دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

ریاضی محض (هندسه)

موضوع:

فرم‌های ناوردای پیمانه‌ای در $SU(۲)$–کلاف‌های اصلی

تهیه کننده:
راشل ببلّه بالانجی

استاد راهنما:
دکتر ناصر بروجردیان

استاد مشاور:
دکتر بهروز بیدآباد

آبان ۱۳۸۵

چکیده

در این پایان نامه با در نظرگیری G–کلاف اصلی P فرم‌های $\mathfrak{gau}P$–ناوردا و فرم‌های $\mathfrak{aut}P$–ناوردا را روی کلاف J^1P و روی کلاف $\mathcal{C}(P)$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یکسانی طبیعی $J^1P/G \cong \mathcal{C}(P)$ نیز بررسی می‌شود. برای این منظور مفاهیمی از قبیل التصاق در کلاف‌های اصلی و گروه پیمانه‌ای و جبر پیمانه‌ای و کلاف التصاق و کلاف J^1P آورده شده است و در انتها نتایج جالبی در کلاف‌های اصلی با گروه لی $SU(2)$ مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

مرجع این پایان‌نامه، مقاله زیر است:

M. Castrillon Lopez, J. Munoz Masqu

"*Gauge forms on SU(2)-bundles*", Journal of Geometry and Physics(1999)313-330

کلمات کلیدی: کلاف آفین، کلاف اصلی، کلاف الحاقی، گروه تبدیلات پیمانه‌ای، میدان برداری ناوردا، کلاف التصاق، کلاف ۱–جت، فرم‌های تماس استاندارد، ناوردایی پیمانه‌ای

فهرست مندرجات

مقدمه

در حالتی که $\pi : P \longrightarrow M$ یک کلاف اصلی با گروه لی $U(۱)$ باشد، در مقاله‌های [۵] و [٦] ساختار فرم‌های دیفرانسیل ناوردای پیمانه‌ای و همچنین فرم‌های ناوردا تحت میدان‌های برداری ناوردا روی P، روی کلاف التصاق مورد بررسی قرار گرفته است. در صورتی که گروه لی، غیر آبلی باشد به نظر می‌رسد که این ساختار کمی پیچیده باشد، به همین دلیل ابتدا چنین ساختارهای دیفرانسیلی را روی کلاف ۱−جت و سپس، روی کلاف التصاق به دست می‌آورند. این یک روش شناخته شده در نظریه‌های پیمانه‌ای [۴، ۱] می‌باشد که در واقع از اینکه کلاف التصاق‌ها با $J^۱P/G$ یکسان است، استفاده می‌شود.

نظریه پیمانه‌ای صورت هندسی قضیه اتیاما [۱۱، ۴، ۲، ۱] می‌باشد. قضیه اتیاما چگالی‌های لاگرانژینی را که تحت جبر پیمانه‌ای ناوردا هستند، طبقه‌بندی می‌کند.

این پایان‌نامه شامل ٦ فصل می‌باشد که عبارتند از:

فصل اول: در این فصل به بیان پیش‌نیازها و مقدمات مورد نیاز برای ارائه مطالب اصلی پرداخته‌ایم و به طور کلی کلاف تاری، کلاف آفین، فرم‌های دیفرانسیل با مقادیر در جبر لی و گروههای لی ماتریس‌ها و جبرهای لی متناظر آنها را معرفی می‌کنیم و برخی از خواص گروه لی $SU(۲)$ را نیز بیان می‌کنیم.

فصل دوم: در فصل دوم تعریف عمل گروه روی منیفلد می‌پردازیم و سپس کلاف اصلی و کلاف وابسته و کلاف الحاقی را تعریف می‌کنیم.

فصل سوم: فصل سوم به مطالعه گروه یکسانی‌های P و تبدیل پیمانه‌ای وجبر لی این گروهها اختصاص دارد.

فصل چهارم: در این فصل کلاف التصاق معرفی می‌شود و همچنین به معرفی مطالب جالبی از قبیل دستگاه مختصات روی کلاف التصاق، ترفیع میدان‌های برداری به کلاف التصاق و همچنین یک ۴−فرمی روی کلاف التصاق $SU(۲)$−کلاف اصلی می‌پردازیم.

فصل پنجم: در فصل پنجم کلاف ۱−جت برش‌های کلاف تاری و همچنین کلاف ۱−جت برش‌های کلاف اصلی معرفی شده است.

فصل ششم: در این فصل ناوردایی فرم‌ها را روی کلاف التصاق و کلاف ۱−جت تعریف می‌کنیم و همچنین عمل طبیعی گروه لی روی کلاف ۱−جت و ترفیع میدان‌های برداری ناوردای P به کلاف ۱−جت و فرم‌های تماس معرفی می‌شود که در واقع با استفاده از فرم‌های تماس ، فرم‌های ناوردا را روی کلاف ۱−جت بدست می‌آوریم. در نهایت برخی قضیه آورده شده است که ساختار فرم‌های دیفرانسیل ناوردا روی کلاف التصاق و کلاف ۱−جت که از $SU(۲)$−کلاف اصلی به دست می‌آیند، مشخص می‌شود.

فصل ۱

پیش نیازها

مقدمه

در این فصل به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم که پایه کار ما در این پایان‌نامه است. همچنین با کلاف تاری و کلاف آفین و فرم‌های دیفرانسیل با مقادیر در جبر لی آشنا می‌شویم. با توجه به اینکه کار اصلی ما روی گروه $SU(۲)$ است لذا در قسمت آخر به بررسی گروههای ماتریسی می‌پردازیم که در این راستا گروه $SU(۲)$ نیز به روشنی مشخص می‌شود.

۱.۱ کلاف تاری

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید که P و M و F منیفلد باشند. چهارگانه (P, π, M, F) را یک کلاف تاری[۱] نامیم، هرگاه نگاشت $\pi : P \longrightarrow M$، پوشا و هموار و سوبمرسیون باشد و به ازای هر $p \in M$ همسایگی باز U از M حول p و دیفئومورفیسم

$$(\pi, \varphi) : \pi^{-۱}(U) \longrightarrow U \times F$$

موجود باشد. زوج (φ, U) را یک کارت کلاف[۲] برای کلاف P و U را دامنه این کارت می‌نامند.

۱ fiber bundle

۲ bundle chart

تذکر ۱.۱.۱ اگر باز $U \subseteq M$ به گونه‌ای باشد که یک کارت کلاف با دامنه U موجود باشد گوییم کلاف تاری P روی U بدیهی شونده است.

M را منیفلد پایه و F را تار نمونه و P را فضای کل می‌نامند. به ازای هر $p \in M$، $\pi^{-1}(p)$ یک زیرمنیفلد نشاننده P دیفئومورف با F است که آن را با P_p نشان می‌دهیم و تار در نقطه p نام دارد.

تعریف ۲.۱.۱ کلاف تاری (P, π, M) با تار نمونه F را کلاف برداری[۳] نامیم هرگاه F فضای برداری باشد و به ازای هر $p \in M$، $\pi^{-1}(p) = P_p$ فضای برداری باشد و حول هر نقطه M کارت کلافی مانند (φ, U) موجود باشد که φ روی هر P_p که $p \in U$، یک ایزومورفیسم فضای برداری باشد. در این حالت، زوج (φ, U) را یک کارت کلاف برداری برای P می‌نامند.

تعریف ۳.۱.۱ کلاف (P, π, M) با تار نمونه F را در نظر بگیرید. اگر F' زیرمنیفلد نشاننده F باشد و به ازای هر $p \in M$ یک زیرمنیفلد P'_p از P_p را انتخاب کرده باشیم به گونه‌ای که حول هر نقطه M یک کارت کلاف (φ, U) به صورت زیر موجود باشد.

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow F \\ \varphi(P'_p) &= F' \qquad (p \in U) \end{aligned}$$

آنگاه $P' = \bigcup_{p \in M} P'_p$ یک کلاف روی M با تار نمونه F' خواهد بود و P' را یک زیرکلاف[۴] P می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱ در تعریف بالا، اگر P یک کلاف برداری و F' یک زیرفضای برداری F و (φ, U) کارت کلاف برداری باشد، آنگاه P' یک کلاف برداری است و آن را یک زیرکلاف برداری[۵] P می‌نامیم.

---

۳ vector bundle

۴ sub-bundle

۵ vector sub-bundle

تعریف ۵.۱.۱ اگر (P,π,M) یک کلاف تاری باشد، یک نگاشت هموار $M \xrightarrow{s} P$ را که $\pi \circ s = id_M$، یک برش[۶] P می‌نامیم.

نمادگذاری ۱.۱.۱ مجموعه برش‌های کلاف‌های تاری (P,π,M) را با ΓP نمایش می‌دهیم و برش‌های کلاف مماس TM را که میدان برداری روی M نام دارد با $\mathfrak{X}M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ فرض می‌کنیم که $U \subseteq M$ باز باشد، یک نگاشت هموار $s : U \longrightarrow P$، که برای هر $p \in U$، $s(p) \in P_p$، یک برش موضعی کلاف P روی U می‌نامند. مجموعه برش‌های موضعی روی U را با $\Gamma_U P$ نمایش می‌دهیم.

نمادگذاری ۲.۱.۱ مجموعه برش‌های موضعی کلاف (P,π,M) مثل s، حول نقطه $p \in U \subseteq M$ (U باز است) را با نماد $\Gamma_p P$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ اگر (P,π,M) یک کلاف برداری باشد که هر تار آن با بعد k باشد و $X_1,\dots,X_k$ برش‌هایی روی باز U از M باشند به گونه‌ای که در هر نقطه $p \in U$، $\{X_1(p),\dots,X_k(p)\}$ یک پایه P_p باشد، آنگاه آنها را یک برش پایه‌ای موضعی روی U می‌نامیم.

تذکر ۲.۱.۱ در یک کلاف برداری برش‌های پایه‌ای موضعی روی U موجود است اگر و فقط اگر P روی U بدیهی شونده باشد.

[۶] section

تعریف ۸.۱.۱ اگر (P,π,M) و (P',π',M') دو کلاف تاری باشند، نگاشت هموار $f:P\longrightarrow P'$ را نگاشت کلافی[۷] نامیم، هرگاه به ازای هر ξ و η در P داشته باشیم:

$$\pi(\xi)=\pi(\eta) \quad\Longrightarrow\quad \pi'(f(\xi))=\pi'(f(\eta))$$

اگر f دیفئومورفیسم باشد آن را ایزومورفیسم کلافی[۸] می‌نامیم، در این صورت نگاشت g دیفئومورفیسم است.

تبصره ۱.۱.۱ برای هر نگاشت کلاف تاری $f:P\longrightarrow P'$، نگاشت هموار $M\xrightarrow{g}M'$ قابل تعریف است، که $\pi'\circ f=g\circ\pi$.

تعریف ۹.۱.۱ اگر P و P' دو کلاف تاری بر M باشند، نگاشت کلافی $f:P\longrightarrow P'$ را نگاشت کلافی قوی نامیم هرگاه نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \pi\nearrow & & \nwarrow\pi' \\ P & \underset{f}{\longrightarrow} & P' \end{array}$$

به عبارت دیگر $f\circ\pi'=\pi$.

تعریف ۱۰.۱.۱ در صورتی که P و P' دو کلاف برداری روی M باشد نگاشت کلافی قوی f را یک نگاشت کلافی برداری[۹] می‌نامیم، هرگاه f روی هر تار خطی باشد. هرگاه به

[۷] bundle homomorphism

[۸] bundle isomorphism

[۹] vector bundle homomorphism

ازای هر $p \in M$، P_p یکسان با P'_p تحت f باشد آنگاه f ایزومورفیسم کلاف برداری[۱۰] نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱ اگر (P, π, M) یک کلاف و N یک منیفلد و $f : N \longrightarrow M$ یک نگاشت هموار باشد، آنگاه برگشت[۱۱] کلاف P توسط f کلاف $(f^*(P), pr_1, N)$، می‌باشد که فضای کل $f^*(P)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f^*(P) = \{(n, \xi) \in N \times P \ : \ \pi(\xi) = f(n)\} \subseteq N \times P$$

و نگاشت تصویر pr_1 به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$pr_1(n, \xi) = n.$$

برگشت کلاف، یک کلاف تاری است و تار نمونه آن همان تار نمونه کلاف P است و $pr_2 : f^*(P) \longrightarrow P$ نگاشت کلاف تاری نیز می‌باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱ اگر (P, π, M) و (P', π', M) دو کلاف برداری باشند، قرار می‌دهیم $P \times_M P' = \bigcup\limits_{p \in M} P_p \times P'_p$ و اگر F و F' تار نمونه به ترتیب P و P' باشند، $F \times F'$ تار نمونه $P \times_M P'$ خواهد بود و یک نگاشت تصویر به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \pi_0 : P \times_M P' &\longrightarrow M \\ (\xi, \eta) &\longmapsto \pi(\xi) \end{aligned}$$

اگر (φ, U) و (ψ, U) کارت‌های کلاف به ترتیب P و P' باشند، یک کارت کلاف (θ, U) برای $P \times_M P'$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \theta : \pi_0^{-1}(U) &\longrightarrow F \times F' \\ (\xi, \eta) &\longmapsto (\varphi(\xi), \psi(\eta)) \end{aligned}$$

[۱۰] vector bundle isomorphism

[۱۱] pull-back

با این کارت روی $P\times_M P'$ یک ساختار کلاف ایجاد می‌شود و $P\times_M P'$ را ضرب فیبری[۱۲] P و P' می‌نامند. اگر P و P' کلاف برداری باشند، $P\times_M P'$ نیز کلاف برداری و θ ایزومورفیسم فضای برداری است، در این حالت کلاف برداری را با $P\oplus P'$ نشان می‌دهیم و به آن جمع ویتنی[۱۳] P و P' می‌گوییم.

تبصره ۲.۱.۱ فرض می‌کنیم P یک کلاف برداری باشد، دستگاه مختصات (x,U) در M و کارت کلاف (φ,U) را در کلاف برداری P به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$x:U \longrightarrow x(U)\subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(\pi,\varphi):\pi^{-1}(U) \longrightarrow U\times\mathbb{R}^m$$

یک دستگاه مختصات روی P به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\pi^{-1}(U) \longrightarrow x(U)\times\mathbb{R}^m$$

$$\xi \longmapsto (x\circ\pi(\xi),\varphi(\xi))$$

مؤلفه‌های این دستگاه مختصات روی P عبارت‌اند از $x^1\circ\pi,\ldots,x^n\circ\pi,\varphi^1,\ldots,\varphi^m$. قرار می‌دهیم $\overline{x}^i=x^i\circ\pi$. حال میدان‌های پایه‌ای ایجاد شده توسط دستگاه فوق برابر $\frac{\partial}{\partial\overline{x}^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial\overline{x}^n},\frac{\partial}{\partial\varphi^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial\varphi^m}$ است.

یادآوری ۱.۱.۱ تابع هموار $f:M\longrightarrow N$ را در نظر می‌گیریم، فرض کنیم X و Y دو میدان برداری به ترتیب روی M و N باشند در اینصورت X و Y، $f-$مرتبط نامیده می‌شوند، هرگاه به ازای هر $p\in M$ داشته باشیم

$$f_{*p}(X)=Y_{f(p)}.$$

۱۲ fiber product
۱۳ Whitney sum

تذکر ۳.۱.۱ میدان‌های $\frac{\partial}{\partial x^i}$ و $\frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}$، π−مرتبط هستند. همچنین میدان‌های برداری $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ با میدان برداری صفر π−مرتبط هستند، یعنی $\pi_*(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}) = 0$.

۲.۱ کلاف آفین

تعریف ۱.۲.۱ اگر V یک فضای برداری و A یک مجموعه باشد و $\alpha : A \times V \longrightarrow A$ یک تابع باشد، آنگاه سه تایی (A, V, α) یک فضای آفین[۱] نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر x در A وبه ازای هر w و v در V ، سه خاصیت زیر برقرار باشد :

۱) $\alpha(x, 0) = x$;

۲) $\alpha(\alpha(x, v), w) = \alpha(x, v + w)$;

۳) برای هر $y \in A$، عضو منحصر به فردی مثل $v \in V$ موجود است که $\alpha(x, v) = y$.

A را یک فضای آفین با فضای برداری هادی[۲] V می‌گوییم. معمولاً مقدار $\alpha(x, v)$ را با $x + v$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم (A, V, α) و (B, W, β) دو فضای آفین باشند. تابع $T : A \longrightarrow B$ یک نگاشت آفین[۳] نامیده می‌شود هرگاه نگاشت خطی $\overline{T} : V \longrightarrow W$ موجود باشد که به ازای هر $x \in A$ و $v \in V$، داشته باشیم:

$$T(x + v) = T(x) + \overline{T}(v)$$

$\overline{T}$ منحصر به فرد است و قسمت خطی T نامیده می‌شود.

---
۱ affine space
۲ modelled
۳ affine morphism

تعریف ۳.۲.۱ یک نگاشت آفین که معکوس‌پذیر باشد یک ایزومورفیسم آفین[۴] نام دارد زیرا معکوس آن نیز نگاشت آفین می‌باشد؛ می‌توان ثابت کرد T ایزومورفیسم آفین است اگر و فقط اگر $\overline{T}$، قسمت خطی T، یک ایزومورفیسم خطی باشد و در این صورت $\overline{T}^{\,-1} = \overline{T^{-1}}$.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم (A, V, α) یک فضای آفین باشد، زیرمجموعهٔ ناتهی $A' \subseteq A$ را یک یک زیرفضای آفین[۵] A نامیم هرگاه یک زیرفضای برداری $W \subseteq V$ موجود باشد که شرایط زیر برقرار باشند.

۱) برای هر $w \in W$ و هر $x \in A'$ داشته باشیم، $x + w \in A'$.

۲) به ازای هر $x, y \in A'$ عضو منحصر به فرد $w \in W$ موجود باشد که $x + w = y$.

تعریف ۵.۲.۱ فرض می‌کنیم $(E, \pi, M, \mathbb{R}^m)$ کلاف برداری باشد یک کلاف آفین[۶] باکلاف هادی E عبارت است از چهارتایی (A, π', M, α) که دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) $(A, \pi', M, \mathbb{R}^m)$ یک کلاف تاری است.

۲) $\alpha : A \times_M E \longrightarrow A$ یک نگاشت کلافی قوی است.

۳) به ازای هر $p \in M$، $(A_p, E_p, \alpha \mid_{A_p \times E_p})$ یک فضای آفین است.

می توان ثابت کرد که به ازای هر $p \in M$، کارت کلاف (φ, U)، موجود است که به ازای هر $q \in U$، نگاشت $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ روی هر $\pi^{-1}(q)$ یک ایزومورفیسم آفین است. این گونه کارت‌ها را کارت‌های کلاف آفین A می‌نامند.

---

۴ affine isomorphism

۵ affine sub-bundle

۶ affine bundle

مثال ۱.۲.۱ یک کلاف برداری $E \xrightarrow{\pi} M$ و یک میدان برداری $Y \in \mathfrak{X}M$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه بردارهایی از TE، $\pi-$مرتبط با Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $\xi \in E$ قرار می‌دهیم

$$A_\xi = \{v \in T_\xi E \quad | \ \pi_*(v) = Y_{\pi(\xi)}\}$$

در اینصورت $A = A \bigcup\limits_{\xi \in E} A_\xi$ یک کلاف آفین روی E با کلاف برداری هادی $VE = \{ \ Y \in TE \mid \pi_*(Y) = \circ \ \}$ است.

مثال ۲.۲.۱ برای هر کلاف برداری (E, π, M)، یک کلاف آفین (E, π, M, α) بدست می آید که $\alpha : E \times_M E \longrightarrow E$ عمل جمع روی تارهای کلاف E است.

لم ۱.۲.۱ فرض کنیم (A, π', M, α) یک کلاف آفین با کلاف برداری هادی (E, π, M) و $s \in \Gamma A$ باشد، در این‌صورت برش s یک ساختار کلاف برداری روی (A, π', M) القا می‌کند.

اثبات: فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{R}$، $p \in M$ و $x, y \in A_p$ باشند در اینصورت بردار منحصر به فرد $v \in E_p$، وجود دارد که $s(p) + v = x$. تعریف می‌کنیم $y + x := y + v$ و $\lambda x := s(p) + \lambda v$. با این عمل هر تار A_p یک فضای برداری خواهد شد؛ به کمک یک کارت کلاف آفین (φ, U)، کارت کلاف برداری $(\hat{\varphi}, U)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\hat{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi) - \varphi(s_{\pi'(\xi)})$$

▲

تعریف ۶.۲.۱ فرض می‌کنیم (A, π', M, α) یک کلاف آفین با کلاف برداری هادی (E, π, M) باشد، اگر $A' \subseteq A$ زیرکلاف تاری باشد که در هر نقطه $p \in M$، A'_p یک زیرفضای آفین باشد و مجموعهٔ زیرفضاهای هادی A'_pها یک زیرکلاف برداری E باشد، A' را یک زیرکلاف آفین[۷] A می‌نامیم.

[۷] affine sub-bundle

تعریف ۷.۲.۱ فرض می‌کنیم (A,π,M,α) و (B,π',N,β) کلاف‌های آفین باشند، نگاشت کلافی $f:A\longrightarrow B$ یک نگاشت کلافی آفین[۸] نامیم هرگاه به ازای هر $p\in M$،

$$f|_{A_p}:A_p\longrightarrow B_{g(p)}$$

یک نگاشت آفین باشد ($g:N\longrightarrow M$ نگاشت القایی از نگاشت کلاف است).

۳.۱ فرم‌های دیفرانسیل با مقادیر در جبر لی $\mathfrak{g}$

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم که N یک منیفلد و $\mathfrak{g}$ جبر لی باشد. برش‌های کلاف $\Lambda^nT^*N\otimes\mathfrak{g}$ را $n-$فرم‌های دیفرانسیل روی N با مقادیر در $\mathfrak{g}$ می‌نامیم.

مجموعه تمامی $k-$فرم‌های با مقادیر در جبر لی $\mathfrak{g}$ را با $\Lambda^k(N,\mathfrak{g})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۱ فرض می‌کنیم $\varphi\in\Lambda^i(N,\mathfrak{g})$ و $\psi\in\Lambda^j(N,\mathfrak{g})$؛ $[\varphi,\psi]\in\Lambda^{i+j}(N,\mathfrak{g})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$[\varphi,\psi](X_1,\ldots,X_{i+j})=\frac{1}{i!j!}\sum_{\sigma}(-1)^{\sigma}[\varphi(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(i)}),\psi(X_{\sigma(i+1)},\ldots,X_{\sigma(i+j)})]$$

که σ در مجموعه جایگشت‌های $\{1,2,\ldots,i+j\}$ تغییر می‌کند و $(-1)^{\sigma}=\pm1$ که به‌زوج و فرد بودن جایگشت σ بستگی دارد؛ عمل $[\ ,\ ]$ در سمت راست، کروشه‌در جبر لی $\mathfrak{g}$ است و $X_1,\ldots,X_{i+j}$ میدان‌های برداری دلخواه روی M می‌باشند. این عمل نوعی ضرب خارجی است و نسبت به φ و ψ دوخطی است.

---

[۸] affine bundle morphism

قضیه ۱.۳.۱ فرض کنیم که G یک گروه لی ماتریس‌ها باشد (با جبر لی ماتریس‌های $\mathfrak{g}$)، در این صورت به ازای هر $\varphi \in \Lambda^i(P,\mathfrak{g})$ و هر $\psi \in \Lambda^j(P,\mathfrak{g})$ داریم $[\varphi,\psi] = \varphi\wedge\psi - (-1)^{ij}\psi\wedge\varphi$.

در اینجاφ و ψ به عنوان ماتریس‌های فرم‌های با مقادیر در اعداد حقیقی هستند، و $\psi \wedge \varphi$ ماتریس حاصل ضرب است که مولفه‌ها با ضرب خارجی در هم ضرب می‌شوند.

اثبات: رجوع شود به مرجع [۲] صفحهٔ ۴۰. ▲

تبصره ۱.۳.۱ فرض کنیم که $A \in \mathfrak{g}$ و $\overline{\varphi}$ یک $k-$فرم (با مقادیر حقیقی) روی N باشد در این صورت $\overline{\varphi}\otimes A \in \Lambda^k(N,\mathfrak{g})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به ازای هر $X_1,\ldots,X_k \in T_yN$، داریم

$$(\overline{\varphi}\otimes A)(X_1,\ldots,X_k) = \overline{\varphi}(X_1,\ldots,X_k)A$$

برای یک فرم دیگر $\overline{\psi}$ در N و $B \in \mathfrak{g}$ داریم

$$[\overline{\varphi}\otimes A, \overline{\psi}\otimes B] = (\overline{\varphi}\wedge\overline{\psi})\otimes [A,B].$$

با فرض اینکه $E_1,\ldots,E_n$ یک پایه برای $\mathfrak{g}$ و ثابت‌های ساختاری $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ به صورت $[E_\alpha,E_\beta] = \sum c^{\gamma}_{\alpha\beta}E_\gamma$ تعریف شده باشد، به ازای هر $\varphi \in \Lambda^i(N,\mathfrak{g})$ و $\psi \in \Lambda^j(N,\mathfrak{g})$، فرم‌های منحصربه فرد φ^α و ψ^β $(\alpha,\beta = 1,\ldots,n)$ موجودند به طوری که

$$\varphi = \sum \varphi^\alpha \otimes E_\alpha \qquad \text{و} \qquad \psi = \sum \psi^\beta\otimes E_\beta$$

بنابراین داریم

$$[\varphi,\psi] = \sum_{\alpha,\beta}(\varphi^\alpha\wedge\psi^\beta)\otimes[E_\alpha,E_\beta] = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} c^{\gamma}_{\alpha\beta}(\varphi^\alpha\wedge\psi^\beta)\otimes E_\gamma.$$

قضیه ۲.۳.۱ به ازای هر $\varphi \in \Lambda^i(N,\mathfrak{g})$ و $\psi \in \Lambda^j(N,\mathfrak{g})$ و $\rho \in \Lambda^k(N,\mathfrak{g})$ داریم

۱) $[\psi,\varphi] = -(-1)^{ij}[\varphi,\psi]$

$$(-1)^{ik}[[\varphi,\psi],\rho]+(-1)^{kj}[[\rho,\varphi],\psi]+(-1)^{ji}[[\psi,\rho],\varphi]=0 \quad (۲$$

به عبارت دیگر مجموعه فرم‌های دیفرانسیل در N بامقادیر در جبر لی $\mathfrak{g}$ یک جبر لی مدرج است.[۲]

۴.۱ گروه $SU(۲)$

تعریف ۱.۴.۱ مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ از اعداد حقیقی یک گروه لی می‌باشد که با نماد $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۴.۱ مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط یک گروه لی است و آن را بانماد $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۴.۱ $GL(n,\mathbb{R})$،گروه ماتریس‌های نامنفرد $n \times n$ از اعداد حقیقی با ضرب ماتریسی یک گروه لی است. آن را گروه خطی عمومی[۱] می‌نامیم.

تذکر ۱.۴.۱ با توجه به تابع هموار $det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$، قرار می‌دهیم $GL(n,\mathbb{R}) = det^{-۱}(\mathbb{R} - \{۰\})$. بنابراین $GL(n,\mathbb{R})$ زیرمجموعه باز و زیرمنیفلد باز از $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ است.

تعریف ۴.۴.۱ گروه ماتریس‌های $n \times n$ مختلط وارون‌پذیر، گروه خطی عمومی مختلط نام دارد و با نماد $GL(n,\mathbb{C})$ نمایش داده می‌شود.

$GL(n,\mathbb{C})$ یک زیرمنیفلد باز $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ می‌باشد و با ضرب ماتریسی یک گروه لی است.

تعریف ۵.۴.۱ یک ماتریس $A \in GL(n,\mathbb{R})$ متعامد نامیده می‌شود، هرگاه به عنوان یک نگاشت خطی، $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$، حافظ ضرب داخلی کانونیک $\mathbb{R}^n$ باشد.

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \qquad < Ax, Ay > = < x, y > .$$

---

[۱] general linear group