tag{۱۲.۱}$$

برای هر $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ سری فوریه [۲۳] متناهی تابع u به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_N u = \sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k p_k = \sum_{k=0}^{N} (u, p_k)_\omega p_k$$

اگر P_N فضای چند جمله‌ای‌های با درجهٔ کمتر یا مساوی N باشد در آن صورت برای هر $p_m \in P_N$ داریم:

$$(\rho_N u, p_m)_\omega = \sum_{k=0}^{N} (u, p_k)_\omega (p_k, p_m)_\omega = (u, p_m)_\omega \tag{۱۳.۱}$$

و چون $\{p_k\}_{k=0}^{N}$ یک پایه برای فضای P_N تشکیل می‌دهد پس داریم:

$$(\rho_N u, v)_\omega = (u, v)_\omega, \qquad \forall v \in P_N \tag{۱۴.۱}$$

بنابر این می‌توان گفت $\rho_N u$ تصویر متعامد u بر P_N است. کامل بودن دنبالهٔ $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ نشان می‌دهد متناظر $u \in L^2_\omega[-1,1]$ داریم:

$$\|u - \rho_N u\| \to 0 \qquad N \to \infty \tag{۱۵.۱}$$

[۲۰] Kronecker delta
[۲۱] Complet basis
[۲۲] Fourier coefficients
[۲۳] Fourier series

۱–۳ مسئلهٔ اشتورم–لیوویل و چند جمله‌ای‌های کلاسیک

در حل مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال مجموعه‌های متعامد خاص و مهمی از توابع معمولا مورد استفاده قرار می‌گیرند که می‌توان آن‌ها را به عنوان توابع ویژهٔ مسئلهٔ مرزی زیر در نظر گرفت:

$$(\rho(x)y'(x))' + [q(x) + \lambda\omega(x)]y(x) = 0 \qquad -1 < x < 1$$
$$K_1 y(-1) + K_2 y'(-1) = 0$$
$$L_1 y(1) + L_2 y'(1) = 0$$

به طوری که K_1, L_1, K_2, L_2 ثابت‌های حقیقی هستند که همزمان صفر نیستند.
این مسئلهٔ مقدار ویژه را یک مسئلهٔ اشتورم–لیوویل [24] می‌نامند، که در این‌جا λ یک پارامتر است و $\rho(x) > 0,\ q(x) \geq 0,\ \omega(x) \geq 0$ توابع پیوستهٔ روی بازه $[-1, 1]$ می‌باشد.
یک مقدار ویژهٔ λ از مسئلهٔ فوق مقداری است که به ازای آن مسئله دارای جواب غیربدیهی برای $y(x)$ است. اگر چنین جوابی وجود داشته باشد، $y(x)$ را یک تابع ویژهٔ متناظر مقدار ویژهٔ λ می‌نامند.
هر گاه $\rho(x)$ روی مرز دامنه صفر شود و یا دامنه بی‌کران باشد مسئلهٔ اشتورم – لایوویل را تکین [25] و در غیر این صورت آن را یک مسئلهٔ منظم[26] می نامند. هر مسئلهٔ تکین اشتورم –لیوویل دارای خواص زیر است:

۱) هرگاه $y_n(x)$ و $y_m(x)$ توابع ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ λ_n و λ_m باشند، در این صورت $y_n(x)$ و $y_m(x)$ نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ روی بازهٔ $[-1, 1]$ متعامدند.

۲) همهٔ مقادیر ویژهٔ یک مسئلهٔ اشتورم –لیوویل حقیقی و ساده می‌باشند.

۳) مجموعهٔ توابع ویژهٔ $\{y_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ از مسئلهٔ فوق یک مجموعهٔ کامل است و بنابراین هر تابع تکه‌ای پیوسته که روی $[-1, 1]$ تعریف شده باشد را می‌توان بر حسب این توابع ویژه بسط داد، به طوری که سری حاصل به تابع مفروض همگرا در میانگین است.

[24] Sturm-Liouville
[25] singular
[26] regular

یک مجموعهٔ متعامد کلاسیک جواب ویژهٔ مسئله اشتورم —لیوویل با فرض $q(x) \equiv 0$ است. چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک که از مسئلهٔ اشتورم لیوویل نتیجه می شوند و در حل معادلات دیفرانسیل بسیار قابل توجه هستند، عبارتند از: ژاکوبی [۲۷]، لژاندر [۲۸]، چبیشف [۲۹]، هرمیت [۳۰] و لاگوور [۳۱].

۱—۴ انتگرالگیری نوع گاوسی

در این قسمت ارتباط نزدیک قواعد انتگرال‌گیری گاوسی [۳۲] بر روی $[-1, 1]$ و چند جمله‌ای‌های متعامد را بیان می کنیم. ابتدا قواعد انتگرال‌گیری گاوسی با نقاط گره‌ای از پیش تعیین شده را شرح می‌دهیم.

قضیه ۱—۴.۱ اگر $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ یک دنباله از چند جمله‌ای‌های مثبت متعامد بر تابع وزن $w(x)$ روی $[a, b]$ باشد که درجهٔ p_k برابر k است، در آن صورت برای هر $N \in \mathbb{N}$ همهٔ ریشه‌های چند جمله‌ای p_N حقیقی و مجزا هستند و در داخل بازهٔ $[a, b]$ قرار دارند.

برهان : به [۱۸] مراجعه شود.

قضیه ۱—۴.۲ قاعده انتگرال‌گیری گاوس: فرض کنیم $x_0, x_1, ..., x_N$ ریشه‌های چند جمله‌ای p_{N+1} از دنبالهٔ چند جمله‌ای‌های متعامد $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ باشند و $w_0, w_1, ..., w_N$ جواب سیستم خطی زیر باشد:

$$\sum_{j=0}^{N} w_j x_j^k = \int_{-1}^{+1} w(x) x^k \mathrm{d}x \qquad 0 \leq k \leq N, \quad k \in \mathrm{N}$$

در آن صورت:

۱) برای هر $j = 0, 1, ..., N$، $w_j > 0$ می‌باشد و برای هر $p \in P_{2N+1}$ داریم:

$$\sum_{j=0}^{N} w_j p(x_j) = \int_{-1}^{+1} w(x) p(x) \mathrm{d}x \tag{۱.۱۶}$$

---

[۲۷] Jacobi
[۲۸] Legendre
[۲۹] Chebyshev
[۳۰] Hermite
[۳۱] Laguerre
[۳۲] Integration Gauss-type

که اعداد مثبت w_j را وزن می‌نامند.

۲) نمی‌توان برای هر N، $j = 0, 1, ..., N$، مقادیر w_j و x_j ی را یافت به طوری که تساوی (۱۶.۱) برای هر $p \in P_{2N+2}$ برقرار باشد.

برهان : به [۱۸] مراجعه شود.

این قواعد به انتگرال‌گیری گاوسی مشهورند و در تمام آن‌ها نقاط گره‌ای در بازهٔ $(-1, 1)$ قرار دارند. در قواعد انتگرال‌گیری گاوسی که در بالا به آن اشاره شد هیچ‌کدام از نقاط انتهای بازه جزء نقاط انتگرال‌گیری نمی‌باشد، از آنجایی که در حل مسائل مقدار مرزی به روش شبه‌طیفی نقاط انتهای بازه جزء نقاط هم محلی می‌باشند، قواعد گاوسی احتیاج به تعمیم دارند به طوری که این نقاط انتهایی نیز جزء نقاط انتگرال‌گیری باشند. آن دسته از قواعد گاوس که فقط شامل یکی از نقاط انتهایی باشند قواعد انتگرال‌گیری گاوس—رادو[۳۳] نامیده می‌شوند.

برای بدست آوردن قواعد انتگرال‌گیری گاوس—رادو در چند جمله‌ای

$$q(x) = p_{N+1}(x) + ap_N(x) \qquad (۱۷.۱)$$

a را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $q(-1) = 0$ باشد، یعنی $\left(a = -\frac{p_{N+1}(-1)}{p_N(-1)}\right)$.

قضیه ۱ — ۳.۴ قاعدهٔ انتگرال‌گیری گاوس—رادو: فرض کنیم $-1 = x_0, x_1, ..., x_N$ ، $N+1$ ریشهٔ چند جمله‌ای (۱۷.۱) و $w_0, w_1, ..., w_N$ جواب سیستم خطی زیر باشند:

$$\sum_{j=0}^{N} w_j x_j^k = \int_{-1}^{+1} w(x) x^k \mathrm{d}x \quad , \quad 0 \le k \le N \qquad (۱۸.۱)$$

در آن صورت برای هر $p \in P_{2N}$ داریم:

$$\sum_{j=0}^{N} w_j p(x_j) = \int_{-1}^{+1} w(x) p(x) \mathrm{d}x \qquad (۱۹.۱)$$

برهان : برای هر $p \in P_{2N-1}$ چندجمله ای های $r \in P_{N-1}$ و $s \in P_N$ وجود دارند به طوری که:

$$p(x) = q(x)r(x) + s(x)$$

[۳۳] Gauss-Radau integration

و از آنجا که برای هر $\circ \le j \le N$ داریم: $q(x_j) = \circ$

لذا برای هر $\circ \le j \le N$ به دست می آید: $p(x_j) = s(x_j)$

در نتیجه:

$$\sum_{j=\circ}^{N} w_j p(x_j) = \sum_{j=\circ}^{N} w_j s(x_j) = \int_{-۱}^{+۱} w(x)s(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-۱}^{+۱} w(x)p(x) - \int_{-۱}^{+۱} w(x)q(x)r(x)\mathrm{d}x = \int_{-۱}^{+۱} w(x)p(x)\mathrm{d}x$$

و رابطهٔ (۱۹.۱) ثابت می‌شود. ■

برای بدست آوردن قاعدهٔ گاوس—رادو که شامل نقطهٔ انتهایی سمت راست یعنی $x = ۱$ باشد باید در چند جمله‌ای تعریف شدهٔ (۱۷.۱)، a را طوری در نظر گرفت که $q(۱) = \circ$ باشد، یعنی $\left(a = -\frac{p_{N+۱}(۱)}{p_N(۱)}\right)$.

در این حالت قضیهٔ گاوس—رادو به صورت زیر می‌باشد:

قضیه ۱—۴.۴ اگر $x_\circ, x_۱, ..., x_N = ۱$ ریشه‌های $q(x)$ باشند و $w_\circ, w_۱, ..., w_N$ جواب سیستم خطی (۱۸.۱) باشند، آنگاه برای هر $p \in P_{۲N}$ تساوی (۱۹.۱) برقرار است.

برهان : مشابه برهان قضیه قبل است. ■

قضیه ۱—۵.۴ فرض کنیم $w(x)$ یک تابع وزن و $\{p_k\}_{k=\circ}^{N}$ دنباله‌ای از چند جمله‌ای‌های متعامد نسبت به تابع وزن $w(x)$ باشد و همچنین $x_\circ, x_۱, ..., x_N$ مجموعه‌ای از نقاط گره‌ای گاوس یا گاوس—رادو و $w_\circ, w_۱, ..., w_N$ وزن‌های نظیر این نقاط باشند در آن صورت هر چند جمله‌ای $q \in p_N$ را می‌توان به صورت بسط زیر نوشت:

$$q(x) = \sum_{k=\circ}^{N} \tilde{q_k} p_k(x)$$

که در آن داریم:

$$\gamma_k = \sum_{j=\circ}^{N} w_j p_k^۲(x_j) \quad , \quad \tilde{q_k} = \frac{۱}{\gamma_k} \sum_{j=\circ}^{N} w_j q(x_j) p_k(x_j)$$

برهان : با توجه به اینکه نقاط x_j نقاط انتگرال گیری قواعد گاوسی می باشند پس ضرب داخلی تعریف شده در تعریف (۱ – ۱.۲)، یک ضرب داخلی بر روی فضای P_N می باشد و از طرفی

اگر $N \leq m \neq n \leq 0$ باشد در آن صورت چندجمله ای های p_n و p_m نسبت به این ضرب داخلی گسسته متعامد هستند، پس ضریب $\tilde{q_k}$ را می توان از رابطهٔ زیر به دست آورد:

$$\Big\langle q(x), p_k(x) \Big\rangle_w = \Big\langle \sum_{k=0}^{N} \tilde{q_k} p_k(x), p_k(x) \Big\rangle_w = \tilde{q_k} \Big\langle p_k(x), p_k(x) \Big\rangle_w$$

و در نتیجه داریم:

$$\tilde{q}_k(x) = \frac{\Big\langle q(x), p_k(x) \Big\rangle_w}{\Big\langle p_k(x), p_k(x) \Big\rangle_w}$$

۱—۵ روش‌های طیفی

معادلهٔ دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x) & x \in \Omega \\ Bu(x) = g & x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (۲۰.۱)$$

که در آن L عملگر دیفرانسیل و B عملگری است که شرایط مرزی مربوط به معادله را در بر دارد و بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $\Omega = (-1, 1)$ است.

$P_N([-1, 1])$ فضای همه‌ی چندجمله‌ای های از درجهٔ کمتر یا مساوی N و زیرفضای $P_N^B([-1, 1])$ از فضای $P_N([-1, 1])$ که در آن شرایط مرزی اعمال شده باشد را در نظر می‌گیریم. در روش طیفی جواب دقیق $u(x)$ مسئلهٔ (۲۰.۱) با $u_N(x)$ که به صورت مجموع متناهی زیر است، تقریب زده می‌شود:

$$u(x) \simeq u_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \hat{u}_i \phi_i(x)$$

توابع کوششی[۳۴] $\{\phi\}_{i=0}^{N}$ را اکثراً پایه‌های متعامد، مانند چندجمله‌ای چبیشف یا چندجمله‌ای لاگوور از فضای چندجمله‌ای‌های $P_N([-1, 1])$ در نظر می‌گیریم و ضرایب $\hat{u}_i$ باید تعیین گردند.

با قرار دادن $u_N(x)$ در رابطهٔ (۲۰.۱)، باقیماندهٔ زیر حاصل می‌گردد:

$$R_N(x) = Lu_N(x) - f(x)$$

[۳۴] Trial Function

ایدهٔ این روش آنستکه که تابع باقیمانده باید در شرط زیر صدق کند:

$$(R_N, \psi_j)_w = \int_{-1}^{+1} w(x) R_N(x) \psi_j(x) \mathrm{d}x = 0 \qquad 0 \le j \le N \qquad (۲۱.۱)$$

که در آن w تابع وزن و ψ_j ها توابع آزمون هستند. واضح است که رابطهٔ بالا شامل $N+1$ معادله با $N+1$ مجهول باشد. نحوهٔ انتخاب توابع آزمون[۳۵] باعث تقسیم شدن روش طیفی به سه دستهٔ عمده گالرکین[۳۶]، تاو[۳۷] و هم‌محلی می‌شود:

۱) **روش گالرکین**:در این روش توابع آزمون و توابع کوششی مشابه هم هستند و بایستی توابع کوششی $\{\phi\}_{i=0}^{N}$ را چنان انتخاب نمود که هر کدام در شرایط مرزی معادله به صورت زیر صدق کند:

$$B\phi_i = g \qquad , \qquad 0 \le i \le N$$

با توجه به تعریف $P_N^B([-1,1])$ مجموعهٔ $\{\phi\}_{i=0}^{N}$ تشکیل یک پایه برای آن می دهد. در روش گالرکین تابع باقیمانده باید در شرایط زیر صدق کند:

$$\int_{-1}^{1} w(x) R_N(x) \psi_i(x) = 0 \qquad , \qquad 0 \le i \le N$$

اما چون در این روش $\psi_i = \phi_i$ بنابراین داریم:

$$\int_{-1}^{1} w(x) R_N(x) v_i(x) dx = 0 \qquad , \qquad v_N \in P_N^B([-1,1])$$

یعنی اینکه در روش گالرکین تابع باقیمانده R_N بر فضای $P_N^B([-1,1])$ عمود می‌باشد.

۲) **روش هم‌محلی**: در این روش $N+1$ نقطهٔ گره‌ای $\{x_i\}_{i=0}^{N} \in [-1,1]$ را عموما مطابق با یکی از مجموعه نقاط انتگرال‌گیری گاوسی یا گاوس–رادو انتخاب می‌کنیم و توابع آزمون توابع انتقال یافتهٔ دیراک $\delta(x-x_j)$ و $w(x)=1$ می‌باشند. مثلاً اگر از نقاط چبیشف–گاوس–رادو[۳۸] به عنوان نقاط گره‌ای و توابع کوششی را چندجمله‌ای های چبیشف $T_k(x)$ در نظر بگیریم، در این صورت رابطهٔ (۲۰.۱) به

[۳۵] Test Function
[۳۶] Galerkin
[۳۷] Tau
[۳۸] Chebyshev-Gauss-Rado