به نام خدا

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

عنوان رساله :

مربع تانسوری ناآبلی گروههای متناهی

ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات جهت اخذ درجه دکتری در رشته ریاضی محض

استاد راهنما :
دکتر احمد عرفانیان

استادمشاور :
دکتر محمد رضا رجب زاده مقدم

مولف :
سید هادی جعفری

تیر ۱۳۸۷

تقدیم به همسر مهربانم

چه می گویید؟
کجا شهد است این آبی که در هر دانه شیرین انگور است؟
کجا شهد است؟ این اشک است
اشک باغبان پیر رنجور است
که شب ها راه پیموده
همه شب تا سحر بیدار بوده
تاک ها را آب داده
پشت را چون چفته های مو دو تا کرده
دل هر دانه را از اشک چشمان نور بخشیده
تن هر خوشه را با خون دل شاداب پرورده
چه می گویید؟
کجا شهد است این آبی که در هر دانه شیرین انگور است؟
کجا شهد است؟ این خون است
خون باغبان پیر رنجور است
چنین آسان مگیریدش
چنین آسان منوشیدش ...

قدردانی

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیات است و چون بر می‌آید مفرح ذات. پس در هر نفس دو نعمت موجود باشد و بر هر نعمتی شکری واجب. ... و می‌فرماید: **من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق.** لذا بر خود لازم می‌دانم که از عزیزانی که اینجانب را در طول دوران تحصیل که حاصل آن رساله حاضر می‌باشد، یاری نموده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم.

در ابتدا از کلیه اساتید ارجمندم در دانشگاه فردوسی مشهد که با حوصله و دلسوزی فراوان، اینجانب را راهنمایی نمودند از صمیم قلب تشکر و قدردانی می نمایم. چرا که بی شک، بدون این گونه تلاش ها و دلسوزی ها ادامهٔ تحصیل در این رشته برایم میسر نبود. همچنین برخود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر احمد عرفانیان، استاد محترم گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد که متحمل زحمات زیادی در امر تدوین این رساله شده و راهنمایی آن را برعهده داشته‌اند، و همچنین در طول دوران تحصیلات تکمیلی گام به گام و با حوصله فراوان اینجانب را یاری نموده‌اند، صمیمانه تشکر نمایم. به علاوه بجاست که از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر محمد رضا رجب زاده مقدم تشکر ویژه ای داشته باشم.

همچنین مراتب تشکر و قدردانی خود را از آقایان دکتر علی رضا سالمکار، دکتر بهروز مشایخی، دکتر محمد مهدی نصر آبادی و دکتر کاظم خشایار منش که داوری رساله حاضر را برعهده داشته‌اند و از راهنمایی های خود اینجانب را بهره مند ساخته‌اند، ابراز می دارم. از رؤسا و معاونین سابق و فعلی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نیز به خاطر همکاری ها و مساعدت های فراوان کمال تشکر و امتنان را دارم. از منشی محترم گروه ریاضی سر کار خانم مختاری، مسئولین محترم کتابخانه و واحد پژوهش دانشکده، آقایان اتحاد، داود نژاد و خانم ها حسینی، صادقی، مسئولین عزیز مرکز رایانه، آقای وطن دوست و خانم نخعی و مسئول محترم واحد انتشارات آقای مؤمن، نیز قدردانی می شود. در نهایت از مسئولین محترم آموزش دانشکده خانم ها محمدی و حقیقی و آقایان کیانی و افضلی و امور

عمومی دانشکده، آقای سلطانی فر و همچنین مسئولین محترم حسابداری آقایان پیله چیان، رئیسی و حسن زاده و سایر زحمت کشان دانشکده علوم ریاضی از جمله آقای پازوکی، بخش خدمات و نگهبانی نیز به خاطر هماهنگی ها و مساعدت های لازم در طول دوران تحصیل اینجانب، سپاسگزاری می نمایم.

در انتها از زحمات خانواده خود و همسرم و همچنین دوستانم آقایان پیمان نیرومند، رشید رضایی، محمد کاظم انوری و سایر دوستانم از جمله استاد عزیزم جناب آقای دکتر فرشید سعیدی قدر دانی می نمایم.

سید هادی جعفری

تیر ماه ۱۳۸۷

فهرست مندرجات

مقدمه

حاصلضرب تانسوری ناآبلی در $K-$ **نظریهٔ جبری**[1]، توپولوژی جبری و نظریه هموتوپی ریشه دارد. با توجه به تحقیقات و بررسیهایی که در زمینهٔ سابقهٔ این موضوع به عمل آمده است مشخص شده است که بعضی از زمینه های فکری اولیهٔ حاصلضرب تانسوری ناآبلی، در کارهای مقدماتی **وایتهد**[2] [۴۵] دیده می شود. همچنین مفهوم مربع تانسوری ناآبلی برای اولین بار به صورت اساسی در کارهای **دنیس**[3] [۱۲] و برخی از نظریه های اولیهٔ آن در کارهای **میلر**[4] [۳۳] مورد بررسی قرار گرفته است.

در ادامهٔ این پژوهشها ، **لیو**[5] [۳۲] در مقاله های خود، حاصلضرب تانسوری ناآبلی را برای گروههای پوچ توان به صورت کاملاً مستقل تعریف کرد. بعد از آن **براون و لودی**[6] [۱۰] هنگام بررسی نتایج قضیهٔ **ون کامپن**[7] و هنگامی که برای به دست آوردن شیء **برگشت**[8] در رسته **مربعهای متقاطع شده**[9] تلاش می کردند که آن را در نظریه هموتوپی به کار بگیرند، حاصلضرب تانسوری ناآبلی را به

---

[1] Algebric K-Theory
[2] J.H.C.Whitehead
[3] K.Dennis
[4] C. Miller
[5] A. S. T. Lue
[6] R. Brown and J. L. Loday
[7] Van Kampen
[8] Pushout
[9] Crossed Squares

عنوان **مربع متقاطع شده جهانی**[۱] تعریف کردند. آنها بعدها متوجه شدند که قبلاً کارهای مرتبطی در این زمینه انجام شده است.

به منظور کامل کردن تعریف، آنها با دقت در روابط موجود در حاصلضرب تانسوری گروههای آبلی و برای آنکه این مفهوم را برای گروه غیر آبلی G نیز تعریف کنند ابتدا نگاشت

$$\begin{aligned} [\, ,\,] : G \times G &\rightarrow G \\ (g,h) &\mapsto [g,h] = ghg^{-1}h^{-1} \end{aligned}$$

موسوم به نگاشت جابجاگر را در نظر گرفتند. سپس با دقت در خواص زیر

$$\begin{aligned} [gg', h] &= [{}^g g', {}^g h][g,h] \\ [g, hh'] &= [g,h][{}^h g, {}^h h'] \end{aligned}$$

توانستند به طور طبیعی گروه $G \otimes G$ را تعریف کنند که روابط آن الهام گرفته شده از این روابط بوده و دارای خاصیت جهانی در رسته اشیاء دارای این خواص می باشد.

بدین ترتیب در سال ۱۹۸۷ تعاریف و محاسباتی دربارهٔ حاصلضرب تانسوری ناآبلی در مقاله‌ای که به وسیلهٔ براون ، **جانسون**[۲] و **رابرتسون**[۳] [۸] به چاپ رسید با جزئیات کامل و به صورت مفصل ارائه شد به طوریکه بعد ها باعث جلب توجه ریاضیدانان به این مفهوم به عنوان موضوعی در نظریهٔ گروهها گردید و مقالات زیادی در این زمینه به چاپ رسید.

در این رساله پس از ارائه تعاریف و مقدمات مورد نیاز در فصل اول، به موضوعات اصلی می پردازیم که در چهار فصل جمع آوری شده است.

فصل دوم مربوط به محاسبه $G \otimes G$ برای گروههای خطی عام، خاص، عام تصویری و خاص تصویری می باشد. در بخش اول از این فصل تاریخچه محاسبات $G \otimes G$ ارائه می شود و در بخش دوم نتایج اصلی که حاصل مقاله [۲۲] می باشد ارائه می گردد.

فصل سوم شامل دو بخش می باشد. بخش اول مربوط به سابقه تلاشهای انجام شده در زمینه

[۱] Universal Crossed Square
[۲] D.L.Johnson
[۳] E.F.Robertson

دسترسی به مرتبه گروه $G \otimes G$ می باشد. در بخش دوم نتایج مقاله [۲۱] با توضیحات بیشتر ارائه می گردد. این نتایج اختصاص به ارائه فرمولی برای محاسبه مرتبه $G \otimes G$ و همچنین استفاده کاربردی از این فرمول در راستای شناسایی ساختار $G \otimes G$ برای p–گروههای مازاد خاص دارد.

در فصل چهارم با استفاده از فرمول ارائه شده در فصل سوم، ساختار $G \otimes G$ را برای گروههای از مرتبه خالی از مربع، $p^۲q$، $pq^۲$ و $p^۲qr$ که در آن $p < q < r$ معرفی می کنیم. این نتایج در مقاله [۲۸] ارائه شده است.

فصل انتهایی نیز شامل سه بخش خواهد بود. بخش نخست درباره نتایج به دست آمده و مقدمات مربوط به مفهوم توانایی گروههاست. در بخش دوم خواصی در ارتباط با مرکز تانسوری و مرکز بیرونی گروه G و ارتباط آن با توانایی یک گروه ارائه می گردد و بالاخره در بخش سوم از این فصل، برخی ویژگیهای زیر گروه $J_۲(G)$ از گروه $G \otimes G$ معرفی می شود. مجموعه نتایج جدید این دو بخش در مقاله [۳۴] ارائه شده است.

نرم افزار HAP مربوط به محاسباتی در مورد $G \otimes G$ در پیوست انتهایی این رساله به طور مختصر معرفی شده است.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

در این فصل، برخی نتایج و مقدمات مورد نیاز را که در فصلهای بعدی مورد استفاده خواهد بود بیان می کنیم. این فصل مشتمل بر سه بخش می باشد. در بخش اول حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروههای متناهی معرفی می گردد. بخش دوم به معرفی ضربگر شور یک گروه متناهی اختصاص دارد و در بخش سوم به اختصار برخی گروههای خطی را معرفی می نمائیم.

۱.۱ حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروهها

در این بخش برای ارائه تعریف حاصلضرب تانسوری ناآبلی ابتدا لازم است چند تعریف مقدماتی را بیان نمائیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید G و H گروههایی دلخواه باشند. در این صورت عمل G بر H نگاشتی است مانند $G \times H \longrightarrow H$ با ضابطهٔ $(g,h) \mapsto {}^{g}h$ به ازای هر $g \in G$ و هر $h \in H$، به طوری که

الف) ${}^{1_G}h = h$،

ب) به ازای هر $g_1, g_2 \in G$ داشته باشیم ${}^{g_1 g_2}h = {}^{g_1}({}^{g_2}h)$،

ج) به ازای هر $h_1, h_2 \in H$ داشته باشیم ${}^{g}(h_1 h_2) = {}^{g}h_1 \, {}^{g}h_2$.

به سادگی از این تعریف مشاهده می شود که ${}^{g}1_H = 1_H$ و ${}^{g}h^{-1} = ({}^{g}h)^{-1}$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید G و H گروههایی دلخواه و $g, g' \in G$ و $h, h' \in H$ باشند و G و H روی خودشان به صورت مزدوج عمل کنند یعنی $(g,g') \mapsto {}^{g}g' = gg'g^{-1}$ و $(h,h') \mapsto {}^{h}h' = hh'h^{-1}$. همچنین فرض کنید G روی H با عمل $(g,h) \mapsto {}^{g}h$ و H روی G با عمل $(h,g) \mapsto {}^{h}g$ عمل کند. در این صورت گوییم گروههای G و H روی یکدیگر به صورت سازگار[1] عمل می کنند، هر گاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$
{}^{({}^{g}h)}g' = {}^{g}({}^{h}({}^{g^{-1}}g')) \quad , \quad {}^{({}^{h}g)}h' = {}^{h}({}^{g}({}^{h^{-1}}h'))
$$

این شرایط در تعریف فوق از آنجا حاصل شده است که حالتهای دیگر این گونه عملهای سه‌تایی

[1] Compatible

همیشه برقرار می باشند یعنی

$$
\begin{aligned}
{}^{({}^{h'}h)}g' &= {}^{h'hh'^{-1}}g' = {}^{h'}({}^{h}({}^{h'^{-1}}g'))\ ,\\
{}^{({}^{h}g)}g' &= {}^{h}gg'^{h}g^{-1} = {}^{h}(g\,{}^{h^{-1}}g'g^{-1}) = {}^{h}({}^{g}({}^{h^{-1}}g'))\ ,\\
{}^{({}^{g'}g)}h' &= {}^{g'gg'^{-1}}h' = {}^{g'}({}^{g}({}^{g'^{-1}}h'))\ ,\\
{}^{({}^{g}h)}h' &= {}^{g}hh'^{g}h^{-1} = {}^{g}(h\,{}^{g^{-1}}h'h^{-1}) = {}^{g}({}^{h}({}^{g^{-1}}h'))\ .
\end{aligned}
$$

اکنون به تعریف مهم و اساسی در این بخش یعنی حاصلضرب تانسوری ناآبلی دو گروه دلخواه G و H می پردازیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید گروههای G و H روی خودشان به صورت مزدوج و روی یکدیگر به صورت سازگار عمل کنند. در این صورت **حاصلضرب تانسوری ناآبلی**[1] $G \otimes H$ گروهی است که توسط عناصری به صورت $g \otimes h$ تولید می شود و در روابط زیر صدق می کند. به عبارت دیگر به ازای هر $g, g' \in G$ و هر $h, h' \in H$ داریم:

$$
\begin{aligned}
gg' \otimes h &= ({}^{g}g' \ \otimes\ {}^{g}h)(g \otimes h)\ ,\\
g \otimes hh' &= (g \otimes h)({}^{h}g \ \otimes\ {}^{h}h')\ .
\end{aligned}
$$

حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروههای G و H را می توان به صورت زیر نیز در نظر گرفت.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید G و H دو گروه دلخواه باشند که روی یکدیگر عمل می کنند و F یک **گروه آزاد**[2] روی $G \times H$ باشد. (مرجع [۳۸] را ملاحظه نمائید.) همچنین فرض کنید K بستار نرمال گروهی باشد که توسط عناصری به صورت زیر تولید می شود:

$$
\begin{aligned}
&(gg', h)(({}^{g}g'\ ,\ {}^{g}h)(g, h))^{-1}\ ,\\
&(g, hh')((g, h)({}^{h}g\ ,\ {}^{h}h'))^{-1}\ .
\end{aligned}
$$

[1] Non-Abelian Tensor Product
[2] Free Group

که در آن $g, g' \in G$ و $h, h' \in H$. در این صورت گروه خارج قسمت F/K را حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروههای G و H نامند و با $G \otimes H$ نشان داده می شود. ملاحظه می شود که در این تعریف، مولدهای F/K در روابط تعریف ۳.۱.۱ صدق می کنند.

با توجه به روابط موجود در تعریف ۳.۱.۱، به ازای هر $g \in G$ و $h \in H$ داریم

$$۱_g \otimes h = g \otimes ۱_h = ۱_g \otimes ۱_h = ۱_\otimes \,.$$

اگر در تعریف قبل $G = H$ در نظر گرفته شود آنگاه G روی G به طور مزدوج که یک عمل سازگار است عمل می کند و حاصلضرب تانسوری حاصل یعنی $G \otimes G$ را **مربع تانسوری ناآبلی**[۱] G می نامیم.

از اولین موضوعات مورد مطالعه درباره $G \otimes G$ بررسی انتقال خواص گروه G به این گروه بوده است. در سال ۱۹۸۷ **الیس**[۲] نشان داده است که اگر G گروهی متناهی باشد، آنگاه $G \otimes G$ نیز گروهی متناهی است. همچنین وی ثابت کرده است که اگر G یک $p-$ گروه باشد، آنگاه $G \otimes G$ نیز $p-$ گروه است.(مرجع [۱۳] را ملاحظه کنید.) همچنین نشان داده شده است که اگر G گروهی پوچ توان (حل پذیر) باشد آنگاه گروه $G \otimes G$ نیز پوچ توان (حل پذیر) می باشد. (مراجع [۸] و [۴] را ملاحظه کنید.) علاوه بر آن خاصیت **چند دوری**[۳]بودن گروه نیز به مربع تانسوری ناآبلی آن منتقل می شود. (مرجع [۳۵] را ملاحظه نمایید.)

در جبر مقدماتی و در مبحث حاصلضرب تانسوری مدولها با قضیه جامع تانسوری آشنا شدیم. اکنون برای تعمیم این قضیه می توان متناظر با **نگاشت خطی میانه**[۴] نگاشت معرفی شده در تعریف زیر را در نظر گرفت:

<u>تعریف ۵.۱.۱.</u> فرض کنید G ، H و L گروههایی دلخواه باشند که G و H بر روی یکدیگر عمل

[۱] Non-Abelian Tensor Square
[۲] G.Ellis
[۳] Polycyclic
[۴] Middle Linear Map

می کنند. در این صورت تابع $\phi : G \times H \longrightarrow L$ را **جفت متقاطع شده**[1] نامند هر گاه به ازای هر $g, g' \in G$ و هر $h, h' \in H$،

$$\phi(gg', h) = \phi({}^{g}g', {}^{g}h)\phi(g, h) \ ,$$

$$\phi(g, hh') = \phi(g, h)\phi({}^{h}g, {}^{h}h') \ .$$

قضیه ۱.۱.۶.(تعمیم قضیهٔ جامع تانسوری) فرض کنید A ، B و C گروههایی دلخواه باشند. در این صورت به ازای تابع جفت متقاطع شده $f : A \times B \longrightarrow C$، همریختی یکتای $\bar{f} : A \otimes B \longrightarrow C$ وجود دارد به طوری که نمودار زیر تعویض پذیر است:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & A \otimes B \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & C \end{tikzcd}$$

که در آن $i : A \times B \longrightarrow A \otimes B$ با ضابطهٔ $(a, b) \longmapsto a \otimes b$ تابع جفت متقاطع شده است و $A \otimes B$ با خاصیت فوق تا حد یکریختی یکتاست.

__برهان.__ فرض کنید F گروهی آزاد روی $A \times B$ باشد و K زیر گروهی از F باشد که در قسمت قبل تعریف شد. در این صورت بنا بر تعریف گروه آزاد، برای گروه دلخواه C و تابع $f : A \times B \longrightarrow C$، همریختی یکتای $f_1 : F \longrightarrow C$ وجود دارد به طوری که نمودار زیر جابجایی است:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "inc"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "f_1"] \\ & C \end{tikzcd}$$

[1] Crossed Pair

حال ادعا می کنیم $K \subseteq Ker\, f_1$. زیرا به عنوان مثال

$$\begin{aligned} f_1((aa',b)((^{a}a'\ ,\ ^{a}b)(a,b))^{-1}) &= f_1(aa',b)f_1((((^{a}a'\ ,\ ^{a}b)(a,b))^{-1}) \\ &= f_1(aa',b)(f_1(^{a}a'\ ,\ ^{a}b)(a,b))^{-1} \\ &= f_1(^{a}a'\ ,\ ^{a}b)f_1(a,b)(f_1(^{a}a'\ ,\ ^{a}b)f_1(a,b))^{-1} \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

چون بنا به فرض f و در نتیجه f_1 جفت متقاطع شده است. بنابراین $\bar{f} : F/K \longrightarrow C$ یک همریختی است و چون $F/K = A \otimes B$ پس

$$\bar{f}i(a,b) = \bar{f}(a \otimes b) = \bar{f}((a,b)+K) = f_1(a,b) = f_1\sigma(a,b) = f(a,b)\ .$$

که در آن نگاشت i همان نگاشت معرفی شده در صورت قضیه است. بنابراین نمودار زیر جابجایی است:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & A \otimes B \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & C \end{tikzcd}$$

همچنین به سادگی ملاحظه می شود که $\bar{f}$ یکتاست و $A \otimes B$ تا حد یکریختی به طور منحصربفرد تعیین می شود. ■

نتیجه ۱.۱.۷. تابع جفت متقاطع شده $\phi : G \times H \longrightarrow L$ موجب القای همریختی یکتای $\phi^* : G \otimes H \longrightarrow L$ می شود به طوری که به ازای هر $g \in G$ و هر $h \in H$ داریم $\phi^*(g \otimes h) = \phi(g,h)$.

اکنون لازم است به برخی خواص مقدماتی این ساختار که در قضایای زیر آورده شده است اشاره نماییم. توجه کنید که برهان این قضایا را می توانید در مراجع [۸] و [۱۰] ملاحظه نمائید. قضیه زیر به کمک قضیه ۱.۱.۶ و با استفاده از سازگار بودن عملها اثبات می شود.

قضیه ۸.۱.۱. فرض کنید G و H گروههایی دلخواه باشند به طوری که G و H روی خودشان به صورت مزدوج و روی یکدیگر به طور سازگار عمل نمایند و همچنین $g, g' \in G$ و $h, h' \in H$ باشند. در این صورت

الف) گروههای G و H به صورت زیر روی $G \otimes H$ عمل می کنند:

$$ {}^{g}(g' \otimes h) = {}^{g}g' \otimes {}^{g}h \ , \ {}^{h}(g \otimes h') = {}^{h}g \otimes {}^{h}h' \ . $$

ب) فرض کنید همریختیهای $\theta : G \longrightarrow A$ و $\phi : H \longrightarrow B$ موجود باشند که در آن A و B به طور سازگار روی هم عمل کنند و نیز θ و ϕ **عملهای گروه را حفظ کنند**. یعنی

$$ \phi({}^{g}h) = {}^{\theta g}(\phi h) \quad , \quad \theta({}^{h}g) = {}^{\phi h}(\theta g) \ . $$

در این صورت همریختی یکتای $\theta \otimes \phi : G \otimes H \longrightarrow A \otimes B$ وجود دارد به طوریکه

$$ (\theta \otimes \phi)(g \otimes h) = \theta g \otimes \phi h \ . $$

بعلاوه اگر θ و ϕ پوشا باشند آنگاه $\theta \otimes \phi$ نیز پوشاست.

ج) یکریختی یکتای $G \otimes H \longrightarrow H \otimes G$ وجود دارد به طوری که $g \otimes h \longmapsto (h \otimes g)^{-1}$.

با توجه به قسمت (ب) از قضیه قبل می توان نشان داد که برای هر زیرگروه نرمال N از G، همریختی طبیعی $G \longrightarrow G/N$ موجب القای همریختی پوشای $G \otimes G \longrightarrow G/N \otimes G/N$ می شود و در حالت خاص همریختی $G \otimes G \longrightarrow G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} G/G'$ نیز پوشا می باشد که در آن $\otimes_{\mathbb{Z}}$ همان حاصلضرب تانسوری معمولی مدولهاست. متذکر می شویم که از این پس منظور از نماد G^{ab} همان گروه آبلی G/G' می باشد.

در ادامه در قضیه زیر به برخی روابط موجود میان عناصر حاصلضرب تانسوری ناآبلی دو گروه اشاره می کنیم.

قضیه ۹.۱.۱. فرض کنید G و H گروههایی دلخواه باشند به طوری که G و H روی خودشان به صورت مزدوج و روی یکدیگر به طور سازگار عمل نمایند. در این صورت به ازای هر $g, g' \in G$ و $h, h' \in H$ روابط زیر در حاصلضرب تانسوری $G \otimes H$ برقرارند:

$$i)\ {}^{g}(g^{-1}\otimes h)=(g\otimes h)^{-1}=\ {}^{h}(g\otimes h^{-1})$$

$$ii)\ (g\otimes h)(g'\otimes h')(g\otimes h)^{-1}=\ {}^{[g,h]}(g'\otimes h')$$

که $[g,h]$ به هر کدام از دو صورت $g^{h}g^{-1}\in G$ یا ${}^{g}hh^{-1}\in H$ قابل بیان می باشد.

$$iii)\ (g\,{}^{h}g^{-1})\otimes h'=(g\otimes h)\,{}^{h'}(g\otimes h)^{-1}$$

$$iv)\ g'\otimes({}^{g}hh^{-1})=\ {}^{g'}(g\otimes h)(g\otimes h)^{-1}$$

$$v)\ [g\otimes h\ ,\ g'\otimes h']=(g\,{}^{h}g^{-1})\otimes({}^{g'}h'h'^{-1})$$

از جبر مقدماتی با حاصلضرب تانسوری مدولها و در حالت خاص با حاصلضرب تانسوری گروههای آبلی به عنوان $\mathbb{Z}$–مدول آشنا هستیم. در لم زیر دو خاصیت از آن ساختار را یاد آوری می کنیم:

لم ۱.۱.۱۰. اگر A،A'،B و B' گروههای آبلی باشند، آنگاه

$$\begin{aligned}(A\times B)\otimes_{\mathbb{Z}}(A'\times B') &\cong (A\otimes_{\mathbb{Z}}A')\times(A\otimes_{\mathbb{Z}}B')\times(B\otimes_{\mathbb{Z}}A')\times(B\otimes_{\mathbb{Z}}B')\ ,\\ \mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n &\cong \mathbb{Z}_{(m,n)}\end{aligned}$$

که در آن (m,n) بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد m و n می باشد.

حال در قضیه زیر شرط لازم را برای انطباق حاصلضرب تانسوری گروههای آبلی با ساختار تعریف شده جدید بیان می کنیم.

قضیه ۱.۱.۱۱. فرض کنید گروههای G و H روی یکدیگر به صورت بدیهی عمل کنند، یعنی به ازای هر $g\in G$ و هر $h\in H$ داشته باشیم ${}^{g}h=h$ $\mapsto$ (g,h) و ${}^{h}g=g$ $\mapsto$ (h,g). در این صورت

$$G\otimes H\cong G^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}}H^{ab}$$

که در آن $\otimes_{\mathbb{Z}}$ همان حاصلضرب تانسوری معمولی گروههای آبلی است.

با توجه به قضیه فوق ملاحظه می شود که در مورد گروههای آبلی با فرض بدیهی بودن عمل، حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروههای آبلی همان حاصلضرب تانسوری معمولی خواهد بود. در حالیکه اگر گروههای آبلی G و H با عملی غیر بدیهی بر روی هم عمل کنند لزومی ندارد که حاصلضرب تانسوری ناآبلی $G \otimes H$ بر حاصلضرب تانسوری معمولی منطبق شود.

به کمک تعمیم قضیه جامع تانسوری می توان به معرفی برخی همریختی ها از $G \otimes G$ به گروههای دیگر پرداخت. به عنوان مثال می توان به همریختی پوشای $\kappa : G \otimes G \longrightarrow G'$ با ضابطه $\kappa(x \otimes y) = [x, y]$ که در آن $x, y \in G$ اشاره نمود که نقش مهمی در این بحث دارد.

اکنون اگر قرار دهیم $Ker\kappa = J_2(G)$ آنگاه با استفاده از قضیه ۹.۱.۱ ثابت می شود که $J_2(G)$ یک زیرگروه مرکزی $G \otimes G$ است. زیرا اگر $t \in J_2(G)$ و s عنصر دلخواهی از $G \otimes G$ باشد آنگاه $[t, s] = \kappa(t) \otimes \kappa(s) = 1 \otimes \kappa(s) = 1$. بنابراین اگر زیر گروه G' دوری باشد آنگاه $G \otimes G$ گروهی آبلی است. همچنین بااستفاده از قضیه ۹.۱.۱ ثابت می شود که عنصر $t \in J_2(G)$ دارای این ویژگی است که به ازای هر $g \in G$ داریم $^{g}t = t$.

بعلاوه نشان داده شده است که $J_2(G) = \pi_3(SK(G, 1))$. لذا این زیر گروه $G \otimes G$ دارای اهمیت توپولوژیکی نیز می باشد. (نمادهای اشاره شده بر گرفته از مباحث نظریه هموتوپی در گروههاست. جهت اطلاعات بیشتر به مرجع [۴۱] مراجعه نمائید.)

اینک برخی گروهها را که نقش بسیار مهمی در اثبات قضایای فصل سوم خواهند داشت در تعاریف زیر معرفی می نمائیم:

تعریف ۱۲.۱.۱. زیر گروههای $\nabla(G)$ و $\Delta(G)$ از $J_2(G)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\nabla(G) = < x \otimes x \mid x \in G >,$$

$$\Delta(G) = < (x \otimes y)(y \otimes x) \mid x, y \in G > .$$

همچنین **مربع بیرونی ناآبلی**[۱] گروه G را بصورت گروه خارج قسمتی $G \wedge G = \dfrac{G \otimes G}{\nabla(G)}$ تعریف می کنیم.

[۱] Nonabelian Exterior Square

با استفاده از تعریف گروه $G \otimes G$ و به کمک قضیه ۸.۱.۱ ملاحظه می شود که به ازای هر $x \in G$ داریم $(x \otimes x)^{۲} = (x \otimes x)(^x x \otimes ^x x) = xx \otimes x = x^{۲} \otimes x$. لذا به سادگی می توان نشان داد که به ازای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ داریم $(x \otimes x)^n = x^n \otimes x$. بنابراین $(x \otimes x)^{|G|} = ۱$.

یکی دیگر از گروهها که با مربع تانسوری ناآبلی یک گروه در ارتباط بوده و اولین بار توسط وایتهد معرفی شده است، گروه $\Gamma(A)$ به ازای گروه آبلی A می باشد که در تعریف زیر به معرفی و بیان خواص مهم آن می پردازیم. جهت اطلاعات بیشتر می توانید مرجع [۴۵] را ملاحظه کنید.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید A گروهی آبلی باشد. در این صورت $\Gamma(A)$ یک گروه آبلی تولید شده توسط عناصر $\gamma(a)$ به ازای هر $a \in A$ می باشد که در روابط زیر صدق می کند:

الف) به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $\gamma(a) = \gamma(-a)$،

ب) به ازای هر سه عنصر دلخواه $a, b, c \in A$ داشته باشیم

$$\gamma(a+b+c) - \gamma(b+c) - \gamma(c+a) - \gamma(a+b) + \gamma(a) + \gamma(b) + \gamma(c) = ۰.$$

در مرجع [۴۵] نشان داده شده است که اگر A گروهی متناهی باشد، آنگاه $\Gamma(A)$ نیز یک گروه متناهی است. همچنین داریم:

الف) $\Gamma(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

ب) اگر $n \geq ۱$ و فرد باشد آنگاه $\Gamma(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n$.

ج) اگر $n \geq ۲$ و زوج باشد آنگاه $\Gamma(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_{۲n}$.

د) اگر A و B دو گروه آبلی باشند آنگاه $\Gamma(A \oplus B) = \Gamma(A) \oplus \Gamma(B) \oplus (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$.

با توجه به خواص فوق می توان $\Gamma(A)$ را برای هر گروه آبلی متناهیاً تولید شده A به دست آورد.
یکی از ارتباط های میان مربع تانسوری ناآبلی یک گروه و گروه وایتهد عبارت است از نگاشت $\psi : \Gamma(G^{ab}) \longrightarrow G \otimes G$ با ضابطه $\psi(\gamma(\bar{x})) = x \otimes x$ به ازای هر $\bar{x} \in G^{ab}$ که می توان نشان داد یک همریختی است. (مرجع [۱۰] را ملاحظه کنید.) از اینرو همریختی $\psi : \Gamma(G^{ab}) \longrightarrow \nabla(G)$ پوشا

خواهد بود.

اکنون به نمودار مهم زیر می پردازیم که اطلاعات جامعی را میان گروههای معرفی شده در فوق و مربع تانسوری ناآبلی بیان می کند. این نمودار نخستین بار توسط براون، جانسون و رابرتسون (مرجع [۸]) در سال ۱۹۸۷ معرفی گردید. در این نمودار سطرها و ستونها از دنباله های دقیق ساخته شده و بعلاوه نموداری تعویض پذیر است.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
H_3(G) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \Gamma(G^{ab}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "="'] & J_2(G) \arrow[r] \arrow[d] & H_2(G) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H_3(G) \arrow[r] & \Gamma(G^{ab}) \arrow[r, "\psi"] & G \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & G \wedge G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & G' \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

منظور از $H_2(G)$ و $H_3(G)$ به ترتیب دومین و سومین **گروه همولوژی**[1] G است. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۳۸] مراجعه نمائید. دومین گروه همولوژی G به *ضربگر شور*[2] گروه G نیز مشهور است که در بخش دوم در این فصل به طور دقیق تر معرفی خواهد شد.

دنباله‌ای که در ستون سمت راست قرار گرفته است نخستین بار توسط میلر [۳۳] در سال ۱۹۵۲ معرفی شده است. وی ثابت نمود که $H_2(G) \cong \dfrac{J_2(G)}{\nabla(G)}$. علاوه بر آن به سادگی و با استفاده از نمودار فوق ملاحظه می شود که اگر G گروهی کامل باشد آنگاه $G \otimes G = G \wedge G$ و $J_2(G) = H_2(G)$.

متذکر می شویم که گروه G را کامل گوییم هر گاه $G = G'$ باشد.

در قضیه زیر یک دنباله دقیق راست معرفی می شود که از روی یک توسیع مرکزی به دست می

[1] Homology Group

[2] Schur Multiplier