بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

وزارت علوم ، تحقیقات و فناوری

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه :

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض (آنالیز هارمونیک)

عنوان :

نیم گروه توپولوژیک وابسته به یک گروه توپولوژیک

استاد راهنما :

دکتر عزیز اله عزیزی

استاد مشاور :

دکتر علی آبکار

نگارش :

مریم بهرامی شکیب

آذر ۱۳۸۷

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

با احترام و سپاس فراوان

تقدیم به پدر و مادرم

تقدیر نامه

سپاس و درود فراوان پروردگار را که چراغ توفیق و سعادت در سر راهم قرار داد تا بتوانم پژوهشی را که در مقابل دریای بی کران علم و دانش استادان گرانمایه سرمایه ای ناچیز است به اتمام برسانم .

در ابتدا از زحمات بی شائبه استاد گرانقدر جناب آقای دکتر عزیزی به عنوان استاد راهنما و همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر علی آبکار که به عنوان استاد مشاور قبول زحمت فرموده اند قدردانی می نمایم.

همچنین از استاد محترم جناب آقای دکتر کیهانی از دانشگاه آزاد اسلامی به خاطر راهنمائیهای بی چشمداشت و مفیدشان که راهگشای اینجانب در نگارش پایان نامه بوده است نهایت سپاسگذاری را دارم.

همچنین از اساتید محترمی که در طول دورهٔ تحصیلی کارشناسی و کارشناسی ارشد از حضورشان در امر درس و تحصیل بهره برده ام کمال تشکر و قدردانی را می نمایم .

بر خود واجب می دانم از پدر و مادرم که حضور پرمهر و معرفتشان اسباب آرامش و ترقی بنده در تمام طول زندگیم بوده است ، برترین سپاس ها را داشته باشم و از درگاه ایزد منان عاقبت به خیری ایشان را خواستارم.

همچنین از خواهران عزیزم ندا و متینه به خاطر حضور مهربانشان که مایه نیک بختی من است و زحماتشان سپاس گذارم.

و همچنین از دیگر دوستان و عزیزانی که به هر طریق از وجودشان در مراحل به اتمام رساندن این رساله بهره مند گشته ام تشکر و قدردانی می کنم.

مریم بهرامی شکیب

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

جلسه دفاع از پایان نامه خانم مریم بهرامی شکیب دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی – آنالیز هارمونیک در مورخ ۸۷/۹/۱۲ تحت عنوان «نیم گروه توپولوژیک (mob) وابسته به گروه توپولوژیک » در دانشگاه تشکیل گردید و مورد تأیید نهایی هیأت داوران قرار گرفت .

هیأت داوران :

۱– استاد راهنما:

آقای دکتر عزیزا... عزیزی

امضاء

۲– استاد مشاور:

آقای دکتر علی آبکار

امضاء

۳– عضو هیأت علمی به عنوان داور خارجی:

آقای دکتر محمد موسایی

امضاء

۴– عضو هیأت علمی به عنوان داور داخلی:

آقای دکتر عبدالرحمن رازانی

امضاء

۵– نماینده تحصیلات تکمیلی:

آقای دکتر شیرویه پیروی

امضاء

چکیده

در این پایان نامه نیم گروه توپولوژیک خاص C(G) مورد مطالعه قرار می گیرد . یک هم ارزی جزئی روی C(G) تعریف می شود که با ساختار نیم گروهی C(G) سازگار است. سپس توپولوژی ویتوریز[1] روی C(G) معرفی و همچنین یک یکنواختی روی C(G) ساخته می شود که توپولوژی تولید شده توسط این یکنواختی همان توپولوژی ویتوریز روی C(G) است .

لازم به تذکر است این پایان نامه بر اساس مقاله ای تحت عنوان زیر استخراج شده است

" AN ASSOCIATED MOB OF A TOPOLOGICAL GROUP"

که توسط گانگیولی[2] و جانا[3] در سال 2006 ارائه شده است .

Acta Math. Univ. Comenianae

Vol. LXXV, 1(2006), pp. 43–53

کلید واژه :

توپولوژی ویتوریز ، هم ارزی جزئی ، شبه ترتیب بسته ،ساختار یکنواخت .

---

1. Vietoris topology

2.S.Ganguly

3.S.Jana

مقدمه

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک هاسدورف است و به طور طبیعی حاصل ضرب زیر مجموعه های آن نیم گروه زیر مجموعه ها را به وجود می آورند . این نیم گروه از همه زیر مجموعه های فشرده و ناتهی گروه توپولوژیک G تشکیل شده است . گردایهٔ $C(G)$ متشکل از همهٔ زیر مجموعه های فشرده و ناتهی گروه توپولوژیک G یک زیر نیم گروه از نیم گروه همهٔ زیر مجموعه های G است .
در فصل 1 وبخش های آن تعاریف و قضایای مورد نیاز را بیان کرده ودر فصل 2 به بررسی ساختار $C(G)$ می پردازیم . در فصل 3 ثابت می کنیم

$\Pi_{\mathcal{K}}= \{(S,T) \in C(G)\times C(G) : ST^{-1}\in \mathcal{H} \}$ یک هم ارزی جزئی روی $C(G)$ است به طوری که $\mathcal{K}$ یک زیر نیم گروه از $C(G)$ با خاصیت

$K\in \mathcal{K}\Rightarrow K^{-1}\in \mathcal{K}$ و $\mathcal{H} =\downarrow \mathcal{K}$ می باشد و این هم ارزی جزئی با ساختار نیم گروهی $C(G)$ سازگار است و کلاسهای متعدد آن را تعیین می کند .

در فصل 4 توپولوژی ویتوریز را معرفی می کنیم که با ساختار جبری $C(G)$ سازگار است و نشان میدهیم.

که $C(G)$با توپولوژی ویتوریز یک mob (نیم گروه توپولوژیک) است .

در فصل 5 یک یکنواختی روی $C(G)$ می سازیم . فرض کنید:

$$V_S=\{(M,N)\in C(G)\times C(G) \mid \forall\, m\in M,\exists\, n\in N : n^{-1}m\in V \;\&\; \forall\, n\in N ,\exists\, m\in M : m^{-1}n\in V\}$$

که در آن $V\in\eta_e$ و η_e یک سیستم همسایگی از e است (e عنصر همانی گروه توپولوژیک G است) در این صورت $\mathcal{B} =\{ V_S: V\in\eta_e\}$ یک پایه برای یک یکنواختی روی $C(G)$ است .

توپولوژی تولید شده توسط این یکنواختی را $\tau(\mathcal{B})$ نامیده و در پایان ثابت می کنیم که $\tau(\mathcal{B})$ همان توپولوژی ویتوریز روی $C(G)$ است [قضیه 2.5] .

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱—۱ تعاریف مورد نیاز

تعریف ۱.۱ : فرض کنید $R \subseteq X \times Y$ ، دراین‌صورت $R^{-1} \subseteq Y \times X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(x, y) \in R^{-1} \Longleftrightarrow (y, x) \in R$$

تعریف ۲.۱ : هرگاه $R \subseteq X \times Y$ و $S \subseteq Y \times Z$ آنگاه ترکیب S و R که با $S \circ R$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x,z) \in S \circ R \Longleftrightarrow \ni y \in Y : (x,y) \in R \;\&\; (y,z) \in S$$

تعریف ۳.۱ : رابطهٔ R روی A یک رابطهٔ هم ارزی است هرگاه :

(۱) برای هر $x \in A$ ؛ xRx (بازتابی)

(۲) برای هر $x,y \in A$ اگر xRy آنگاه yRx (متقارن)

(۳) برای هر $x,y,z \in A$ اگر xRy و yRz آنگاه xRz (متعدی)

تعریف ۴.۱ : رابطه $\leq$ روی X یک ترتیب جزئی است اگربرای هر $x,y,z \in X$:

(۱) $x \leq x$, $\forall x \in X$ (بازتابی)

(۲) اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه $x \leq z$ (متعدی)

(۳) اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آنگاه $x = y$ (پاد متقارن)

رابطه ای که تنها شرایط (۱)و(۲) را برآورده کند یک شبه ترتیب از X نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱ : مجموعهٔ ناتهی S همراه با یک عمل شرکت‌پذیر یک نیم‌گروه[1] نامیده می‌شود.

تعریف ٦.۱ : فرض کنید S یک نیم‌گروه و T زیر مجموعهٔ ناتهی از S باشد،آنگاه:

(الف) T یک زیر نیم گروه[2]از S است اگر $TT \subset T$ $(TT = \{xy \;:\; x,y \in T\})$

(ب)یک زیرگروه[3] از S است اگر T یک گروه نسبت به ضرب در S باشد.

[1] semigroup
[2] subsemigroup
[3] subgroup

تعریف ۷.۱ : عنصر E از نیم گروه S خودتوان[۴] گفته می‌شود اگر $E^{۲} = E$.

۱—۲ گروه توپولوژیک

تعریف ۸.۱ : یک توپولوژی روی مجموعهٔ X گردایه‌ای مانند τ از زیرمجموعه‌های X است که‌درشرایط زیرصدق می کند:

(۱) $\emptyset, X \in \tau$

(۲) اجتماع اعضای هر زیرگردایهٔ τ متعلق به τ است.

(۳) اشتراک اعضای هر زیرگردایهٔ متناهی τ متعلق به τ است.

تعریف ۹.۱ : فضای توپولوژیک عبارت است از زوج مرتب (X, τ) که از مجموعهٔ X و توپولوژی τ در X تشکیل شده است.

مثال ۱۰.۱ : مجموعهٔ دلخواه $X \neq \emptyset$ و گردایهٔ $\tau = \{X, \emptyset\}$ را درنظر بگیرید. τ یک توپولوژی روی X است این توپولوژی به نام توپولوژی ناگسسته یا توپولوژی بدیهی معروف است. در این حالت فضای (X, τ) فضای ناگسسته نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱ : اگر X فضای توپولوژیک با توپولوژی τ باشد ، زیر مجموعهٔ U از X را یک مجموعهٔ باز X خوانیم هرگاه U متعلق به τ باشد.

[۴] idempotent

با به کاربستن این اصطلاح می‌توان گفت که فضای توپولوژیک عبارتست از مجموعه‌ای مانند X همراه با گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های آن ، موسوم به مجموعه‌های باز ، به‌طوری‌که $\emptyset$, X هر دو بازند و اجتماع دلخواه و اشتراک متناهی مجموعه‌های باز نیز باز است.

تعریف ۱۲.۱ : فرض کنید X یک مجموعه باشد ، یک پایه توپولوژی در X گردایه‌ای است از زیر مجموعه های X (موسوم به اعضای پایه) به‌طوری که:

(۱) به ازای هر $x \in X$ ، دست کم یک عضو پایه مانندB شامل x موجود است.

(۲) هرگاه‌برای هر دو عضو از پایه مانند B_1, B_2 ، $x \in B_1 \cap B_2$ آنگاه عضوی از پایه مانند B_3 وجود دارد به‌طوری‌که:

$$x \in B_3 \quad , \quad B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

تعریف ۱۳.۱ : اگر$\mathcal{B}$ پایهٔ توپولوژی در X باشد آنگاه توپولوژی تولید شده τ به وسیلهٔ $\mathcal{B}$ ، چنین تعریف می شود:

زیر مجموعهٔ U از X را در X باز می‌گوییم (یعنی عضوی از τ است) اگر به ازای هر $x \in U$ ، عضوی از پایه مانند $B \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x \in B \subseteq U$.

ملاحظه می‌شود که بنابر تعریف بالا ، هر عضو $\mathcal{B}$ در X باز است ، بنابراین $\mathcal{B} \subseteq \tau$.

بررسی می کنیم که گردایهٔ τ ، تولید شده به وسیلهٔ پایهٔ $\mathcal{B}$ یک توپولوژی در X است . اگر مجموعهٔ U تهی باشد آنگاه U به انتفای مقدم در تعریف باز بودن صدق می کند . همچنین ، مجموعهٔ X در τ است . زیرا به ازای هر $x \in X$ ، عضوی از پایه مانند B هست که شامل x است و $B \subseteq X$. اکنون خانوادهٔ اندیسدار $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ از اعضای τ را در نظر می گیریم و ثابت می کنیم که $U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ به τ تعلق دارد . فرض کنیم x عضو دلخواهی از U باشد ، پس

اندیسی مانند α وجود دارد به‌طوری‌که $x \in U_\alpha$. چون U_α باز است ، یک عضو پایهٔ $\mathcal{B}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \in B \subseteq U_\alpha$. پس $x \in B$ و $B \subseteq U$ و درنتیجه ، بنابر تعریف U باز است .
حال دو عضو U_1 , U_2 از τ را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم $U_1 \cap U_2$ متعلق به τ است .
فرض کنید $x \in U_1 \cap U_2$. عضو پایه مانند B_1 شامل x موجوداست به‌طوری‌که $B_1 \subseteq U_1$.
همچنین ، عضو پایه مانند B_2 شامل x موجود است به‌طوری‌که $B_2 \subseteq U_2$. حال بنابرتعریف پایه عضوی مانند B_3 از پایه هست به‌طوری‌که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. پس بنابر تعریف ، $U_1 \cap U_2$ متعلق به τ است . سرانجام با استقرا ثابت می‌کنیم که‌اشتراک هر تعداد متناهی $U_1, \ldots, U_n$ در τ است . به ازای $n = 1$ حکم بدیهی است ، فرض کنید حکم برای $n-1$ برقرار باشد آن را برای n ثابت می‌کنیم . چون $U_1 \cap \cdots \cap U_n = (U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}) \cap U_n$ وبنابرفرض استقرا ، $U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}$ متعلق به τ است ، به موجب آنچه در مورد دو مجموعه ثابت شد ، اشتراک $U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}$ و U_n نیز به τ تعلق دارند . بدین طریق محقق شد که گردایهٔ مجموعه‌های باز تولید شده به وسیلهٔ پایهٔ $\mathcal{B}$ در واقع یک توپولوژی است .
طریقهٔ دیگر توصیف توپولوژی تولید شده به وسیلهٔ یک پایه در لم زیر ارائه شده است :

لم ۱۴.۱ : فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه و $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی τ در X باشد . در این صورت ، τ برابر است با گردایهٔ همهٔ اجتماع‌های اعضای $\mathcal{B}$. **اثبات:** فرض کنید $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha\in\tau}$ خانوادهٔ اندیسدار دلخواهی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد چون به ازای هر α ، $\mathcal{B}_\alpha \in \tau$ و τ یک توپولوژی است ، پس $\cup \mathcal{B}_\alpha$ نیز به τ تعلق خواهد داشت ، بالعکس ، فرض کنید $U \in \tau$ ، بنابر تعریف ۱۳.۱ ، به ازای هر $x \in U$ عضوی از $\mathcal{B}$ مانند B_x هست که $x \in B_x \subseteq U$. در این صورت $U = \bigcup_{x\in U} B_x$ ، و درنتیجه U برابر است با اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$. $\square$
لم زیر طریقه‌ای برای بدست آوردن یک پایه برای توپولوژی مفروضی بدست می‌دهد.

لم ۱.۱۵ : فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز X باشد به‌طوری‌که به ازای هر x از X و هر مجموعهٔ باز X مانند U که شامل x است، عضوی از $\mathcal{B}$ مانند C وجود داشته باشد که $x \in C \subseteq U$ ، در این‌صورت $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی X است .

اثبات: به [13] مراجعه شود .

لم ۱.۱۶ : فرض کنید $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ به ترتیب ، پایه هایی برای توپولوژی های τ و τ' در X باشند. در این صورت دو حکم زیر با هم معادلند :

(۱) $\tau \subseteq \tau'$

(۲) به ازای هر $x \in X$ و هر عضو پایهٔ $B \in \mathcal{B}$ که شامل x باشد ، یک عضو پایه $B' \in \mathcal{B}'$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \in B' \subseteq B$.

اثبات: به [13] مراجعه شود.

تعریف ۱.۱۷ : گردایهٔ $\mathcal{S}$ از زیر مجموعه های X را یک زیرپایه برای یک توپولوژی بر X می‌خوانند اگر اجتماع اعضای آن برابر X باشد . در این‌صورت ، توپولوژی تولیدشده به وسیلهٔ زیر پایهٔ $\mathcal{S}$ عبارتست از گردایهٔ τ متشکل از همهٔ اجتماع‌های مقاطع متناهی اعضای $\mathcal{S}$.

تعریف ۱.۱۸ : فرض کنید X یک فضای توپولوژیک با توپولوژی τ باشد . اگر Y زیرمجموعه‌ای از X باشد ، گردایه

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

یک توپولوژی در Y است و به توپولوژی زیرفضایی (نسبی) موسوم است . با این توپولوژی ، Y را یک زیر فضای X می‌خوانند ، مجموعه های باز این توپولوژی عبارت اند از همهٔ مقاطع مجموعه‌های باز X با Y .

لم ۱.۱۹ : اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی X باشد آنگاه گردایهٔ

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

پایه‌ای برای توپولوژی زیر فضایی در Y است .

اثبات: به [13] مراجعه شود.

تعریف ۱.۲۰ : فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند .توپولوژی حاصل‌ضربی در $X \times Y$ توپولوژی‌ای است که پایهٔ آن گردایهٔ $\mathcal{B}$ متشکل از همهٔ مجموعه‌هایی به‌صورت $U \times V$ است که در آن U زیرمجموعهٔ بازی از X و V زیرمجموعهٔ بازی از Y است .

قضیه ۱.۲۱ : اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی X و $\mathcal{C}$ پایه‌ای برای توپولوژی Y باشد،آنگاه گردایهٔ

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{C} \ , \ C \in \mathcal{B}\}$$

پایه‌ای برای توپولوژی $X \times Y$ است .

اثبات: به [۲] مراجعه شود .

تعریف ۱.۲۲ : یک تابع f از فضای توپولوژیک (X, τ) در فضای توپولوژیک (X^*, τ^*) در نقطهٔ $x \in X$ پیوسته گفته می‌شود اگروتنهااگر برای هر مجموعهٔ باز G^* شامل $f(x)$ یک مجموعهٔ باز G شامل x موجود باشد به‌طوری‌که :

$$f(G) \subseteq G^*$$

قضیه ۲۳.۱ : فرض کنید Z , Y , X فضاهای توپولوژیک دلخواه باشند :

الف) اگر $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ پیوسته باشند آنگاه $g \circ f : X \longrightarrow Z$ نیز پیوسته است.

ب) (تحدید حوزهٔ تعریف) اگر تابع $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته و A زیر فضایی از X باشد آنگاه تابع $f|_A : A \longrightarrow Y$ نیز پیوسته است .

پ) (تحدید یا گسترش حوزهٔ مقادیر) فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته باشد . اگر Z زیر فضایی از Y و حاوی $f(X)$ باشد ، آنگاه تابع $g : X \longrightarrow Z$ نیز که از تحدید حوزهٔ مقادیر f بدست آمده پیوسته است . اگر Z یک فضا و Y زیر فضایی از آن باشد آنگاه تابع $h : X \longrightarrow Z$ که از گسترش حوزهٔ مقادیر f بدست آمده پیوسته است .

اثبات: به [13] مراجعه شود.

تعریف ۲۴.۱ : یک مجموعهٔ U در یک فضای توپولوژیک (X,τ) یک همسایگی از نقطهٔ x است اگروتنهااگر U شامل یک مجموعهٔ باز باشد که x به آن متعلق باشد .

قضیه ۲۵.۱ : یک مجموعه در فضای X باز است اگروتنهااگر شامل همسایگی از هرکدام از نقاطش باشد .

اثبات: اجتماع U از همهٔ زیر مجموعه های باز مجموعهٔ A ، زیر مجموعهٔ بازی از A است. اگر A شامل یک همسایگی از هر کدام از نقاطش باشد آنگاه هر عضو x از A متعلق به هر زیر مجموعهٔ باز A است و بنابراین $x \in U$. در نتیجه $A = U$ و بنابراین A باز است . از طرفی اگر A باز باشد شامل یک همسایگی از هر کدام از نقاطش است. □

نکته ۲٦.۱ : یک همسایگی از یک نقطه لزوماً مجموعه‌ای باز نیست .

تعریف ۲۷.۱ : مجموعهٔ U در فضای توپولوژیک (X,τ) یک همسایگی از مجموعهٔ A است اگروتنهااگر A زیرمجموعه‌ای از U° نقطه درونی U باشد .

تعریف ۲۸.۱ : یک سیستم (دستگاه) همسایگی از یک نقطه خانواده‌ای از همهٔ همسایگی‌های آن نقطه است .

تعریف ۲۹.۱ : یک پایه برای سیستم همسایگی نقطهٔ x خانواده‌ای از همسایگی‌های x است به‌طوری‌که هر همسایگی از x شامل یک عضو از خانواده باشد .

مثال ۳۰.۱ : خانوادهٔ همسایگی‌های باز از یک نقطه همواره پایه‌ای برای سیستم همسایگی است (طبق تعریف ۲۴.۱).

تعریف ۳۱.۱ : یک زیر پایه برای سیستم همسایگی نقطهٔ x خانواده‌ای از مجموعه‌هاست به‌طوری‌که خانوادهٔ همهٔ اشتراک های متناهی از اعضا یک پایه برای سیستم همسایگی باشد .

تعریف ۳۲.۱ : نگاشت $d : X \times X \to R^+$ یک متر بر X است هرگاه برای هر $x\ ,\ y\ ,\ z \in X$ داشته باشیم :

۱) $d(x,x) = 0$

۲) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

۳) $d(x,y) = d(y,x)$

۴) اگر $x \neq y$ آنگاه $d(x,y) > 0$.

$d(x,y)$ را فاصله بین x و y می نامیم . برای اعداد حقیقی فاصله بین دو عدد x و y به‌فرم $d(x,y) = |x-y|$ تعریف می شود .

تعریف ۳۳.۱ : اگر x یک نقطه از مجموعهٔ X با متر d باشد برای هر عدد حقیقی و مثبت ϵ مجموعهٔ $B(x,\epsilon)=\{y\in X \ : \ d(x,y)<\epsilon\}$ ، گوی با مرکز x و شعاع ϵ نامیده می‌شود .

قضیه ۳۴.۱ : خانوادهٔ همهٔ گوی‌ها از نقاط مجموعهٔ X با متر d تشکیل یک پایه برای توپولوژی X می‌دهند .

اثبات: به [13] مراجعه شود .

تعریف ۳۵.۱ : نقطهٔ x یک نقطهٔ حدی از زیرمجموعهٔ A از فضای X است اگروتنهااگر هر همسایگی از x شامل نقاط دیگری از A غیر از x باشد .

تعریف ۳۶.۱ : یک زیر مجموعهٔ F در یک فضای X بسته است اگروتنهااگر شامل مجموعهٔ نقاط حدی‌اش باشد .

قضیه ۳۷.۱ : اگر F مجموعه‌ای بسته در فضای X باشد مکمل F $(X\setminus F)$ در X باز است .

اثبات: به [16] مراجعه شود .

تعریف ۳۸.۱ : نگاشت $f:X\longrightarrow Y$ (X و Y دو فضای توپولوژیک هستند) نگاشت باز گفته می‌شود ، هرگاه برای هر مجموعهٔ باز U از X مجموعهٔ $f(U)$ در Y باز باشد .

تعریف ۳۹.۱ : فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد :

۱. اگر $A\subseteq G$ و $x\in G$ باشد ؛ تعریف می کنیم :

$$Ax=\{yx \ : \ y\in A\} \ , \ xA=\{xy \ : \ y\in A\} \ , \ A^{-1}=\{y^{-1} \ : \ y\in A\}$$

۲. هرگاه $A,B\subseteq G$ آنگاه $AB=\{xy \ : \ x\in A, y\in B\}$.

تعریف ۴۰.۱ : فرض کنید G یک گروه همراه با یک توپولوژی باشد. هرگاه اعمال $\begin{matrix} G\times G \longrightarrow G \\ (x,y)\longrightarrow xy \end{matrix}$ و $\begin{matrix} G \longrightarrow G \\ x\longrightarrow x^{-1} \end{matrix}$ پیوسته باشند آنگاه G را یک گروه توپولوژیک نامند.

پیوستگی عمل $\begin{matrix} G\times G \longrightarrow G \\ (x,y)\longrightarrow xy \end{matrix}$ یعنی به ازای هر همسایگی U از xy یک همسایگی V از x و یک همسایگی W از y موجود باشد به‌طوری‌که $VW \subseteq U$.

پیوستگی عمل $\begin{matrix} G \longrightarrow G \\ x\longrightarrow x^{-1} \end{matrix}$ یعنی به ازای هر همسایگی U از x^{-1} یک همسایگی V از x وجود داشته باشد به قسمی که $V^{-1} \subseteq U$.

قضیه ۴۱.۱ : فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد دراین‌صورت داریم :

(a) توپولوژی G تحت انتقال و وارون‌گیری پایدار است .
بدین معنی که اگر U باز باشد آنگاه xU و Ux و U^{-1} (برای هر $x \in G$) باز خواهند بود.
همچنین اگر U باز باشد AU و UA $(A \subseteq G)$ نیز باز خواهند بود ،

(b) برای هر همسایگی U از e (e عنصر همانی[۵] در گروه توپولوژیک G است) یک همسایگی متقارن V از e هست که $VV \subseteq U$.

(c) اگر A و B مجموعه‌های فشرده در G باشند آنگاه AB نیز در G فشرده است .

اثبات: (a) نگاشت $x \longrightarrow ax$ همئومرفیسم است . زیرا پیوسته ، یک به یک و پوشا است بعلاوه نگاشت وارونش نیز پیوسته است . چون نگاشت های $x \longrightarrow (x,a)$ و $(x,a) \longrightarrow ax$ پیوسته هستند پس $x \longrightarrow ax$ نیز پیوسته‌است . بنابراین اگر U باز باشد آنگاه aU نیز باز است . چون نگاشت $x \longrightarrow x^{-1}$ پیوسته و وارونش نیز پیوسته است از طرفی پوشا و یک‌به‌یک است لذا همئومرفیسم است . بنابراین هرگاه V باز باشد آنگاه V^{-1} نیز باز است . حال اگر U باز باشد می‌توان نوشت $AU = \bigcup_{x\in A} xU$ طبق مطالب قبل با توجه به باز بودن U، xU نیز باز است ، اجتماع بازها نیز باز است ، لذا AU باز خواهد بود .

---
[۵] Identity