دانشگاه سیستان و بلوچستان
دانشکده ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

زیر سیستم‌های ۲- جذبی قوی سیستم‌ها روی تکواره‌ها و سیستم‌های بدون تاب قوی، E- بدون تاب و $\mathcal{R}$- بدون تاب روی تکواره‌ها

استاد راهنما
دکتر اکبر گلچین
استاد مشاور
دکتر حسین محمدزاده ثانی
پژوهشگر
عباس زارع مغانجوقی

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: زارع مغانجوقی نام: عباس

عنوان: زیر سیستم‌های ۲- جذبی قوی سیستم‌ها روی تکواره‌ها و سیستم‌های بدون تاب قوی، E- بدون تاب و $\mathcal{R}$- بدون تاب روی تکواره‌ها

استاد راهنما: دکتر اکبر گلچین

استاد مشاور: دکتر حسین محمدزاده ثانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: سیستان و بلوچستان دانشکده ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۱۵

واژگان کلیدی: S- سیستم، بدون تابی قوی، E- بدون تابی، $\mathcal{R}$- بدون تابی، ۲- جذبی قوی

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به معرفی انواع خواص بدون تابی از جمله بدون تابی قوی، E- بدون تابی و $\mathcal{R}$- بدون تابی از سیستم‌ها روی تکواره‌ها پرداخته و سپس به دسته بندی تکواره‌ها بر اساس این خواص از سیستم‌ها در حالت کلی، تک دوری، دوری و فاکتور ریس می‌پردازیم. در ادامه خاصیت ۲- جذبی و ۲- جذبی قوی یک زیر سیستم از یک سیستم را معرفی و نشان می‌دهیم که ایدآل‌های ۲- جذبی قوی تکواره‌های منظم و جابجائی، دقیقاً به صورت اشتراک دو ایدآل اول می‌باشند و سپس در مثالی نشان می‌دهیم که این خاصیت در مورد ایدآل‌های ۲- جذبی برقرار نیست.

سپاس‌گزاری...

از استاد راهنمای ارجمندم جناب **آقای دکتر اکبر گلچین** که الگوی صبر و اخلاق برای اینجانب می‌باشند و از استاد گرامی جناب **آقای دکتر حسین محمدزاده ثانی** سپاسگزارم و برای ایشان آرزوی شادکامی و موفقیت در همه مراحل زندگی را دارم و بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر خویش.

عباس زارع مغانجوقی
۱۳۹۲

فهرست مطالب

۱.۰ مقدمه ۱

۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی **۲**

۱.۱ نظریه سیستم‌ها ۲

۲.۱ سیستم‌های هم آزاد، بخش پذیر و انژکتیو و قضایای مرتبط با آن ها ۱۰

۳.۱ سیستم‌های هموار، شرط‌ها و قضایای مرتبط با آن ها ۱۳

۴.۱ تانسور عقب‌برها، مفاهیم و قضایای وابسته به آن ۲۹

۵.۱ مفاهیم و شرط‌های جدید روی سیستم‌ها ۳۷

۲ بدون تابی قوی سیستم‌ها روی تکواره‌ها **۴۲**

۱.۲ تعاریف و خواص اولیه ۴۲

۲.۲ دسته بندی تکواره‌ها بر اساس خاصیت بدون تابی قوی سیستم‌های راست دوری . . ۴۳

۳.۲ دسته بندی تکواره‌ها بر اساس خاصیت بدون تابی قوی سیستم‌های راست تک دوری ۴۹

۴.۲ دسته بندی تکواره‌ها بر اساس خاصیت بدون تابی قوی سیستم‌های راست فاکتور ریس ۵۳

۵.۲ دسته بندی تکواره‌ها بر اساس خاصیت بدون تابی قوی سیستم‌های راست در حالت کلی ۶۱

۳ E- بدون تابی سیستم‌ها روی تکواره‌ها **۶۴**

۱.۳ تعاریف و خواص اولیه ۶۴

۲.۳ دسته بندی تکواره‌ها بر اساس خاصیت E- بدون تابی سیستم‌های راست در حالت کلی ۶۵

۳.۳ دسته بندی تکواره‌ها بر اساس خاصیت E- بدون تابی سیستم‌های راست دوری . . ۶۹

۴.۳ دسته بندی تکواره‌ها بر اساس خاصیت E- بدون تابی سیستم‌های راست تک دوری ۷۵

۵.۳ دسته بندی تکواره‌ها بر اساس خاصیت E- بدون تابی سیستم‌های راست فاکتور ریس ۷۶

۴ $\mathcal{R}$- بدون تابی سیستم‌ها روی تکواره‌ها ۸۳

۱.۴ تعاریف و خواص اولیه ۸۳

۲.۴ دسته بندی تکواره‌ها بر اساس خاصیت $\mathcal{R}$- بدون تابی سیستم‌های راست فاکتور ریس ۸۴

۳.۴ دسته بندی تکواره‌ها بر اساس خاصیت $\mathcal{R}$- بدون تابی سیستم‌های راست دوری . . ۸۹

۴.۴ دسته بندی تکواره‌ها بر اساس خاصیت $\mathcal{R}$- بدون تابی سیستم‌های راست در حالت کلی ۹۴

۵ زیرسیستم‌های ۲-جذبی و ۲-جذبی قوی سیستم‌ها روی تکواره‌ها ۹۹

۱.۵ زیرسیستم‌های اول و نیم اول سیستم‌ها روی تکواره‌ها ۹۹

۲.۵ زیرسیستم‌های ۲- جذبی و ۲- جذبی قوی سیستم‌ها روی تکواره‌ها ۱۰۱

کتاب‌نامه ۱۰۸

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۱۰

۱.۰ مقدمه

مفهوم بدون تابی سیستم‌ها روی تکواره‌ها به فلر [۱]، گانتوس [۲]، کناور [۳] و پتریچ [۴] برمی‌گردد. برای این منظور می‌توان به [۶] و [۱۹] مراجعه نمود. در [۶] در تعریف بدون تابی به جای عناصر حذفی راست از عناصر حذفی استفاده شده است. موقعیت قرار گرفتن خاصیت بدون تابی سیستم‌ها روی تکواره‌ها نسبت به سایر خواص سیستم‌ها روی تکواره‌ها در دنباله‌ای به شرح ذیل می‌باشد:

آزاد بودن $\Leftarrow$ مولد تصویری $\Leftarrow$ تصویری $\Leftarrow$ به طور قوی هموراری $\Leftarrow$ شرط (P) $\Leftarrow$ هموراری $\Leftarrow$ به طور ضعیف هموراری $\Leftarrow$ به طور اساسی ضعیف هموراری $\Leftarrow$ بدون تابی

دسته بندی تکواره‌ها هنگامی که تمام سیستم‌های (دوری، تک دوری، فاکتور ریس) آنها دارای این خاصیت باشند و هنگامی که سیستم‌های با این خاصیت دارای دیگر خواص ذکر شده در زنجیر فوق باشند توسط کناور، بولمن فلمینگ [۵]، نورمک [۶] و لان [۷] مورد بررسی قرار گرفته اند. برای این منظور می‌توان به [۱۷] مراجعه نمود. در این پایان نامه ابتدا خواصی چون بدون تابی قوی، E- بدون تابی و $\mathcal{R}$- بدون تابی سیستم‌ها روی تکواره‌ها را معرفی و سپس به دسته بندی تکواره‌ها هنگامی که تمام سیستم‌ها در حالت کلی، دوری، تک دوری و فاکتور ریس دارای این خواص و یا سیستم‌های با این خواص دیگر خواص سیستم‌ها را نتیجه دهند و بالعکس پرداخته‌ایم.

رساله پیش رو در پنج فصل تنظیم شده است، فصل اول را با تعاریف، مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند آغاز می‌کنیم.

در فصل دوم به معرفی خاصیت بدون تابی قوی سیستم‌ها و دسته بندی تکواره‌ها بر اساس این خاصیت از سیستم‌ها در حالت کلی، دوری، تک دوری و فاکتور ریس پرداخته‌ایم.

در فصل سوم به معرفی خاصیت E- بدون تابی سیستم‌ها و دسته بندی تکواره‌ها بر اساس این خاصیت از سیستم‌ها در حالت کلی، دوری، تک دوری و فاکتور ریس پرداخته‌ایم.

در فصل چهارم به معرفی خاصیت $\mathcal{R}$- بدون تابی سیستم‌ها و دسته بندی تکواره‌ها بر اساس این خاصیت از سیستم‌ها در حالت کلی، دوری و فاکتور ریس پرداخته‌ایم.

در فصل پنجم به معرفی خاصیت ۲- جذبی و ۲- جذبی قوی زیر سیستم‌ها از سیستم‌ها روی تکواره‌ها پرداخته‌ایم و نشان داده‌ایم که هر ایدآل ۲- جذبی قوی از تکواره‌های جابجائی و منظم دقیقاً به صورت اشتراک دو ایدآل اول می‌باشند و سپس در مثالی نشان می‌دهیم که این خاصیت در مورد ایدآل‌های ۲- جذبی برقرار نیست.

---

[۱] E. F. Feller
[۲] R. L. Gantos
[۳] U. Knauer
[۴] M. Petrich
[5] S. Bulman-Fleming
[۶] P. Normak
[۷] V. Laan

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل بعضی از تعاریف و پیش نیازهای لازم در فصل‌های آتی را ارائه می‌دهیم.

۱.۱ نظریه سیستم‌ها

تعریف ۱.۱.۱. *مجموعه S همراه با یک عمل دوتائی*

$$\begin{aligned} \mu :& S \times S \to S \\ & (s,t) \mapsto s.t := \mu(s,t) \end{aligned}$$

یک گروه وار نامیده می‌شود. عمل دوتائی در یک گروه وار معمولاً ضرب خوانده می‌شود و بجای $s.t$ اغلب st نوشته می‌شود.

ضرب در گروه وار S شرکت‌پذیر است، هرگاه به ازای هر $a,b,c \in S$، $(ab)c = a(bc)$. هر گروه وار با ضرب شرکت‌پذیر، نیم‌گروه خوانده می‌شود.

نیم‌گروه S را جابجائی گوئیم، هرگاه برای هر $x,y \in S$، $xy = yx$.

هرگاه نیم‌گروه S شامل عضو ۱ دارای این خاصیت باشد که به ازای هر عضو s از S داشته باشیم $s = ۱s = s۱$، در این صورت، ۱ را عضو همانی S و S را تکواره گوئیم.

عضو s از تکواره S را معکوس پذیر راست (چپ) گوئیم، هرگاه عضوی مانند $t \in S$ موجود باشد به طوری که $st = ۱$ ($ts = ۱$).

تکواره S را گروه گوئیم، هرگاه هر عضو آن معکوس‌پذیر راست و چپ باشد. می‌توان نشان داد که نیم‌گروه S، گروه است اگر وتنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) *عضوی مانند $e \in S$ موجود باشد به طوری که برای هر $a \in S$ داشته باشیم، $ae = a$.*

(۲) به ازای هر $a \in S$، $a^{-1} \in S$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم $aa^{-1} = e$.
هرگاه نیم‌گروه S شامل عضو 0 باشد، به طوری که برای هر $x \in S$، داشته باشیم $x0 = 0x = 0$، در این صورت 0 را عضو صفر S و S را نیم‌گروه صفردار گوئیم.
عضو z از نیم‌گروه S را صفر چپ (راست) گوئیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $zs = z$ ($sz = z$).
عضو c از نیم‌گروه S را حذفی راست گوئیم، اگر به ازای $x, y \in S$، از $xc = yc$ بتوان نتیجه گرفت $x = y$. به طور مشابه عضو حذفی چپ نیز تعریف می‌شود.
عضو s را عضو مرکزی نیم‌گروه S گوئیم هرگاه برای هر $t \in S$، $st = ts$.
عضو s را عضو منظم نیم‌گروه S گوئیم هرگاه $t \in S$ چنان موجود باشد که $s = sts$. نیم‌گروه S را منظم گوئیم هرگاه هر عضو S منظم باشد. نیم‌گروه منظمی که خودتوان‌های آن مرکزی باشند، کلیفورد [1] نامیده می‌شود. ساختار نیم‌گروه‌های کلیفورد در فصل چهار مرجع [۱۶] آمده است.
عضو e از نیم‌گروه S را خودتوان گوئیم، هرگاه $e^2 = e$. مجموعه تمام عناصر خودتوان S با نماد $E(S)$ نشان داده می‌شود. اگر $E(S) = S$، آن گاه S را نیم‌گروه خودتوان می‌نامیم. نیم‌گروه خودتوان و جابجائی را نیم شبکه گوئیم. به راحتی می‌توان دید که تکواره S با عضو همانی ۱ گروه است اگر و تنها اگر S منظم باشد و $E(S) = \{1\}$.
اگر A و B دو زیرمجموعه از نیم‌گروه S باشند AB را با $\{ab \mid a \in A, b \in B\}$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $B^2 = BB$. زیرمجموعه غیرتهی T از S را زیرنیم‌گروه گوئیم، هرگاه $T^2 \subseteq T$.
در صورتی که S تکواره‌ای با عضو همانی ۱ باشد زیرنیم‌گروه T را زیرتکواره گوئیم هرگاه $1 \in T$.
زیرمجموعه غیرتهی K از نیم‌گروه S را ایدآل راست (چپ) S گوئیم، هرگاه $IS \subseteq I$ ($SI \subseteq I$).
ایدآل راست و چپ را ایدآل گوئیم. اگر a عضوی از نیم‌گروه S باشد در این صورت $aS \cup \{a\}$ ($Sa \cup \{a\}$) کوچک ترین ایدآل راست (چپ) S، شامل a است که آن را ایدآل راست (چپ) اصلی تولید شده توسط a گوئیم و با نماد aS^1 (S^1a) نشان می‌دهیم و $Sa \cup aS \cup \{a\}$ کوچک ترین ایدآل S، شامل a است که آن را ایدآل اصلی تولید شده توسط a گوئیم و با نماد S^1aS^1 نشان می‌دهیم.
در صورتی که S تکواره باشد، ایدآل راست (چپ) اصلی تولید شده توسط $a \in S$ را با aS (Sa) نمایش می‌دهیم.

در ادامه S نشان دهنده یک تکواره با عضو همانی ۱ است. حال به تعاریف پایه در رابطه با نظریه سیستم‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه غیرتهی A را یک S- سیستم راست (و یا سیستم راست روی S) نامیم و

[1] Clifford

با A_S نمایش می‌دهیم، هرگاه وجود داشته باشد نگاشت:

$$\mu : A \times S \to A$$
$$(a, s) \mapsto as := \mu(a, s)$$

به طوری که برای هر $a \in A$ و هر $s, t \in S$ شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) $a1 = a$.

(۲) $a(st) = (as)t$.

S- سیستم چپ $_SA$ نیز مشابهاً تعریف می‌شود. هر ایدآل راست (چپ) تکواره S، یک S- سیستم راست (چپ) می‌باشد به خصوص S یک S- سیستم راست (چپ) می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید A_S یک S- سیستم راست باشد. عضو $\theta \in A_S$ را عضو صفر (عضو ثابت) گوئیم، هرگاه به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم، $\theta s = \theta$. هرگاه z عضو صفر چپ از S باشد در این صورت برای هر $a \in A_S$، az به وضوح یک عضو صفر از A_S خواهد بود.

هرگاه A_S یک S- سیستم راست تک عضوی باشد، در این صورت A_S را با نماد Θ_S نشان می‌دهیم، که در آن $\Theta_S = \{\theta\}$. واضح است که در S- سیستم راست Θ_S، عضو θ، عضو صفر Θ_S است.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید A_S یک S- سیستم راست و $A' \subseteq A$ زیرمجموعه‌ای غیرتهی باشد. در این صورت A' را زیر سیستم A_S گوئیم، هرگاه داشته باشیم:

$$(\forall a' \in A')(\forall s \in S), a's \in A'$$

به عبارت دیگر زیر مجموعه غیر تهی A' از A زیرسیستم A_S است، هرگاه تحدید عمل ضرب در A_S به A'، به A' ساختار S- سیستم راست دهد.

بدیهی است که هر ایدآل راست (چپ) از تکواره S زیرسیستمی از S_S ($_SS$) می‌باشد و همچنین هر زیرسیستم S_S ($_SS$) ایدآل راست (چپ) S است.

اگر a عضوی از S- سیستم راست A_S باشد، مجموعه $aS = \{as \mid s \in S\}$ زیر سیستمی از A_S است که آن را زیر سیستم دوری گوئیم.

تعریف ۵.۱.۱. هرگاه S- سیستم راست A_S به جز خودش زیرسیستم دیگری نداشته باشد، سیستم ساده خوانده می‌شود. S- سیستم راست تک عضوی Θ_S به وضوح یک سیستم ساده است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید A_S و B_S، S- سیستم‌های راست باشند. نگاشت $f : A_S \longrightarrow B_S$ را همریختی از S- سیستم‌های راست و یا فقط S- همریختی گوئیم هرگاه برای هر $a \in A_S$ و هر $s \in S$ داشته باشیم $f(as) = f(a)s$. نگاشت همانی $id_A : A_S \longrightarrow A_S$ به وضوح یک همریختی

از S- سیستم‌ها است.

S-همریختی $f : A_S \longrightarrow B_S$ را S- تکریختی گوئیم، هرگاه f نگاشت یک به یک باشد.

S-همریختی $f : A_S \longrightarrow B_S$ را S- برووریختی گوئیم، هرگاه f نگاشت پوشا باشد.

S-همریختی $f : A_S \longrightarrow B_S$ را S- یکریختی گوئیم، هرگاه f نگاشت دوسوئی باشد. در این وضعیت گوئیم A_S و B_S یکریخت هستند و می‌نویسیم $A_S \cong B_S$.

تعریف ۷.۱.۱. *فرض کنید A_S یک S- سیستم راست باشد. رابطه هم‌ارزی ρ روی سیستم A را یک رابطه همنهشتی روی سیستم A_S می‌خوانیم، هرگاه داشته باشیم*

$$(\forall a, a' \in A)(\forall s \in S)(a\rho a' \Rightarrow (as)\rho(a's)).$$

هرگاه $X \subseteq A_S \times A_S$، در این صورت $\rho(X)$ نشان دهنده کوچک ترین همنهشتی روی A_S شامل X است.

همنهشتی ρ، متناهیاً تولید شده خوانده می‌شود، هرگاه زیرمجموعه متناهی $X \subseteq A_S \times A_S$ موجود باشد، به طوری که $\rho = \rho(X)$. همنهشتی ρ را تک دوری گوئیم، هرگاه ρ متناهیاً تولید شده توسط یک عضو $(x, y) \in A_S \times A_S$ باشد. این همنهشتی را با نماد $\rho(x, y)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید ρ یک همنهشتی روی A_S باشد. در این صورت با استفاده از خاصیت همنهشتی ρ، مجموعه $A/\rho = \{[a]_\rho \mid a \in A\}$ با عمل ضرب

$$(\forall a \in A)(\forall s \in S), [a]_\rho s = [as]_\rho$$

یک S- سیستم راست خواهد بود که آن را S- سیستم خارج قسمتی A_S بر ρ گوئیم. یک سیستم خارج قسمتی راست از S توسط یک همنهشتی راست تک دوری، سیستم راست تک دوری خوانده می‌شود.

توجه شود اگر ρ یک همنهشتی راست روی A_S باشد در این صورت به آسانی قابل تحقیق است که نگاشت $\pi_\rho : A_S \to A_S/\rho$ با ضابطه $\pi_\rho(a) = [a]_\rho$ یک همریختی برو است که آن را برووریختی کانونی گوئیم.

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنید S یک تکواره و w, t عناصری از S باشند و $\rho = \rho(wt, t)$. برای $x, y \in S$، $(x, y) \in \rho$ اگر و تنها اگر $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ موجود باشند به طوری که $w^n x = w^m y$ و $w^i x, w^j y \in tS$ برای هر $0 \le i < n$ و هر $0 \le j < m$.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۲۲۰ رجوع شود. □

دو نتیجه زیر از قضیه قبل به دست می‌آیند. به [۱۷]، صفحه ۲۲۰ رجوع شود.

نتیجه ۹.۱.۱. *فرض کنید S یک تکواره و w عضوی از S باشد. برای $x, y \in S$، $(x, y) \in \rho(w, 1)$ اگر و تنها اگر $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ موجود باشند، به طوری که داشته باشیم $w^n x = w^m y$.*

نتیجه ۱.۱.۱۰. فرض کنید S یک تکواره و w عضوی از S باشد و $\rho = \rho(w^2, w)$. برای $x, y \in S$، $(x, y) \in \rho$ اگر و تنها اگر $x = y$ یا $m, n \in \mathbb{N}$ و $p, q \in S$ موجود باشند، به طوری که داشته باشیم $w^n x = w^m y$، $x = wp$ و $y = wq$.

تعریف ۱.۱.۱۱.

(۱) فرض کنید B_S زیرسیستمی از سیستم A_S باشد. همنهشتی ρ_B روی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\forall a, a' \in A)(a\rho_B a' \Leftrightarrow a, a' \in B \vee a = a')$$

این همنهشتی را همنهشتی ریس A_S توسط زیر سیستم B_S گوئیم. سیستم A_S/ρ_{B_S} را با نماد A_S/B_S نشان می‌دهیم و آن را سیستم فاکتور ریس A_S بر زیرسیستم B_S گوئیم. به ویژه اگر $K_S \subseteq S$ یک ایدآل راست باشد، در این صورت S_S/K_S سیستم فاکتور ریس توسط ایدآل راست K_S خوانده می‌شود. معمولاً به جای A_S/B_S و S_S/K_S به ترتیب از نمادهای A/B_S و S/K_S استفاده می‌شود.

(۲) فرض کنید $f : A_S \longrightarrow B_S$ یک S- همریختی باشد. در این صورت رابطه تعریف شده به صورت زیر

$$(\forall a, b \in A_S)(a(kerf)b) \Leftrightarrow f(a) = f(b))$$

که یک رابطه همنهشتی روی A_S است، همنهشتی هسته‌ای از f خوانده می‌شود.

(۳) فرض کنید A_S یک S- سیستم راست و a عضوی از A_S باشد. در این حالت همریختی λ_a از S_S بتوی A_S را به این صورت تعریف می‌کنیم که به ازای هر $s \in S$، $\lambda_a(s) = as$. همنهشتی هسته‌ای $ker\lambda_a$ روی S_S، همنهشتی پوچ ساز $a \in A$ خوانده می‌شود.
مشابهاً اگر $_SA$ یک S- سیستم چپ و a عضوی از $_SA$ باشد، آن گاه همریختی ρ_a از $_SS$ به توی $_SA$ به این صورت تعریف می‌شود که به ازای هر $s \in S$، $\rho_a(s) = sa$. همنهشتی هسته‌ای $ker\rho_a$ روی $_SS$، همنهشتی پوچ ساز $a \in A$ خوانده می‌شود. در سیستم خارج قسمتی A/B_S کلاس شامل B_S، عضو صفر این سیستم و دیگر کلاس‌ها همه تک عضوی هستند، علاوه بر آن برای زیر سیستم B_S از A_S همنهشتی ریس ρ_B، همنهشتی هسته‌ای از π است که در این جا $\pi : A_S \longrightarrow A/B_S$ بروریختی کانونی است.

تعریف ۱.۱.۱۲. زیرمجموعه U از S- سیستم راست A_S را مولد A_S گوئیم هرگاه برای هر $a \in A_S$، عناصر $s \in S$ و $u \in U$ موجود باشند، به طوری که $a = us$. به عبارت دیگر U مجموعه مولد A_S است، هرگاه داشته باشیم: $< U > := \bigcup_{u \in U} uS = A_S$. باید توجه داشته باشیم که هر S- سیستم راست A_S، مجموعه مولد خودش می‌باشد، لذا $A_S = < A >$. در حالت کلی یک S- سیستم راست می‌تواند دارای مجموعه‌های مولد متمایزی باشد.

S-سیستم راست A_S را متناهیاً تولید شده گوئیم، هرگاه زیرمجموعه U از A_S موجود باشد، به طوری که $|U| < \infty$ و $A_S =< U >$. فرض کنید $S = (\mathbb{N}, \cdot)$ و $A_S = \mathbb{N} \setminus \{۱\}$ (با عمل ضرب در اعداد طبیعی). هرگاه مجموعه U همه اعداد اول باشد، آن گاه U مجموعه مولدی برای A_S است و در واقع کوچک ترین مجموعه مولد است. از این رو A_S متناهیاً تولید شده نیست.

A_S را S- سیستم راست دوری گوئیم، هرگاه $u \in A_S$ موجود باشد، به طوری که $A_S =< \{u\} >$. هر سیستم فاکتور ریس از S_S توسط یک ایدآل راست یک سیستم دوری است. در واقع اگر K_S یک ایدآل راست از S باشد، آن گاه $S/K_S =< [۱]_{\rho_K} >$. همچنین برای هر تکواره S، سیستم راست S_S سیستم دوری است زیرا $S_S = ۱S$. زیرسیستم یک سیستم دوری ممکن است حتی متناهیاً تولید شده هم نباشد. به عنوان مثال اگر $S = (\mathbb{N}, \cdot)$، آن گاه $A_S = \mathbb{N} \setminus \{۱\}$ زیرسیستمی از سیستم دوری S_S است که متناهیاً تولید شده نیست.

S-سیستم راست A_S را دوری موضعی گوئیم، هرگاه برای هر $a, b \in A_S$، عضو $z \in A_S$ موجود باشد، به طوری که $a, b \in zS$.

واضح است هر سیستم دوری، دوری موضعی نیز است.

قضیه ۱۳.۱.۱. هرگاه $A_S = aS$ یک S- سیستم دوری باشد، آن گاه $A_S \cong S_S/ker\lambda_a$. همچنین S سیستم راست A_S دوری است، اگر و تنها اگر همنهشتی راست ρ روی S موجود باشد، به طوری که $A_S \cong S_S/\rho$.

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۶۹ رجوع شود. □

تعریف ۱۴.۱.۱. مجموعه مولد U برای S- سیستم راست A_S را یک پایه برای A_S گوئیم، هرگاه برای هر عضو a از A_S تنها یک $s \in S$ و یک $u \in U$ موجود باشند که $a = us$.

هرگاه A_S دارای پایه U باشد، آن گاه A_S را سیستم آزاد و یا به طور دقیق‌تر $|U|$- سیستم آزاد گوئیم. به عنوان مثال S_S یک ۱- سیستم آزاد با پایه $\{۱\}$ است. اگر S یک تکواره باشد به ازای هر مجموعه غیر تهی X همواره می‌توان یک S- سیستم راست با پایه X ساخت.

قضیه ۱۵.۱.۱. S- سیستم راست A_S آزاد است، اگر و تنها اگر A_S یکریخت با اجتماع مجزا از سیستم‌هائی باشد که همگی با S_S یکریخت هستند.

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۶۷ رجوع شود. □

- قضیه زیر نشان می‌دهد که آزاد بودن یک سیستم بر اساس تعریف، مفهوم شیء آزاد در رسته سیستم‌ها را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۱۶.۱.۱. فرض کنید F_S یک S- سیستم راست آزاد با پایه B باشد. هرگاه ϕ نگاشتی از B به توی A_S باشد آن گاه S- همریختی یکتا $\psi : F_S \longrightarrow A_S$ موجود است به طوری که $\psi|_B = \phi$.

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۶۸ رجوع شود. □

قضیه ۱.۱.۱۷. *فرض کنید K_S یک ایدآل راست از تکواره S باشد. سیستم فاکتور ریس S/K_S آزاد است، اگر و تنها اگر $|K_S| = ۱$.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۷۱ رجوع شود. □

حال از قضیه فوق نتیجه زیر به آسانی به دست می‌آید.

نتیجه ۱.۱.۱۸. *S- سیستم تک عضوی Θ_S آزاد است اگر و تنها اگر $S = \{۱\}$.*

تعریف ۱.۱.۱۹. *S- سیستم راست A_S را تجزیه پذیر گوئیم، هرگاه دو زیرسیستم B_S و C_S از A_S موجود باشند به طوری که:*

$$A_S = B_S \cup C_S, B_S \cap C_S = \emptyset$$

در این حالت $A_S = B_S \cup C_S$ یک تجزیه از A_S خوانده می‌شود. هرگاه A_S دارای چنین تجزیه‌ای نباشد، A_S را تجزیه ناپذیر خوانیم.

قضیه ۱.۱.۲۰. *فرض کنید S یک تکواره و A_S یک S- سیستم راست باشد. اگر A_S دوری موضعی باشد، آن گاه تجزیه ناپذیر است.*

اثبات. به [۲۵] رجوع شود. □

عکس قضیه فوق زمانی برقرار است که تکواره S گروه باشد. برای این منظور به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۱.۱.۲۱. *برای هر تکواره S احکام زیر با هم معادلند:*

(۱) *S گروه است.*

(۲) *تمام S- سیستم‌های راست تجزیه ناپذیر، دوری هستند.*

(۳) *تمام S- سیستم‌های راست تجزیه ناپذیر، دوری موضعی هستند.*

اثبات. به [۱۸] رجوع شود. □

قضیه ۱.۱.۲۲. *هر S- سیستم راست، دارای تجزیه یکتایی از اجتماع جدا از هم زیرسیستم‌های تجزیه ناپذیرش می‌باشد.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۶۶ رجوع شود. □

تعریف ۲۳.۱.۱. *فرض کنید A_S و $_SB$ به ترتیب S- سیستم‌های راست و چپ و Y یك مجموعه باشد. نگاشت $\beta : A_S \times_S B \to Y$* **متعادل** *نامیده می‌شود، اگر برای هر $a \in A_S$ ، $b \in_S B$ و $s \in S$ داشته باشیم:*

$$\beta(as, b) = \beta(a, sb).$$

تعریف ۲۴.۱.۱. *فرض کنید A_S و $_SB$ به ترتیب S- سیستم‌های راست و چپ باشند. مجموعه T همراه با نگاشت متعادل $\tau : A_S \times_S B \to Y$ یک* **حاصل ضرب تانسوری** *A و B خوانده می‌شود، اگر برای هر مجموعه Y و هر نگاشت متعادل $\beta : A_S \times_S B \to Y$ نگاشت منحصر به فردی مانند $\beta' : T \to Y$ موجود باشد به طوری که $\beta'\tau = \beta$ ، یعنی نمودار زیر تعویض پذیر باشد:*

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\beta"'] & T \arrow[dl, "\beta'"] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

ساختار: *فرض کنید A_S و $_SB$ به ترتیب S- سیستم‌های راست و چپ و ν کوچک ترین رابطه هم‌ارزی روی مجموعه $A \times B$ تولید شده توسط $T = \{((as, b), (a, sb)) \mid a \in A, b \in B, s \in S\}$ باشد. تعریف می‌کنیم $A_S \otimes_S B = (A \times B)/\nu$ و $[(a, b)]_\nu$ را با نماد $a \otimes b$ نمایش می‌دهیم. در این صورت نگاشت پوشای کانونی $\tau : A \times B \to A \otimes B$ را به صورت $\tau(a, b) = a \otimes b$ تعریف می‌کنیم.*

قضیه ۲۵.۱.۱. *فرض کنید A_S و $_SB$ به ترتیب S- سیستم‌های راست و چپ باشند. در این صورت برای $a, a' \in A_S$ و $b, b' \in_S B$ ، تساوی $a \otimes b = a' \otimes b'$ در $A_S \otimes_S B$ برقرار است، اگر و تنها اگر $n \in \mathbb{N}$ و عناصر $s_1, t_1, \ldots, s_n, t_n \in S$ ، $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A_S$ و $b_1, \ldots, b_n \in_S B$ موجود باشند، به طوری که*

$$\begin{array}{ll}
 & s_1 b_1 = b \\
as_1 = a_1 t_1 & s_2 b_2 = t_1 b_1 \\
a_1 s_2 = a_2 t_2 & s_3 b_3 = t_2 b_2 \\
\ldots & \ldots \\
a_{n-1} s_n = a' t_n & b' = t_n b_n
\end{array}$$

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۱۵۷ رجوع شود. $\square$

۲.۱ سیستم‌های هم آزاد، بخش پذیر و انژکتیو و قضایای مرتبط با آن ها

تعریف ۱.۲.۱. *S- سیستم راست Q_S را انژکتیو گوئیم، هرگاه برای هر تکریختی $\iota : A_S \to B_S$ و هر همریختی $f : A_S \to Q_S$، همریختی $\bar{f} : B_S \to Q_S$ موجود باشد، به طوری که $f = \bar{f}\iota$.*

قضیه ۲.۲.۱. *S- سیستم راست Q_S انژکتیو است، اگر و تنها اگر Q_S نسبت به هر شمول $A_S \subseteq B_S$ انژکتیو باشد.*

اثبات. با استفاده از تعریف به دست می‌آید. □

تعریف ۳.۲.۱. *هرگاه C یک رسته ملموس باشد، در این صورت شیء $K \in C$ را هم آزاد گوئیم، هرگاه مجموعه I و نگاشت $\theta : \lfloor K \rfloor \to I$ موجود باشد، به طوری که برای هر شیء $X \in C$ و هر نگاشت $\zeta : \lfloor X \rfloor \to I$ یک و فقط یک نگاشت $\zeta^* : \lfloor X \rfloor \to \lfloor K \rfloor$ موجود باشد، به طوری که نمودار زیر در رسته مجموعه‌ها جابجائی باشد.*

$$\begin{tikzcd}
I & \lfloor X \rfloor \arrow[l, "\zeta"'] \arrow[dl, "\zeta^*"] \\
\lfloor K \rfloor \arrow[u, "\theta"] &
\end{tikzcd}$$

قضیه ۴.۲.۱. *هر S- سیستم راست هم آزاد با یک S- سیستم راست به شکل*

$$X^S = \{f \mid f : S \to X\}$$

یکریخت است که در آن X یک مجموعه غیرتهی و برای هر $s, t \in S$ داریم: $fs(t) = f(st)$.

اثبات. با استفاده از قضایای ۲.۴.۲ و ۸.۴.۲، مرجع [۱۷] به دست می‌آید. □

قضیه ۵.۲.۱. *هر S- سیستم راست می‌تواند در یک S- سیستم راست هم آزاد نشانده شود. به عبارت دیگر از هر S- سیستم راست، یک تکریختی به توی S- سیستم راست هم آزادی موجود است.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۱۵۰ رجوع شود. □

قضیه ۶.۲.۱. *هر S- سیستم هم آزاد، انژکتیو است.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۱۸۶ رجوع شود. □

تعریف ۷.۲.۱. *فرض کنید $s \in S$ و $a \in A_S$. عضو a در A_S بر s بخش پذیر خوانده می‌شود، هرگاه $b \in A_S$ موجود باشد به طوری که $a = bs$. سیستم A_S، بخش پذیر خوانده می‌شود، هرگاه برای هر عضو حذفی چپ c از S داشته باشیم، $A = Ac$، به عبارت دیگر A_S بخش پذیر است هرگاه هر عضو از A_S بر هر عضو حذفی چپ از S بخش پذیر باشد.*

قضیه ۸.۲.۱. *برای تکواره S احکام زیر معادلند:*

(۱) *تمام S- سیستم‌های راست، بخش پذیر اند.*

(۲) *S_S بخش پذیر است.*

(۳) *هر عضو حذفی چپ از S معکوس پذیر چپ است.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۱۹۵ رجوع شود. □

تعریف ۹.۲.۱. *S- سیستم راست A_S را به طور اساسی انژکتیو ضعیف گوئیم، هرگاه A_S انژکتیو نسبت به همه شمول‌ها از ایدآل‌های راست اصلی S به توی S_S باشد.*

قضیه ۱۰.۲.۱. *برای هر S- سیستم راست A_S احکام زیر معادلند:*

(۱) *A_S به طور اساسی انژکتیو ضعیف است.*

(۲) *برای هر $s \in S$ و هر همریختی $f : sS \to A_S$، $z \in A_S$ موجود است، به طوری که برای هر $x \in sS$، $f(x) = zx$.*

(۳) *برای هر $s \in S$ و هر $a \in A_S$ اگر $ker\lambda_s \leq ker\lambda_a$، آن گاه $z \in A_S$ وجود دارد به طوری که $a = zs$.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۲۰۰ رجوع شود. □

قضیه ۱۱.۲.۱. *تمام S- سیستم‌های راست به طور اساسی انژکتیو ضعیف، بخش پذیر می‌باشند.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۲۰۱ رجوع شود. □

تعریف ۱۲.۲.۱. *S- سیستم راست A_S را fg- انژکتیو ضعیف گوئیم، هرگاه A_S انژکتیو نسبت به همه شمول‌ها از ایدآل‌های راست متناهیاً تولید شده S به توی S_S باشد.*

قضیه ۱۳.۲.۱. *S- سیستم راست A_S، fg- انژکتیو ضعیف است، اگر و تنها اگر برای هر ایدآل راست متناهیاً تولید شده K_S از S و هر همریختی $f : K_S \to A_S$، $z \in A_S$ موجود باشد، به طوری که برای هر $k \in K_S$، $f(k) = zk$.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۲۰۴ رجوع شود. □

تعریف ۱۴.۲.۱. *S- سیستم راست A_S را انژکتیو ضعیف گوئیم، هرگاه A_S انژکتیو نسبت به همه شمول‌ها از ایدآل‌های راست S به توی S_S باشد.*

قضیه ۱۵.۲.۱. *S- سیستم راست A_S، انژکتیو ضعیف است، اگر و تنها اگر برای هر ایدآل راست K_S از S و هر همریختی $f : K_S \to A_S$، $a \in A_S$ موجود باشد، به طوری که برای هر $k \in K_S$، $f(k) = ak$.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۲۰۶ رجوع شود. □

- حال از تعاریف و قضایائی که قبلاً مطرح گردید نتیجه گیری زیر را خواهیم داشت:
هم آزاد بودن $\Rightarrow$ انژکتیوی $\Rightarrow$ انژکتیوی ضعیف $\Rightarrow$ fg- انژکتیوی ضعیف $\Rightarrow$ به طور اساسی انژکتیوی ضعیف $\Rightarrow$ بخش پذیری.

قضیه ۱۶.۲.۱. *برای تکواره S احکام زیر معادلند:*

(۱) *تمام S- سیستم‌های راست، به طور اساسی انژکتیو ضعیف می‌باشند.*

(۲) *تمام ایدآل‌های راست از S، به طور اساسی انژکتیو ضعیف می‌باشند.*

(۳) *تمام ایدآل‌های راست متناهیاً تولید شده از S، به طور اساسی انژکتیو ضعیف می‌باشند.*

(۴) *تمام ایدآل‌های راست اصلی از S، به طور اساسی انژکتیو ضعیف می‌باشند.*

(۵) *S منظم است.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۳۱۰ رجوع شود. □

تعریف ۱۷.۲.۱. *فرض کنید s و $e = e^2$ عناصری از S باشند. در این صورت s را e- حذفی چپ (راست) گوئیم هرگاه $ker\lambda_s = ker\lambda_e$ ($ker\rho_s = ker\rho_e$). تکواره S را راست (چپ) PP گوئیم، در صورتی که برای هر $s \in S$، $e \in E(S)$ موجود باشد، به طوری که s، e- حذفی چپ (راست) باشد.*
واضح است هر تکواره منظم یا حذفی چپ، راست PP است.

قضیه ۱۸.۲.۱. *هرگاه تکواره S راست PP و S_S به طور اساسی انژکتیو ضعیف باشد، آن‌گاه S منظم است.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۳۱۰ رجوع شود. □

قضیه ۱۹.۲.۱. *برای تکواره S احکام زیر معادلند:*

(۱) *تمام S- سیستم‌های راست، fg- انژکتیو ضعیف می‌باشند.*

(۲) *تمام ایدآل‌های راست از S، fg- انژکتیو ضعیف می‌باشند.*

(۳) *تمام ایدآل‌های راست متناهیاً تولید شده از S، fg- انژکتیو ضعیف می‌باشند.*

(۴) *S منظم و تمام ایدآل‌های راست متناهیاً تولید شده از S، اصلی می‌باشند.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۳۱۸ رجوع شود. □

قضیه ۲۰.۲.۱. *برای تکواره S احکام زیر معادلند:*

(۱) *تمام S- سیستم‌های راست، انژکتیو ضعیف می‌باشند.*

(۲) *تمام ایدآل‌های راست از S، انژکتیو ضعیف می‌باشند.*

(۳) *تمام ایدآل‌های راست متناهیاً تولید شده از S، انژکتیو ضعیف می‌باشند.*

(۴) *S منظم و تمام ایدآل‌های راست از S، اصلی می‌باشند.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۳۲۱ رجوع شود. □

تعریف ۲۱.۲.۱. *عضو خودتوان e از تکواره S را ویژه راست گوئیم، هرگاه برای هر همنهشتی راست ρ از S، عضو $k \in eS$ موجود باشد، به طوری که داشته باشیم:*

$$(ke)\rho e \wedge (\forall u, v \in S)(u\rho v \Rightarrow (ku)\rho(kv))$$

هر عضو خودتوان مرکزی از S، یک عضو ویژه راست است، در حقیقت در این حالت $k = e$.

قضیه ۲۲.۲.۱. *تمام S- سیستم‌های راست انژکتیو هستند، اگر و تنها اگر S منظم و شامل عضو صفر باشد. همچنین هر ایدآل راست از S، اصلی و هر عضو خودتوان از S ویژه راست باشد.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۳۳۰ رجوع شود. □

۳.۱ سیستم‌های هموار، شرط‌ها و قضایای مرتبط با آن ها

در این بخش سیستم‌های بدون تاب، انواع مختلف سیستم‌های هموار و برخی شرط‌های موجود بر سیستم‌ها را معرفی می‌کنیم. همچنین دسته بندی‌هایی از تکواره‌ها که از مقایسه این خواص با دیگر خواص حاصل می‌گردند و در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۳.۱. *S- سیستم راست A_S را بدون تاب گوئیم، هرگاه به ازای هر $x, y \in A_S$ و هر عضو حذفی راست c از S، تساوی $xc = yc$* **نتیجه دهد** *$x = y$.*

قضیه ۲.۳.۱. *برای هر تکواره S احکام زیر برقرارند:*

(۱) *S- سیستم تک عضوی Θ_S، بدون تاب است.*

(۲) *تمام ایدآل‌های راست از S، بدون تاب می‌باشند.*

(۳) *سیستم راست A_S، بدون تاب است، اگر و تنها اگر هر زیرسیستم آن بدون تاب باشد.*

(۴) *برای هر $i \in I$، A_i سیستم بدون تاب است، اگر و تنها اگر $A_S = \coprod_{i \in I} A_i$ بدون تاب باشد. (توجه شود هم حاصل ضرب گردایه‌ای از سیستم‌ها در واقع اجتماع مجزای آن هاست.)*

(۵) *برای هر $i \in I$، A_i سیستم بدون تاب است، اگر و تنها اگر $A_S = \prod_{i \in I} A_i$ بدون تاب باشد.*

اثبات. با استفاده از تعریف به آسانی به دست می‌آیند. □

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنید ρ یک همنهشتی راست روی تکواره S باشد. در این صورت S- سیستم راست S/ρ بدون تاب است، اگر و تنها اگر برای هر $s, t \in S$ و هر عضو حذفی راست c از S، $(s, t) \notin \rho$* **نتیجه دهد** *$(sc, tc) \notin \rho$.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۲۱۹ رجوع شود. □

قضیه ۴.۳.۱. *فرض کنید K_S یک ایدآل راست سره‌ای از تکواره S باشد. در این صورت S- سیستم راست فاکتور ریس S/K_S بدون تاب است، اگر و تنها اگر برای هر $s \in S$ و هر عضو حذفی راست c از S، $sc \in K_S$* **نتیجه دهد** *$s \in K_S$.*

اثبات. به [۱۷]، صفحه ۲۲۱ رجوع شود. □

تعریف ۵.۳.۱. *فرض کنید S یک تکواره باشد، $s, t \in S$ و C_r مجموعه عناصر حذفی راست S باشند. اگر*

$$F_1 = \{(x, y) \in S \times S \mid \exists c \in C_r, (xc, yc) \in \rho(s, t)\},$$
$$F_{i+1} = \{(x, y) \in S \times S \mid \exists c \in C_r, (xc, yc) \in \rho(F_i)\}$$

آن گاه $\rho_{TF}(s, t) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \rho(F_i)$ کوچک ترین همنهشتی راست شامل (s, t) می‌باشد به طوری که $S/\rho_{TF}(s, t)$ بدون تاب است.

تعریف ۶.۳.۱. *فرض کنید s عضوی از تکواره S باشد. $L(s)$ زیر مجموعه‌ای از S شامل همه عناصر $t \in S$ است، به قسمی که عناصر $r_1, \ldots, r_m, s_1, \ldots, s_{m-1}$ و عناصر حذفی راست $c_1, \ldots, c_m$ از*

S موجود باشند، به طوری که:

$$s_1 c_1 = s r_1$$
$$s_2 c_2 = s_1 r_2$$
$$\cdots$$
$$t c_m = s_{m-1} r_m$$

چون $s1 = s1$، لذا $s \in L(s)$. بنابراین $L(s) \neq \emptyset$. بر این اساس فرض کنید $K_{TF}(s)$ ایدآل راست از S تولید شده توسط مجموعه $L(s)$ باشد، یعنی $K_{TF}(s) = \bigcup_{t \in L(s)} tS$. در این صورت $K_{TF}(s)$ کوچک ترین ایدآل راست از S شامل s می‌باشد به طوری که، $S/K_{TF}(s)$ بدون تاب است. همچنین اگر $s, t \in S$ و $K_{TF}(s,t) = K_{TF}(s) \cup K_{TF}(t)$، آن گاه به آسانی دیده می‌شود که $K_{TF}(s,t)$ کوچک ترین ایدآل راست از S شامل s و t می‌باشد به طوری که، $S/K_{TF}(s,t)$ بدون تاب است.

- تابعگون $- \otimes A_S$ یک تابعگون همورد از رسته S- سیستم‌های چپ به توی رسته مجموعه‌ها می‌باشد. براساس این که این تابعگون برخی از مفاهیم تعریف شده در رسته S- سیستم‌های چپ نظیر عقب‌برها، مساوی کننده‌ها، تکریختی‌ها و شمول را حفظ کند مفاهیم جدیدی در سیستم‌ها را به شرح ذیل تعریف می‌کنیم.

تعریف ۷.۳.۱.

(۱) *هرگاه تابعگون $- \otimes A_S$ حافظ عقب برها باشد، آن گاه A_S را عقب بر هموار گوئیم.*

(۲) *هرگاه تابعگون $- \otimes A_S$ حافظ مساوی کننده‌ها باشد، آن گاه A_S را مساوی کننده هموار گوئیم.*

(۳) *هرگاه تابعگون $- \otimes A_S$ حافظ عقب برها و مساوی کننده‌ها باشد، آن گاه A_S را به طور قوی هموار گوئیم.*

(۴) *هرگاه تابعگون $- \otimes A_S$ حافظ تکریختی‌ها باشد، آن گاه A_S را هموار گوئیم.*

(۵) *هرگاه تابعگون $- \otimes A_S$ حافظ همه شمول‌ها از ایدآل‌های چپ S به توی $_S S$ باشد، آن گاه A_S را به طور ضعیف هموار گوئیم.*

(۶) *هرگاه تابعگون $- \otimes A_S$ حافظ همه شمول‌ها از ایدآل‌های چپ اصلی S به توی $_S S$ باشد، آن گاه A_S را به طور اساسی ضعیف هموار گوئیم.*

قضیه ۸.۳.۱. *برای تمام S-سیستم‌های راست نتیجه گیری‌های زیر را داریم:*
به طور قوی هموار $\Leftarrow$ عقب بر هموار.
به طور قوی هموار $\Leftarrow$ مساوی کننده هموار $\Leftarrow$ هموار $\Leftarrow$ به طور ضعیف هموار $\Leftarrow$ به طور اساسی ضعیف هموار.