بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش هندسه

آشوب در سیستم های دینامیکی گسسته در فضاهای متریک کامل

استاد راهنما:

پروفسور محمد رضا مولایی

مولف:

محبوبه اکبرپور

شهریور ماه ۱۳۹۰

این پایان‌نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: محبوبه اکبرپور

استاد راهنما: پروفسور محمد رضا مولایی

داور ۱ : دکتر محمد ابراهیمی

داور ۲ : دکتر ندا ابراهیمی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر محسن مددی

تقدیم به:

تقدیم به پدر عزیزم و مادر مهربانم و آنان که دوستشان دارم و وجودم در وجودشان معنا میابد.

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش سزاوار پروردگار مهربان است که هستی را در پاکی مطلق خویش و بر پایه‌ی دانش و عدالت آفرید و به بشر آموخت که نیل به خوشبختی در گرو اندیشیدن و پیمودن راه است.

او را البته با زبانی قاصر سپاس می‌گویم که تجربه‌ی بودن را به من بخشیده و در برابر بی‌نهایت یاری‌ها و گره‌گشایی‌های مهربانانه‌اش او را سپاس بی‌کران می‌گویم، که اگر خواستش نبود حتی کوچکی میسر نمی‌گشت.

سپاس بی‌پایان بر استاد ارجمندم پروفسور مولایی که در این مدت از محضر علمی و اخلاقی ایشان بهره بردم و همواره خود را مدیون ایشان می‌دانم و به خاطر راهنمایی و اهتمام ارزشمندشان در مسیر رشد علمی‌ام، سپاسگزارم.

صمیمانه‌ترین و خالصانه‌ترین تشکرات قلبی خود را به خانواده‌ی عزیزم تقدیم می‌کنم، که همواره و در تمامی سال‌های زندگیم پشتیبان و تنها دلیل دلگرمی، نشاط و شادی من بوده و هستند و هرآنچه به دست آورده‌ام یکسره مدیون این بزرگواران می‌باشم.

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی آشوب در سیستم‌های دینامیکی زمان گسسته در فضای متریک کامل پرداخته‌ایم .ابتدا بحث مورد نظر روی نگاشت‌های پیوسته در فضای متریک کامل عمومی بوده و دو شرط آشوبناکی بنا کرده و سپس در حالت خاص دو شرط معادل از آشوب را برای سیستم‌های دینامیکی زمان گسسته در زیرمجموعه‌های فشرده از فضای متریک بدست آورده‌ایم.

کلمات کلیدی:

آشوب، نقطه‌ی ثابت گسترشی، دافع گذشته-چسبنده، سیستم دینامیکی نمادین، مجموعه‌ی کانتور.

فهرست مطالب

مقدمه

تئوری آشوب یا بی‌نظمی، تئوری می‌باشد که فکر و ذهن بشر را به خود واداشته است. این تئوری در همه‌ی جنبه‌های علمی وارد شده و باعث بحث دانشمندان گردیده است. این تئوری که در حیطه ی مباحث علوم تجربی، ریاضی، رفتاری، مدیریتی و اجتماعی وارد شده، باعث تغیر در نوع دیدگاه بشر به حل مسائل غیر قابل پیش بینی شده است. انگاره ی اصلی و کلید تئوری آشوب این است که در هر بی نظمی، نظمی نهفته است.به این معنا که نباید نظم را تنها در یک مقیاس جستجو کرد. پدیده ای که در مقیاس محلی، کاملاً تصادفی و غیر قابل پیش بینی به نظر می‌رسد، چه بسا در مقیاس بزرگتر، کاملاً پایا و قابل پیش بینی باشد.

از آنجا که تئوری آشوب در ریاضیات بسیار حائز اهمیت است، لذا در این پایان نامه سعی کرده‌ایم تا حدودی به این مطلب بپردازیم.

مطالعه‌ی رفتارهای آشوبناک روی نگاشت‌های پیوسته در فضاهایی با بعدهای بالا، مخصوصاً در فضاهای نامتناهی بسیار سخت می‌باشد.برای بررسی آشوب در فضاهای با بعد نامتناهی بیشتر مقاله ها نظریه مشابهی ارائه کرده اند.در این مقاله ها آشوب در یک سیستم دینامیکی بابعد نامتناهی را بوسیله‌ی بررسی آشوب در یک سیستم با بعد متناهی، مشخص می‌کنند [۴، ۱۳] . پیشرفت‌های مهمی توسط کندی [۱] ویورک [۲] صورت گرفته است. [۷] آنها نگاشت $f:Q\to X$ رادر نظر گرفته، به طوریکه (X,d) یک فضای متریک و Q یک زیر مجموعه از X باشد و نیز یک مجموعه از فرض ها را بنام فرض های نعل اسب در نظرگرفتند که شامل ۵ فرض است. در ۳ تا از آنها (X,d) یک فضای متریک مجزا و Q بطور موضعی همبند و فشرده بوده و نیز f روی Q پیوسته می‌باشد. تحت فرض‌های نعل اسب یک مجموعه فشرده ناپایدار $Q_1\subset Q$ وجود دارد که $f:Q_1\to Q_1$ با یک سیستم دینامیکی نمادین یک طرفه نیم مزدوج توپولوژیکی است.

---
[۱] $Kennedy$
[۲] $York$

یک نتیجه مهم توسط یانگ [3] و تنگ [4] بدست آمده [۱۹] که به صورت زیر میباشد:

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و Q یک زیرمجموعه فشرده X باشد. در اینصورت $m \geqslant ۲$ و زیرمجموعه های دو بدو $D_i(۱ \leqslant i \leqslant m)$ وجود دارد به طوریکه نگاشت $f : D = \bigcup_{i=۱}^{m} D_i \to X$ پیوسته است و $f(D_j) \supset D$ به طوریکه: $۱ \leqslant j \leqslant m$. در اینصورت یک مجموعه ناپایدار فشرده $Q_۱ \subset D$ وجود دارد که $f : Q_۱ \to Q_۱$ با یک سیستم دینامیکی m -نمادین یک طرفه نیم مزدوج توپولوژیکی است. لازم به ذکر است که در مقاله های فوق Q فشرده فرض شده و نیز خاصیت مزدوج توپولوژیکی همان نیم مزدوج توپولوژیکی فرض شده است بنابراین نمی‌توان نشان داد که f روی $Q_۱$ آشوبناک است. بنظر می‌رسد که هیچ شرط آشوبی برای سیستم‌های دینامیکی گسسته بابعد نامتناهی وجود ندارد و نیز هیچ روش در دسترسی که مستقیماً با رفتارهای آشوبناک سیستم دینامیکی گسسته در ارتباط باشد، وجود ندارد.

دراین پایان نامه سعی می‌کنیم دو شرط آشوبناکی برای سیستم‌های دینامیکی گسسته‌ای که توسط نگاشت‌های پیوسته تولید می‌شوند را در فضای متریک کامل، بسازیم. سپس یادآوری می‌کنیم که فضای برداری n -بعدی $\mathbb{R}^n$ کامل است و هر زیرمجموعه کراندار و بسته در آن فشرده می‌باشد. بعلاوه هر زیرمجموعه فشرده از یک فضای متریک عمومی بعنوان یک زیرفضا کامل است. لذا بعنوان یک حالت خاص روی سیستم‌های دینامیکی گسسته‌ای که بوسیله ی نگاشت‌های پیوسته تولید می‌شوند در زیر مجموعه‌های فشرده از فضای متریک بحث می‌کنیم و شرط هایی از آشوب را در این حالت می‌سازیم. در نهایت نتایج موجود از آشوب در $\mathbb{R}^n$ توسیع داده شده است.

[3] $Yang$
[4] $Tang$

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل ابتدا به بیان تعاریفی پرداخته ایم که بعنوان پیش نیاز در فصل‌های بعد به آنها نیاز داریم، سپس مقدمه ای از آشوب را بیان کرده تا خواننده با مفهوم کلی آشوب آشنا گردد. در بخش آخر این فصل تعاریفی از آشوب را که در ریاضیات مطرح هستند، را آورده ایم.

۱.۱ تعاریف کلی

تعریف ۱.۱.۱. *همه حالت‌های ممکن یک سیستم توسط یک مجموعه مانند X مشخص می‌شود که این مجموعه، فضای حالت سیستم نامیده می‌شود.*

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید X یک مجموعه ی ناتهی باشد، مجموعه ی*

$$\{R_\gamma; R_\gamma \subseteq X \times Y_\gamma, \gamma \in \Gamma\},$$

یک سیستم نامیده می شود اگر برای هر $x \in X$ ، $\gamma \in \Gamma$ ای موجود باشد بقسمی که x متعلق به دامنه ی R_γ باشد.

$(X, \{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})$ یک فضای سیستماتیک نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. *فرض کنید تابع تک مقداری $\phi^t : X \to X$ روی فضای حالت X تعریف شده باشد که حالت اولیه‌ی $x_\circ \in X$ را در زمان t به حالت $x_t \in X$ انتقال دهد، یعنی $x_t = \phi^t(x_\circ)$. در اینصورت نگاشت ϕ^t عملگر تکامل سیستم دینامیکی نامیده میشود.*

تعریف ۴.۱.۱. *یک سیستم دینامیکی عبارتست از $(X, \{\phi^t\})$ به طوریکه X فضای حالت و $\{\phi^t\}$ خانواده ای از عملگرهای تکامل هستند که در دو شرط زیر صدق کند:*

(۱) $\phi^\circ = i_d$

(۲) $\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s} \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}$

برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، ϕ^t را شار می‌نامند.

مثال ۵.۱.۱. $X = \mathbb{R}$ *و خانواده تبدیلات خطی نامنفرد* $\phi^t = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \circ \\ \circ & e^{\mu t} \end{pmatrix}$ *به ازائ هر* $t, \mu \in \mathbb{R}$ *و* $\lambda \neq \circ$ *یک سیستم دینامیکی میباشد.*

تعریف ۶.۱.۱. *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد، نگاشت $f:X\to X$ را انتقال توپولوژیک (بطور توپولوژیکی متعدی) مینامیم اگر برای هر زیرمجموعه‌ی باز $U,V\subset X$، $k\in\mathbb{N}$ موجود باشد که:*

$$f^k(U)\cap V\neq\varnothing.$$

تعریف ۷.۱.۱. *دو سیستم دینامیکی (X,f) و (Y,g) را نیم مزدوج توپولوژیکی میگوییم اگر نگاشت پوشای $\pi:Y\to X$ موجود باشد به طوریکه:*

$$\pi\circ g=f\circ\pi,$$

(Y,g) را توسیع سیستم (X,f) و (X,f) را عامل سیستم (Y,g) می‌نامیم.

اگر $\pi:Y\to X$ یک به یک نیز باشد، سیستم (X,f) و (Y,g) را مزدوج توپولوژیکی می‌نامیم.

مثال ۸.۱.۱. *فرض کنید $X=(۰,+\infty)$ و $Y=(۱,+\infty)$ باشد. حال نگاشت f و g را به صورت زیر در نظر بگیرید :*

$$f:X\to X\qquad\qquad g:Y\to Y$$

$$x\mapsto x+۱\qquad\qquad y\mapsto ۱۰y$$

واضح است که (X,f) و (Y,g) دو سیستم دینامیکی هستند. نشان می‌دهیم که این دو سیستم دینامیکی مزدوج توپولوژیکی هستند.

نگاشت $\pi:Y\to X$ را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$\pi:(۱,+\infty)\to(۰,+\infty)$$

$$x \mapsto \log_{10}^{x}$$

واضح است که π یک نگاشت پوشاست و نیز داریم:

$$\pi o g(x) = \pi(10x) = \log_{10}^{10x} = 1 + \log_{10}^{x} = f(\log_{10}^{x}) = f o \pi(x).$$

لذا (X, f) و (Y, g) مزدوج توپولوژیکی هستند.

تعریف ۹.۱.۱. سیستم دینامیکی (X, f) وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد اگر $\delta > 0$ موجود باشد که برای هر $x \in X$ و هر همسایگی N از x ، $y \in N$ و $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوریکه :

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$$

مثال ۱۰.۱.۱. سیستم دینامیکی (Y, g) در مثال قبل وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد. زیرا فرض کنید :

$$x \in (1, +\infty); x \in (a, b) = N, y \in N.$$

لذا

$$d(g^n(x), g^n(y)) = |g^n(x) - g^n(y)| = 10^n|x - y| > \delta,$$

ولی سیستم دینامیکی (X, f) وابستگی حساس به شرایط اولیه ندارد. زیرا اگر با برهان خلف فرض کنیم (X, f) وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد. پس $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر $x \in X$ و همسایگی N_x از x که $diam N_x < \delta$ ، اگر $y \in N_x$ و $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که : $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ ازطرفی $|f^n(x) - f^n(y)| = |x - y| < \delta$ که تناقض می‌باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. *نقطه ثابت: فرض کنیدیک (X,ϕ^t) سیستم دینامیکی باشد، نقطه‌ی $x\in X$ رانقطه‌ی ثابت سیستم گویند اگر: $\phi^t(x)=x \quad \forall t\in\mathbb{R}(\mathbb{Z})$.*

تعریف ۱۲.۱.۱. *نقطه‌ی تکین: نقطه ی ثابت p از f را تکین می‌نامند اگر یک همسایگی از p موجود باشد به طوریکه هیچ نقطه ثابت دیگری را شامل نشود.*

تعریف ۱۳.۱.۱. *نقطه متناوب: فرض کنید (X,ϕ^t) یک سیستم دینامیکی باشد. نقطه‌ی $x\in X$ را نقطه‌ی متناوب سیستم گوییم، اگر برای یک $t\in\mathbb{R}^+(\mathbb{Z}^+)$ داشته باشیم : $\phi^t(x)=x$.*

کوچکترین $T>0$ را که $\phi^T(x)=x$ دوره‌ی تناوب x گوییم .

مثال ۱۴.۱.۱. *فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به صورت $f(x)=x^3$ باشد در اینصورت f دارای نقاط ثابت ۰ و ۱ و ۱− است ولی نقطه‌ی متناوب ندارد.*

مثال ۱۵.۱.۱. *نگاشت $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به صورت $p(x)=x^2-1$ در نظر بگیرید. در اینصورت p دارای نقاط ثابت $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}),(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ است، در حالی که ۰ و ۱− نقاط متناوب p از دوره‌ی تناوب ۲ می‌باشند.*

تعریف ۱۶.۱.۱. *مدار: فرض کنید $X\neq\varnothing$ یک مجموعه و $f:X\to X$ یک نگاشت باشد. اگر $x\in X$ ، آن‌گاه مدار پیشرو X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$o^+(x,f)=\{f^n(x),n\geqslant 0\}.$$

در صورتی که f یک همئومورفیسم باشد، مدار پسرو X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$o^-(x,f)=\{f^n(x),n\leqslant 0\},$$

که در اینصورت:

$$o(x, f) = o^{+}(x, f) \cup o^{-}(x, f),$$

مدار X نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۷. مدار یک نقطه‌ی متناوب را مدار متناوب گویند.

تعریف ۱.۱.۱۸. فضای برداری مختلط نرمدار: فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار می‌نامیم اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ بنام نرم x چنان مربوط شده باشد که:

(۱) به ازائ هر x, y در X داشته باشیم: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

(۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد آن‌گاه: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

(۳) $\|x\| = ۰$ تساوی $x = ۰$ را ایجاب می‌نماید .

تعریف ۱.۱.۱۹. فضای باناخ: هر فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله‌ی نرمش تام باشد.

مثال ۱.۱.۲۰. فرض کنیم به صورت زیر :

$$X = L^{۲} = \{x = (x(۱), x(۲), ...); x(j) \in \mathbb{R}, \sum_{۱}^{\infty} |x(i)|^{۲} < \infty\},$$

تعریف شده باشد و نیز داشته باشیم :

$$\|x\| = (\sum_{i=۱}^{\infty} |x(i)|^{۲})^{\frac{۱}{۲}}.$$

واضح است که $(L^{۲}, \|.\|)$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۲۱.۱.۱. *فرض کنیم X یک فضای متریک با متر d باشد. هرگاه ϕ ، X را بتوی X بنگارد و عددی مانند $c < 1$ موجود باشد به طوریکه:*

$$\forall x, y \in X \qquad d(\phi(x), \phi(y)) \leqslant cd(x, y).$$

آن‌گاه ϕ را یک انقباض از X بتوی X نامند.

تعریف ۲۲.۱.۱. *خاصیت اشتراک متناهی: گردایه‌ای مانند A از زیرمجموعه‌های X را گوییم در شرط مقطع(اشتراک) متناهی صدق می‌کند در صورتی که مقطع هر زیر گردایه‌ی متناهی از آن ناتهی باشد. بعبارت دیگر هرگاه $\{A_1, ..., A_n\}$ یک زیرگردایه‌ی متناهی و دلخواه A باشد، آن‌گاه: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$.*

۲.۱ مقدمه ای از آشوب

تعریف ۱.۲.۱. *آشوب $(chaose)$: آشوب در لغت به معنای هرج و مرج وبی‌نظمی است. ریشه‌ی لغوی کلمه‌ی آشوب به کلمه‌ی رومی "کائوس" $(kaous)$ بر می‌گردد که مفهوم آن متعلق به شاعر روم باستان به نام "اوید" $(owid)$ می‌باشد. به نظر او کائوس، بی‌نظمی و ماده بی‌شکل اولیه بود که دارای فضا و بعد نامتناهی بوده، بطوری فرض شده است که قبل از اینکه این جهان منظم شکل بگیرد، وجود داشته است که سپس خالق هستی، جهان منظم را از آن ایجاد نمود.*

از لحاظ تاریخی پس از آنکه قوانین نیوتن در مورد حرکت ارائه شد، افراد زیادی با تکیه بر قطعیت ذاتی این قوانین، آن را ماشین حساب خدا نامیدند و برای پیشگویی آینده برحسب مقادیر فعلی، کافی دانستند. بطور کلی تصور بر این بود که وضعیت فعلی را با دقت بالایی بدانیم، می‌توانیم آینده را با همین دقت پیشگویی کنیم. این باور همچنان پا برجا بود تا اینکه در اواخر قرن نوزدهم، هانری پوانکاره [1] در بررسی و تلاش برای حل مسئله‌ی سه جسمی متوجه شد که در بعضی موارد اگر دقت در شرایط اولیه بالا باشد، لزوماً

[1] Poincare

درنتایج نهایی عدم قطعیت ناچیز نیست و با کاهش عدم قطعیت در شرایط اولیه لزوماً عدم قطعیت کاهش نمی‌یابد. این مسئله نمودی از رفتار آشوبی بود که در آن زمان شناخته شده نبود. تقریباً اولین تحقیقات عددی که به معرفی فراگیر آشوب انجامید توسط ادوارد لورنتس [۲] ارائه شد.

باید دانست که تا کنون تعریف کلی پذیرفته شده‌ای برای آشوب ارائه نشده است و تعریف زیر از جمله تعاریف پذیرفته شده‌ی مطرح می‌باشد:

آشوب، یک رفتار طولانی مدت غیر پریودیک در یک سیستم دترمینیستیک است که وابستگی حساس به شرایط اولیه را نشان می‌دهد.

(a) منظور از رفتار طولانی مدت غیرپریودیک در سیستم های دینامیکی آنست که مسیرهایی وجود دارند که وقتی زمان به بی‌نهایت میل می‌کند، مسیر این سیستمها به نقاط ثابت، مدارهای پریودیک و یا شبه مدارهای پریودیک منتهی نمی‌شود.

(b) دترمینیستیک گویای آنست که سیستم دارای پارامترهای یا ورودی‌های تصادفی$(random)$ نیست ولی رفتار بی نظم این سیستم‌ها از غیر خطی بودن ناشی می‌شود. این اصطلاح در مقابل $(stochastic)$ به کار می‌رود که منظور آن نامنظم، کاتوره‌ای، نامعین و غیر قابل پیش بینی بودن سیستم است.

(c) منظور از حساس بودن به شرایط اولیه در سیستم‌های دینامیکی این است که مسیرهای مجاور به سرعت و بطور نمایی از هم جدا می‌شوند. در واقع این خصوصیت، تفاوت اصلی سیستم‌های دینامیکی آشوبناک باسیستم‌های دینامیکی غیر آشوبناک است. در سیستم‌های دینامیکی غیرآشوبناک، اختلاف کوچک اولیه در دو مسیر بعنوان خطای اندازه‌گیری بوده و بطور خطی با زمان افزایش پیدا می‌کند. در حالی که در سیستم‌های دینامیکی آشوبناک، اختلاف بین دو مسیر با فاصله‌ی بسیار اندک همان طوری که گفته شد بطور نمایی افزایش می‌یابد.

---
[۲] Lorentz