اسکن شد
تاریخ : ۸۱/۱۱/۷
توسط : محمودیان

بسم الله الرحمن الرحیم

۲۴۴۷۲

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
مدیریت مدارک
۱۳۷۸ /۴/ ۲۰

بسمه تعالی

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکدهٔ علوم ریاضی

گروه آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد جهت دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

موضوع:

استنباط آماری در جامعه‌های متناهی با فضای پارامتری متناهی و یافتن برآوردگرهایی با کمترین واریانس

استاد راهنما:

دکتر سیامک نوربلوچی

اساتید مشاور:

دکتر محمد رضا مشکانی

دکتر محمد قاسم وحیدی اصل

نگارش:

جواد اطمینان

تیر ماه ۱۳۷۷

1321/2

۲۴۴۷۲

تاریخ .....
شماره .....
پیوست.....

مورتجلسه دفاع از پایان نامه

::::::::::::::::::::::::::::

جلسه‌هیئت داوران ارزیابی پایان نامه آقای/خانم جواد اطمینان

به‌شناسنامه شماره ۴۹۱ صادره از گرگان متولد ۱۳۵۱

دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ناپیوسته رشته آمار

باعنوان: استنباط آماری درجامعه‌های متناهی وبافضای پارامتری متناهی ویافتن برآوردگرهایی با کمترین واریانس

به راهنمائی دکترسیامک نوربلوچی طبق دعوت قبلی درتاریخ ۷۷/۴/۱۵

تشکیل گردید و براساس رای هیأت داوری وباعنایت به ماده ۴ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ پایان نامه مزبور بانمره هیجده ونیم و درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

۱- آقای دکترسیامک نوربلوچی

۲- آقای دکتر محمدرضامشکانی

۳-

آقای محمدقاسم وحیدی اصل

۴-

۵-

تقدیم به تمام کسانی که مدیونشانم :

پدر و مادر عزیزم

شهدای حوزه و دانشگاه

معلمان و استادهای گرامی

سپاس

"**سپاس** خدایی که اول است بدون آنکه پیش از او اولی باشد وآخر است بدون آنکه پس از او آخری باشد. خدایی که دیده بندگان از دیدنش فرو مانده و اندیشه های توصیف کنندگان از وصفش عاجز شده اند. آفریدگان را به قدرت خود پدید آورده و ایشان را بر وفق خواست خود اختراع فرموده سپس در طرق اراده خود روان ساخته و در پی محبت خود برانگیخته، در حالی که از حدی که برایشان تعیین نموده پیش و پس نتوان نهاد.

سپاس خدای را به هر نهج که نزدیکترین فرشتگان به او و گرامیترین آفریدگان بر او وپسندیده-ترین ستایش کنندگان در پیشگاه او، وی را سپاس گذارند... و سپس حمد او را برای هر نعمتی که بر ذمه ما و همهٔ بندگان گذشته و بازماندهٔ خود دارد، به شمارهٔ هر چیز که علم او به آن احاطه کرده و چندین برابر هر یک از آنها، همیشه و جاوید تا روز رستاخیز. سپاسی که پایان نپذیرد و شماره‌اش به اعصا در نیاید و نهایتش دسترس، و برای مدتش انقطاعی نباشد.

سپاسی که موجب رسیدن به طاعت و عفو او وسبب خشنودی و وسیله آمرزش و راه به سوی بهشت و پناه از انتقام و ایمنی از خشم و پشتیبان طاعت و مانع از نافرمانی و مددکار بر اداء حق و وظایف او باشد. سپاسی که به آن در میان نیکبختان از دوستانش، نیکبخت شویم و به وسیله آن در سلک شهیدان شمشیر دشمنانش در آئیم. همانا که خدا یاری دهنده و ستوده است.

سپاس خدایی را که نعمت محمد(ص) را به ما ارزانی داشت، نه بر امم گذشته... **بارالها** پس رحمت فرست بر محمد، امین وحیت و برگزیدهٔ آفریدگانت و پسندیدهٔ بندگانت، که پیشوای رحمت و قافله سالار خیر و برکت است. ... **بارالها** پس به سبب زحمتی که برای تو کشیده، او را به بالاترین درجات بهشت برآور تا کسی در منزلت با او مساوی نباشد ودر مرتبت با او همسری نکند. ... و قبول شفاعتش را در میان اهل بیت طاهرین و مومنان امتش پیش از آنچه وعده داده ای به او اعلام فرمای، ای کسی که وعده ات نافذست، زیرا که تو صاحب فضل عظیمی!

بارالها، برمحمد والش رحمت فرست و پدر و مادر مرا بکرامت نزد خود و رحمت از جانب خود اختصاص بخش. ... **بارالها**، ایشان را در پرورش من جزای نیک ده و در مقابل گرامی داشتنم مأجور دار و آنچه را که در کودکی برای من منظور داشته اند بر ایشان منظور فرمای. **بارالها**، هر آزار که از من بر ایشان رسیده، یا هر مکروه که از من بر ایشان پیوسته، یا هر حقی که در مقابل

ایشان از طرف من تضیع شده، پس آن را وسیله ریختن گناهان و بلندی درجات و فزونی حسنات ایشان قرار ده، ای کسی که بدیها را به چندین برابر از خوبیها تبدیل میکنی. **بارالها**، هر تندی که در گفتار با من کرده‌اند، یا هر زیاده روی که در کردار با من روا داشته‌اند، یا هر حقی که از من فرو گذاشته‌اند، یا هر وظیفه که در انجامش دربارهٔ من کوتاهی کرده‌اند، پس من ایشان را بخشیدم و آن را وسیلهٔ احسان دربارهٔ ایشان ساختم و از تو می خواهم که بار وبال آن را از دوش ایشان فروگذاری. زیرا که من نسبت به خود گمان بد به ایشان نمیبرم و ایشان را در مهربانی نسبت به خود مسامحه کار نمیدانم و از آنچه درباره‌ام انجام داده‌اند ناراضی نیستم. ای پروردگار من ـ زیرا که رعایت حق ایشان بر من واجبتر و احسانشان به من قدیمیتر و نعمتشان نزد من بزرگتر از آنست که ایشان را در گرو عدالت کشم یا نسبت به ایشان معاوضه به مثل کنم. ... پس بر محمد و آل او رحمت فرست و مرا اعانت کن ای بهترین کسی که از او مدد طلبیده میشود." (صحیفهٔ سجادیه)

بارالها، بر محمد و آلش درود فرست و مرا به بهترین وجهی در رعایت حق معلمانم اعانت کن، و علم آنچه را که دربارهٔ ایشان بر من واجب است به من الهام نما و آموختن همگی آن واجبات را بی کم وکاست برایم فراهم ساز و آنگاه مرا بر آن دار که هر چه به من الهام نموده‌ای بکار بندم و توفیق ده تا در آنچه بصیرت میدهی غور کنم تا با بکار بستن آنچه به من آموخته‌ای، خیری از من فوت نگردد. پس بار خدایا ـ گذشتی که در برای تو و در راه تو انجام داده‌اند از نظر دور مدار و بسب آن فداکاریها و در برابر آنکه خلق را بر تو گرد آوردند، ایشان را از خشنودی خود خشنود ساز و سعی ایشان را مشکور دار. امین یا رب العالمین.

در اینجا بر خود لازم میدانم که از تمام دوستانی که مرا در آماده سازی این رساله یاری داده‌اند، صمیمانه قدردانی و تشکر کنم. از اساتید ارجمند، آقای ***دکتر محمد رضا مشکانی*** و آقای ***دکتر محمد قاسم وحیدی اصل*** به لحاظ خواندن این رساله و ارشادهایشان سپاسگزارم. بویژه از استاد گرامی جناب آقای ***دکتر سیامک نوربلوچی*** که قبول زحمت نموده و راهنمایی اینجانب را بر عهده داشته‌اند و در طول این تحقیق از هیچ کمکی دریغ نورزیده‌اند، کمال تشکر و قدردانی دارم. همچنین از آقای علی آزاده؛ مدیر گروه آمار؛ سرکار خانم فضعلی پور؛ مسئول آزمایشگاه آمار؛ و سرکار خانم ستاری، منشیء گروه آمار به خاطر کمکهایشان سپاسگزارم.

در پایان بر خود لازم میدانم از تمامی اساتیدی که در طول دو دورهٔ کارشناسی و کارشناسی ارشد برای اینجانب زحمت کشیده‌اند و از محضرشان کسب فیض کرده‌ام، بویژه جناب آقای **دکتر *جواد بهبودیان*** و جناب آقای **دکتر *احمد پارسیان*** صمیمانه قدردانی و تشکر کرده و برای تمامی آنها از درگاه خداوند منان آرزوی توفیق روز افزون و موفقیت و خدمت در راه تعلیم ونشر علم و دانش دارم.

جواد اطمینان

تیر ماه ۱۳۷۷

چکیده

از ابتدایی ترین و اساسی ترین مفاهیم استنباط آماری، مفاهیمی همچون برآوردگر، ناارایبی، مینیمم واریانس، بسندگی، کامل بودن و ... است. اگر چه تاکنون مقالات و کتابهای فراوانی در این خصوص نوشته شده است، ولی در اغلب موارد توزیعهایی در نظر گرفته شده است که دارای فضای نمونه‌ای نامتناهی بوده‌اند و اگر مانند توزیع دوجمله‌ای فضای نمونه‌ای آنها متناهی بوده، فضای پارامتریشان نامتناهی بوده است. لیکن در عمل بیشتر با جامعه‌هایی برخورد داریم که فضای نمونه‌ای و پارامتری متناهی دارند.

در این تحقیق ما با در نظر گرفتن توزیعهایی که دارای فضای نمونه‌ای و پارامتری متناهی اند، سعی به بررسی آنها داریم. اگر فضای نمونهٔ ما دارای m عضو و فضای پارامتر دارای k عضو باشد، آنگاه مدل آماری ما یک ماتریس P ، m×k است. ما قصد داریم مفاهیم ذکر شده را برای این حالت گسترش داده و امیدواریم برآوردگرهایی پیدا کنیم که دارای واریانس کمتری نسبت به برآوردگرهای کلاسیک باشند. به عنوان نمونه اگر b بردار پارامتر باشد، آنگاه b برآورد پذیر است اگر و تنها اگر در فضای ستونی ماتریس P باشد. و جواب(های) دستگاه معادلات خطی P x =b برآوردگر(های) ناااریب بردار b است. یا اینکه در این حالت مدل کامل است، اگر و تنها اگر ماتریس مدل پررتبه ستونی باشد.

یکی از دلایلی که در گذشته کمتر به این حالت توجه شده، مشکلات محاسباتی بوده است. بخصوص وقتی بُعد فضای نمونه و پارامتر زیاد شود حل دستگاه فوق با دست، کار آسانی نیست. بنابراین در گذشته با نامتناهی گرفتن فضای پارامتر و با محاسبات دستی و اغلب به کمک فرمولهای پیچیدهٔ ریاضی سعی به حل مسایل خود داشته‌اند. به عنوان نمونه برای به دست آوردن برآوردگریی ناااریب با کمترین واریانس، فضای نمونه را آنقدر بزرگ در نظر می گرفته‌اند تا مدل کامل شود. اما امروزه به کمک کامپیوترهای پیشرفته به سادگی قادر به حل اینگونه مسایل هستیم. از سوی دیگر این روش (نمایش ماتریسی) را طریقی آسان و مفید برای بیان و فراگیری مفاهیم آماری میدانیم.

فصل اول شامل روشهای حل دستگاه معادلات خطی و عملگر تصویر است. در فصل دوم به بررسی مفاهیم آماری پرداخته و سعی کرده‌ایم یک نمایش ماتریسی برای آنها ارائه دهیم. در فصل سوم برآوردگرهایی با کمترین واریانس پیدا کرده و در فصل چهارم در قالب یک کار عملی به مقایسه آنها با برآوردگرهای کلاسیک پرداخته‌ایم.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول: مقدمه‌ای بر جبر خطی

بخش یک: دستگاه معادلات خطی

۱.۱ـ معادلات خطی ۲

۱.۱.۱ـ دستگاه معادلات هم‌ارز ۳

۱.۱.۲ـ سازگاری ۳

۱.۲ـ دستگاه معادلاتی که تنها یک جواب دارند ۴

۱.۲.۱ـ معکوس چپ ۵

۱.۳ـ حل دستگاه معادلات به کمک معکوس تعمیم یافته ۵

۱.۳.۱ـ معکوس مُرپن‌روز ۵

۱.۳.۲ـ معکوس تعمیم‌یافته ۶

۱.۳.۳ـ خواص معکوس تعمیم‌یافته $X'X$ ۷

۱.۴ـ دستگاه معادلات خطی ناهمگن ۸

۱.۴.۱ـ تولید تمام جوابها ۸

۱.۴.۲ـ جوابهای مستقل خطی ۹

۱.۴.۳ـ خاصیت پایایی ۱۰

۱.۵ـ دستگاه معادلات خطی همگن ۱۱

۱.۵.۱ـ جوابهای متعامد ۱۱

عنوان | صفحه

بخش دو: نظری بر جبر خطی ـ تصویر و کاربرد آن

۲.۱ـ بردار حقیقی و فضای برداری ۱۳
۲.۱.۱ـ بردار حقیقی ۱۳
۲.۱.۲ـ فضای اقلیدسی و زیرفضا ۱۴
۲.۲ـ عملگر تصویر ۱۷
۲.۲.۱ـ تولید ماتریس تصویر ۱۸
۲.۲.۲ـ تصویر متعامد ۱۹
۲.۲.۳ـ فضای ستونی و سطری ماتریس ۱۹
۲.۲.۴ـ محاسبه ماتریس تصویر (متعامد) ۲۰
۲.۲.۵ـ خاصیت تقریبی تصویر ۲۰
۲.۳ـ کاربرد تصویر در مدلهای چند متغیره ۲۱
۲.۳.۱ـ مدلهای خطی ۲۱
۲.۳.۲ـ نمایش ماتریس مدل خطی ۲۲
۲.۳.۳ـ برآورد بردار پارامترها به روش کمترین توان دوم خطا ۲۲
۲.۳.۴ـ برآورد بردار میانگین به کمک تصویر قائم ۲۳
۲.۳.۵ـ دستورگرام ـ اشمیت ۲۵
۲.۳.۶ـ استقلال $\hat{a}$ و $\hat{\sigma}^2$ ۲۷

فصل دوم: مفاهیم آماری

۱ـ آزمایش تصادفی ۲۹
۱.۱ـ فضای نمونه ۲۹
۱.۲ـ پیشامد ۲۹
۱.۳ـ رخداد پیشامد ۲۹
۱.۴ـ فضای نمونه متناهی و نامتناهی ۳۰
۲ـ مدل احتمال ۳۰

عنوان	صفحه
۲.۱ـ میدان سیگمایی	۳۰
۲.۲ـ تابع مجموعه‌ای	۳۰
۲.۳ـ فضای احتمال	۳۰
۳ـ مدل احتمال با فضای نمونه متناهی	۳۱
۳.۱ـ نمایش ماتریس مدل احتمال	۳۱
۳.۲ـ اعمال منطقی ۷.۸	۳۲
۳.۳ـ کاهش دادن مدل	۳۳
۴ـ متغیر تصادفی	۳۴
۵ـ مفهوم مدل آماری	۳۴
۶ـ احتمال شرطی	۳۵
۷ـ نگرشی به مفهوم احتمال	۳۶
۸ـ برآوردگر نااریب	۳۷
۸.۱ـ آماره	۳۷
۹ـ بسندگی	۳۸
۹.۱ـ قضیه تجزیه	۴۴
۹.۲ـ آماره بسنده کمینه	۴۴
۹.۳ـ روش لهمن ـ شفه	۴۵
۱۰ـ بسندگی و افرازی از تمام توزیعهای گسسته	۴۶
۱۰.۱ـ مقدمه	۴۷
۱۰.۲ـ یادآوری	۴۷
۱۰.۳ـ افراز کردن فضای پارامتر	۴۹
۱۰.۴ـ نتیجه	۵۵
۱۱ـ مدل آماری	۵۶
۱۱.۱ـ آماره بسنده کمینه	۵۷

عنوان | صفحه

۱۱.۲ـ آماره کامل ۶۰
۱۲ـ قضیه رائو ـ بلاکول ۶۳

فصل سوم: برآوردیابی

۱ـ حل دستگاه معادلات خطی از دیدگاه تصویر ۶۸
۲ـ برآوردیابی ۷۲
۲.۱ـ یافتن برآوردکننده *LMVUE* به کمک روش لاگرانژی ۷۲
۲.۲ـ بهترین برآورد کننده نااریب نقطه‌ای ۷۶
۲.۳ـ یافتن برآوردکننده *LMVUE* از روشی دیگر ۷۷
۲.۴ـ برآورد کننده‌ای با کمترین مجموع واریانسها ۷۹
۲.۵ـ برآورد کننده *MSE* ۸۰

فصل چهارم: کارعملی

مقدمه ۸۴
۱ـ توزیع دوجمله‌ای ۸۵
۱.۱ـ نمونه اول ۸۵
۱.۲ـ نمونه دوم ۹۰
۲ـ توزیع پواسن ۹۵
۲.۱ـ نمونه اول ۹۵
۲.۲ـ نمونه دوم ۱۰۱
۲.۳ـ نمونه سوم ۱۰۸
۳ـ توزیع نرمال ۱۱۵

ضمیمه

منابع فارسی

منابع لاتین

فصل اول

مقدمه‌ای بر جبر خطی

بخش یک
دستگاه معادلات خطی

با توجه به کاربرد زیاد دستگاه معادلات خطی ،به خصوص در مباحث وابسته به مدلهای خطی و به علت استفاده از قضایای معینی از جبر خطی در فصلهای آینده، در این فصل به ارائه نتایجی برای حل دستگاه معادلات خطی می‌پردازیم.

۱ـ۱معادلات خطی[۱]

رابطه:

$$b=a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_qx_q \qquad (1)$$

که b را بر حسب متغیرهای $x_1,x_2,\ldots,x_q$ و عددهای ثابت $a_1,a_2,\ldots,a_q$ بیان می‌کند، معادله خطی نامیده می‌شود. در بسیاری از مواقع b معلوم بوده و باید $x_1,x_2,\ldots,x_q$ را به قسمی تعریف کنیم که در (۱) صدق کنند. مجموعه‌ای از p معادله‌را که هر کدام q مجهول یکسان دارند؛یک دستگاه معادلات خطی با p معادله و q مجهول می‌نامند.

شکل ماتریسی دستگاه معادلات خطی ،به صورت زیر است:

$$Ax=b \qquad (2)$$

x برداری[۲] مجهول از مرتبه $q\times 1$ ، b برداری معلوم و از مرتبه $p\times 1$ و A ماتریس ضرایب،از مرتبه $p\times q$ و معلوم است. هرگاه $b=o$ باشد دستگاه معادلات خطی را همگن می‌نامند. در این صورت دستگاه معادلات حداقل دارای جواب بدیهی $x=o$ است.

۱-Linear equations

۲- مفاهیمی همچون بردار،استقلال خطی و ... در بخش دو همین فصل آورده شده است.

۱ـ۱ـ۱ دستگاه‌معادلات هم‌ارز:

دو دستگاه معادله خطی را هم‌ارز[۱] می‌نامیم هرگاه هر معادله از یک دستگاه ترکیبی خطی از معادلات دستگاه دیگر باشد. روشن است که دستگاه معادلات خطی هم‌ارز، جوابهای یکسان دارند.

۲ـ۱ـ۱ سازگاری:

دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ را سازگار[۲] می‌نامیم هرگاه در صورت وجود هرگونه رابطه خطی بین سطرهای ماتریس A همان رابطه خطی بین مؤلفه‌های بردار b نیز برقرار باشد.

هرگاه A پررتبه سطری باشد هیچ گونه رابطه خطی بین سطرهای A وجود ندارد. پس در این صورت دستگاه سازگار است.

در برخورد اولیه با هر دستگاه معادلهٔ خطی، داشتن جواب یا عدم جواب اولین مطلبی است که مورد توجه قرار می‌گیرد. قضیه زیر یک شرط لازم و کافی برای جواب داشتن دستگاه ارائه می‌کند.

قضیه ۱ـ۱ـ۱: یک دستگاه معادلات خطی دارای جواب است اگر و تنها اگر سازگار باشد.

اثبات: فرض کنید دستگاه سازگار بوده و ماتریس A دارای رتبه r است. با تعویض سطرهای A و مؤلفه‌های b و همچنین ستونهای A و مؤلفه‌های x، به یک دستگاه معادلات هم‌ارز با دستگاه معادلات اولیه می‌رسیم. اگر A ماتریس ضرایب جدید باشد، می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}L \\ KA_{11} & KA_{11}L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} A_{11} \begin{bmatrix} I & L \end{bmatrix}$$

که A_{11} ماتریس ناویژه از مرتبه r است. با تجزیه مناسب x و b داریم:

$$\begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} A_{11} \begin{bmatrix} I & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

بنا به فرض سازگاری داریم:

$$b_2 = Kb_1$$

$$A_{11}(x_1 + Lx_2) = b_1$$

۱-Equivalent equations
۲-Consistent equations