بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

دانشکدهٔ علوم

گروه ریاضی(متروید)

ابرصفحه‌های همبند در ماترویدهای دودویی

شبنم افشاری

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر قدرت‌اله آزادی

سال ۱۳۸۶

پایان‌نامه **خانم شبنم افشاری** به تاریخ ۸۶/۷/۳۰ شماره ۸۰۱ـ۲ مورد پذیرش هیأت محترم داوران با رتبه بسیارخوب و نمره ۱۷/۷۵ قرارگرفت .

۱ـ استاد راهنما و رئیس هیأت داوران : **جناب آقای دکتر قدرت‌اله آزادی**

۲ـ داور خارجی : **جناب آقای دکتر حبیب اذانچیلر**

۳ـ داور داخلی : **جناب آقای دکتر سعید شمس**

۴ـ نماینده تحصیلات تکمیلی : **جناب آقای دکتر محمّد نقی آذرمنش**

تقدیم به پدر و مادر مهربانم، به‌خاطر
تشویق‌ها و حمایت‌های صمیمانه و
صبر و شکیبایی‌شان.

با تشکر از:

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر قدرت‌الله آزادی که در انجام این مطالعه از راهنمایی‌های بی‌دریغ و پیشنهادهای مفیدشان بهرهٔ فراوان بردم . از زحمات خانواده‌ام به خصوص خواهر و برادرم و همکاری صمیمانهٔ آنها سپاسگزارم و از خداوند منّان برایشان آرزوی سعادت ، سلامتی و توفیق دارم .

فهرست مطالب

فصل ۳. ابرصفحه‌های همبند در ماترویدهای دودویی

فصل ۴. هم-دورهای جدانکننده در ماترویدهای دودویی

چکیده

هم‌ـدور C^* از ماترويد M را جدانکننده گوييم ، هر گاه حذف C^* از M همبند باشد. در اين پايان نامه نشان خواهيم داد که ماترويد دودويي ساده و هم‌ـسادهٔ همبند حداقل چهار ابر صفحهٔ همبند دارد.اين کران را مکنالتي و وو ارائه داده اند. همچنين در اين پايان نامه نشان خواهيم داد که ماترويد دودويي ۳ـهمبند M حداقل $r(M) - ۱$ هم‌ـدور جدانکننده دارد. به اين ترتيب کران ديگري براي تعداد هم‌ـدورهاي جدانکنندهٔ ماترويد دودويي ساده و هم‌ـساده و همبند به دست مي‌آيد که در واقع کران معرّفي شده توسّط مکنالتي‌ـوو را تعميم مي دهد.

مقدّمه

نوشته‌ای که پیش رو دارید حاصل تلاش و تفحصی است که روی مقالهٔ «ابرصفحه‌های همبند در ماترویدهای دودویی» نوشتهٔ مکنالتی [1] و وو[2] انجام شده است.

مسألهٔ اصلی که در این پایان‌نامه بحث خواهد شد، این است که:

قضیه: *«هر ماتروید دودویی ، همبند، ساده و هم-ساده حداقل چهار ابرصفحهٔ همبند دارد.»*

این مسأله در واقع تعمیم قضیه‌ای در ماترویدها منسوب به کلمنز [3] است که مستقلاً توسط سیمور [4] نیز مطرح شده است. اگر مسألهٔ بالا را به مبحث گراف‌ها تعمیم دهیم به نتایجی که توماسن [5] وتافت [6] در مورد دورهای جدانکنندهٔ القایی وکاگارس [7] در مورد رئوس حذفی ثابت کرده‌اند خواهیم رسید. برای این کار ارتباط بین ابرصفحهٔ همبند و هم-دور جدانکننده در ماتروید مطرح شده است و بعد نشان داده شده است که هم-دور جدانکننده در ماتروید دوری یک گراف، متناظر با یال‌های واقع بر یک رأس گراف است. چون همهٔ گراف‌ها لزوماً دوگان ندارند لذا مطلب ابتدا در مورد ماترویدها ثابت شده و بعد به دوگان ماتروید انتقال داده شده است و چنانچه ماتروید گرافیکی باشد مطلب در مورد گراف نظیر نیز برقرار خواهد شد.

فصل اوّل این پایان‌نامه به تعاریف و قضایای اوّلیهٔ علم گراف و ماتروید اختصاص یافته است که در اثبات قضایای این پایان‌نامه به آنها نیاز داشتیم. این مفاهیم و قضایا عمدتاً از کتاب «نظریّهٔ ماتروید» اکسلی [8] و «مقدّمه‌ای بر نظریّهٔ گراف » وست [9] انتخاب شده است.

فصل دوم به معرفی دورهای جدانکنندهٔ القایی در گراف‌ها می‌پردازد.

1) Jennifer McNulty 2) Haidong Wu 3) Kelmans 4) Seymour 5) Thomassen

6) Toft 7) Kaugars 8) Oxley 9) West

در فصل سوم مفاهیم دور و هم‌ـدور جدانکننده و ارتباط آنها با ابرصفحه، مطرح و مفهوم متناظر هم‌ـدور جدانکننده یک ماترویید گرافیکی در گراف نظیر آن معرفی شده است. همچنین کرانی که مکنالتی و وو برای تعداد ابرصفحه‌های همبند یک ماترویید همبند ساده و هم‌ـساده و دودویی ارائه کرده‌اند، معرفی و ثابت شده‌است.

در فصل چهارم اثبات قضیهٔ زیر که توسط لموس [10] ارائه شده آمده است :

قضیه: «*اگر M ماترویید دودویی ۳ـهمبند باشد و $a \in E(M)$، آنگاه M حداقل* $r(M) - ۱$ *هم‌ـدور جدانکننده دارد که شامل a نیستند.*»

در ضمن نشان داده شده است که دو قضیهٔ بالا متناقض نیستند.

10) Lemos

فصل اوّل

تعاریف و مفاهیم

۱.۱ آشنایی با مفاهیم مقدّماتی گراف

در این بخش با تعاریف و قضایایی از نظریهٔ گراف آشنا خواهیم شد. مطالب این بخش از کتاب «مقدّمه‌ای بر نظریهٔ گراف » وست انتخاب شده است.

گراف

تعریف ۱.۱.۱ گراف G، یک سه‌تایی است، متشکل از یک مجموعهٔ غیرخالی و متناهی $V(G)$ که اعضای آن را ***رأس‌های*** گراف می‌نامیم و یک مجموعهٔ $E(G)$ که اعضای آن را ***یال‌های*** گراف می‌نامیم و یک رابطه که به هر عضو $E(G)$، دو عضو از $V(G)$ وابسته می‌کند.

تعداد رأس‌های یک گراف را *مرتبهٔ* [1] گراف و تعداد یال‌های گراف را *اندازهٔ* [2] گراف می‌نامیم.

اگر $e = uv$ یک یال G باشد، u و v را ***نقاط انتهایی*** یا رأس‌های انتهایی e گویند.

1) Order 2) Size

تعریف ۲.۱.۱ اگر $e=uv$ یک یال G باشد، e را یک ***طوقه*** [3] گویند. اگر نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آنها را ***یال‌های موازی*** گویند. گراف G را ***ساده*** گوییم اگر فاقد طوقه و یال موازی باشد.

تعریف ۳.۱.۱ اگر $e=uv$ یک یال باشد، آنگاه دو رأس u و v را دو رأس ***مجاور***[4] گوییم و نیز گوییم یال e بر رئوس u و v ***واقع***[5] است.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید G یک گراف با n رأس باشد.اگر هر دو رأس u و v از G مجاور باشند، G را یک ***گراف کامل*** با n رأس گوییم و با K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ یک ***گشت***[6] در گراف G ، دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌های G به صورت $v_0e_1v_1e_2v_2...e_nv_n$ است که در آن v_{i-1} و v_i نقاط انتهایی یال e_i هستند. اگر هیچ یالی در یک گشت تکرار نشود ، آن گشت را یک ***گذر***[7] گویند. اگر هیچ رأس در یک گذر تکرار نشود ، آن را یک ***مسیر***[8] گویند. تعداد یال‌های موجود در یک گشت، گذر یا مسیر را ***طول*** گشت، گذر یا مسیر گویند. اگر در یک مسیر، رأس ابتدا و انتها یکی باشد، آنگاه آن مسیر را یک ***دور***[9] گوییم.

تعریف ۶.۱.۱ دو رأس x و y و مسیر P بین آن دو رأس ازگراف G را در نظر بگیرید. هر رأس مسیر P، به جز x و y را ***رئوس درونی*** [10] مسیر P گوییم.

تعریف ۷.۱.۱ دو مسیر ازگراف G را ***مجزای درونی*** گوییم هر گاه رأس درونی مشترک نداشته باشند.

گزاره ۸.۱.۱ هر $u-v$ گشت شامل یک $u-v$ مسیر است.

همبندی [11]

تعریف ۹.۱.۱ گراف G را ***همبند*** گوییم هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن مسیری وجود داشته باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید G یک گراف باشد. H را ***زیرگراف***[12] G گوییم هرگاه :

$$V(H)\subseteq V(G) \quad \text{و} \quad E(H)\subseteq E(G).$$

3) Loop 4) Adjacent 5) Incident 6) Walk 7) Trail 8) Path 9) Cycle
10) Inner Vertex 11) Connectivity 12) Subgraph

H را ***زیرگراف فراگیر***[13] گوییم هرگاه $V(H) = V(G)$.

هر زیرگراف همبند ماکسیمال G را یک ***مؤلّفه*** G گوییم.

گزاره ۱۱.۱.۱ هر گراف با n رأس و k یال، حداقل $n-k$ مؤلّفه دارد.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید $A \subseteq V(G)$ باشد. زیرگراف تولید شده توسط A را با $G[A]$ نمایش می‌دهیم. رأس‌های این گراف دقیقاً اعضای A هستند و یال‌های آن، همهٔ یال‌های G که هر دو نقطهٔ انتهایی آنها عضو A هستند. بنابراین دو رأس در $G[A]$ مجاورند اگر و فقط اگر در G مجاور باشند. $G[A]$ را ***زیرگراف القایی*** توسط مجموعهٔ A نیز می‌گوییم.

تعریف ۱۳.۱.۱ رأس v از گراف G را ***رأس برشی***[14] گویند اگر تعداد مؤلّفه‌های $G-v$ بیش از تعداد مؤلّفه‌های G باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱ یال e از گراف G را ***یال برشی***[15] یا یک ***پل*** گوییم، اگر

تعداد مؤلّفه‌های $(G-e)$ = ۱+ تعداد مؤلّفه‌های G

قضیه ۱۵.۱.۱ یک یال از یک گراف ، یال برشی است اگر و فقط اگر قسمتی از یک دور نباشد.

تعریف ۱۶.۱.۱ گراف‌های $G_1, G_2, \ldots, G_k$ را در نظر بگیرید. ***اجتماع*** G_i ها، گرافی مثل G است به طوری که

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^{k} V(G_i)$$

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(G_i)$$

درخت‌ها[16]

تعریف ۱۷.۱.۱ گراف همبند بدون دور را یک **درخت** گوییم. رأس درجهٔ یک در گراف را یک **برگ** یا یک ***رأس آویخته*** گوییم. یک **درخت *فراگیر*** یعنی زیرگراف فراگیر G که یک درخت نیز هست. یک ***ستاره*** درختی است که در آن یک رأس مجاور با همهٔ رأس‌های دیگر است.

13) Spanning Subgraph 14) Cut Vertex 15) Cut edge 16) Trees

لم ۱.۱.۱۸ هر درخت با حداقل دو رأس، حداقل دو برگ دارد.

قضیه ۱.۱.۱۹ برای هر گراف G با n رأس، ($n \geq ۱$) گزاره‌های زیر معادلند:

۱) G همبند و بی‌دور است.

۲) G همبند و دارای $n - ۱$ یال است.

۳) G بی‌دور و دارای $n - ۱$ یال است.

۴) G فاقد طوقه است و برای هر دو رأس u و v از G ، مسیر یکتایی بین u و v وجود دارد.

نتیجه ۱.۱.۲۰

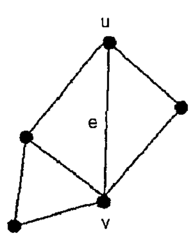
۱) هر یال یک درخت یک یال برشی است.

۲) با افزودن یک یال بین دو رأس غیر مجاور به یک درخت ، دوری منحصر به فرد ایجاد می‌شود.

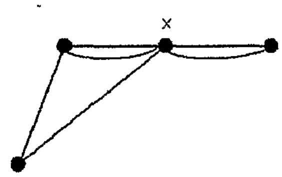
۳) هر گراف همبند، شامل یک درخت فراگیر است.

تعریف ۱.۱.۲۱ فرض کنید G یک گراف و $e = uv$ یک یال آن باشد. *انقباض* یال e [۱۷] یعنی حذف یال e و حذف دو رأس u و v و افزودن رأسی مثل x به طوری که هر یال واقع بر u یا v درگراف G یالی واقع بر x درگراف جدید باشد. گراف جدید را که حاصل انقباض یال e است با G/e نمایش می‌دهیم.

مثال :



G



G/e

تعریف ۱.۱.۲۲ یک *برش رأسی*[۱۸] از یک گراف G، مجموعهٔ S از رئوس G است به طوری که تعداد مؤلّفه‌های همبند $G - S$ بیش از تعداد مؤلّفه‌های همبند G باشد.

17) Contraction of e 18) Vertex Cut

بلوک‌ها[19]

تعریف ۲۳.۱.۱ یک *بلوک* از گراف G ، زیرگراف همبند ماکسیمال G است که رأس برشی ندارد.

اگر G همبند بوده و رأس برشی نداشته باشد، آنگاه G خود یک بلوک است.

یک یال از G یک بلوک است اگر و تنها اگر یک یال برشی G ، یعنی یک پل باشد.

بنابراین بلوک‌های یک گراف فاقد طوقه عبارتند از:

۱) رأس‌های تنها

۲) یال‌های برشی یا یک پل

۳) زیرگراف‌های ۲ـهمبند ماکسیمال

قضیه ۲۴.۱.۱ هر دو بلوک از یک گراف ، حداکثر در یک رأس مشترکند ؛ و آن رأس یک رأس برشی برای گراف خواهد بود.

در یک بلوک از گراف G ممکن است به اندازهٔ رئوس آن بلوک ، رأس برشی برای G وجود داشته باشد یا حداکثر یک رأس برشی وجود داشته باشد. بلوکی را که G در آن حداکثر یک رأس برشی دارد، *بلوک نهایی*[20] گوییم.

قضیه ۲۵.۱.۱ برای هر گراف با حداقل سه رأس ، گزاره‌های زیر معادلند و یک گراف ۲ـهمبند را معرفی می‌کنند :

۱) G همبند و فاقد رأس برشی است.

۲) برای هر $x, y \in V(G)$، حداقل دو مسیر مجزای درونی بین x و y وجود دارد.

۳) برای هر $x, y \in V(G)$ دوری از G شامل دو رأس x و y وجود دارد.

۴) کمترین درجهٔ رئوس G حداقل یک است و هر دو یال از G بر روی یک دور G قرار می‌گیرند.

تعریف ۲۶.۱.۱ در یک گراف G ، *زیرتقسیم*[21] یک یال مثل uv یعنی جایگزین کردن یال uv با مسیر uwv که در آن w رأسی با درجهٔ دو است که در یال uv درج شده است.

نتیجه ۲۷.۱.۱ اگر G ، یک گراف ۲ـهمبند و G' گراف حاصل از زیرتقسیم یالی از گراف G باشد،

19) Blocks 20) End Block 21) Subdivision

آنگاه G' نیز ۲ـهمبند است.

۲.۱ آشنایی با مفاهیم مقدّماتی در ماترویدها

در این بخش تعاریف، مثال‌ها و قضایایی از متروید که در اثبات قضایای این پایان‌نامه به کار رفته، گنجانده شده است. مفاهیم و قضایای این بخش از کتاب «نظریهٔ متروید» اکسلی انتخاب شده است. اثبات کلیه احکام مطرح شده در این بخش را می‌توان درکتاب مذکور یافت.

متروید[۲۲]

تعریف ۱.۲.۱ یک **متروید** M، زوج مرتب $M = (E, \mathcal{I})$ است که در آن E یک مجموعهٔ متناهی و ناتهی و $\mathcal{I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E است که در سه شرط زیر صدق می‌کنند:

i) $\phi \in \mathcal{I}$

ii) اگر $X \in \mathcal{I}$ و $Y \subseteq X$ آنگاه $Y \in \mathcal{I}$.

iii) اگر $X \in \mathcal{I}$ و $Y \in \mathcal{I}$ و $|X| > |Y|$، آنگاه عضوی مثل $x \in X - Y$ وجود دارد که $Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

اگر $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید باشد، آنگاه مجموعهٔ E را **مجموعهٔ زمینهٔ**[۲۳] متروید M می‌نامیم. هر عضو $\mathcal{I}$ یک **مجموعهٔ مستقل**[۲۴] متروید M نامیده می‌شود. زیرمجموعه‌های E که در $\mathcal{I}$ نیستند، **مجموعه‌های وابستهٔ**[۲۵] M نامیده می‌شوند.

مثال ۲.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه از بردارها باشد. فرض کنید $\mathcal{I}$ مجموعهٔ تمامی زیرمجموعه‌های مستقل خطی E باشد. آنگاه $(E, \mathcal{I})$ یک متروید روی E است.

مثال ۳.۲.۱ فرض کنید G یک گراف و $E = E(G)$ و تمام زیرگراف‌های بدون دور G را درنظر بگیرید. مجموعهٔ یال‌های این زیرگراف‌ها را به‌عنوان اعضای مجموعهٔ $\mathcal{I}$ تلقی کنید. در واقع $\mathcal{I}$ شامل

22) Matroid 23) Ground Set 24) Independent 25) Dependent

زیرمجموعه‌هایی از E است که زیرگراف تولید شده توسط آنها بی‌دور باشد. حال $(E,\mathcal{I})$ یک مترووید است.

تعریف ۴.۲.۱ زیرمجموعهٔ وابستهٔ مینیمال M را یک **دور**[۲۶] گویند.

مجموعهٔ تمامی دورهای مترووید M را با $\mathcal{C}(M)$ نمایش می‌دهیم. بدیهی است که خواص زیر در $\mathcal{C}(M)$ برقرار است:

i) $\phi \notin \mathcal{C}$ زیرا ϕ مجموعه‌ای مستقل است.

ii) اگر $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ و $C_1 \subseteq C_2$ آنگاه $C_1 = C_2$.

iii) اگر C_1 و C_2 دو دور متمایز در M باشند و $e \in C_1 \cap C_2$، آنگاه عضوی مثل C_3 از $\mathcal{C}(M)$ هست که $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

گزاره ۵.۲.۱ فرض کنید E مجموعهٔ یال‌های گراف G و $\mathcal{C}$ مجموعهٔ تمامی دورهای G باشد. آنگاه $\mathcal{C}$ مجموعهٔ دورهای یک مترووید روی مجموعهٔ E است. این مترووید را **مترووید دوری** گراف G گویند.

تعریف ۶.۲.۱ دو مترووید M_1 و M_2 را **یکریخت**[۲۷] گویند و با $M_1 \cong M_2$ نمایش می‌دهند ، اگر تناظر یک به یک $\psi : E(M_1) \longrightarrow E(M_2)$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $X \subseteq E(M_1)$، $\psi(X)$ یک مجموعهٔ مستقل در M_2 است اگر و فقط اگر یک مجموعهٔ مستقل در M_1 باشد.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه باشد که $|E| = n$. $\mathcal{I}$ را مجموعهٔ تمامی زیرمجموعه‌های E درنظر می‌گیریم که حداکثر k عضو دارند $(k \leq n)$ ، آنگاه $(E,\mathcal{I})$ یک مترووید است و آن را مترووید ***یکنواخت***[۲۸] گوییم. این مترووید را با $U_{k,n}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۲.۱ مترووید M را ***گرافیک***[۲۹] گویند، اگر گرافی وجود داشته باشد که مترووید دوری تولید شده توسط آن یکریخت با M باشد؛ به‌عبارتی M یکریخت با مترووید تولید شده توسط گرافی مثل G باشد.

هر مترووید‌ی، گرافیک نیست مثلاً $U_{2,4}$ ؛ امّا اگر مترووید‌ی گرافیک بود گراف همبندی برای آن می‌توان متناظر کرد.

26) Circuit 27) Isomorphic 28) Uniform Matroid 29) Graphic Matroid

تعریف ۹.۲.۱ عضو e از مترويد M را یک ***طوقه***[30] گويند اگر $\{e\}$ یک دور در مترويد M باشد.

اگر f و g دو عضو مترويد M باشند به‌طوری که $\{f, g\}$ یک دور باشد، آنگاه f و g را ***موازی***[31] گويند. مترويد M را ***ساده***[32] گويند، هرگاه دوری به طول کمتر از سه نداشته باشد.

پایه‌ها[33]

تعریف ۱۰.۲.۱ هر مجموعهٔ مستقل ماکسیمال مترويد M را ***پایهٔ*** M گوییم.

$\mathcal{B}$ را گردایهٔ تمام پایه‌های مترويد M درنظر بگیرید. دو خاصیت زیر در مورد $\mathcal{B}$ برقرار است:

i) $\mathcal{B} \neq \phi$ (زیرا همواره $\phi \in \mathcal{I}$)

ii) فرض کنید $B_۱, B_۲ \in \mathcal{B}$ و $x \in B_۱ - B_۲$. آنگاه عضو $y \in B_۲ - B_۱$ هست که $(B_۱ - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

$\mathcal{B}(M)$ گردایهٔ مجموعه‌های مستقل ماکسیمال $E(M)$ است که شامل هیچ عضو $\mathcal{C}(M)$ نیستند.
$\mathcal{C}(M)$ تمامی زیرمجموعه‌های مینیمال $E(M)$ است که زیرمجموعهٔ هیچ عضوی از $\mathcal{B}(M)$ نیستند.
لذا با شناسایی هرکدام از گردایه‌های $\mathcal{I}(M)$، $\mathcal{C}(M)$ و $\mathcal{B}(M)$ ، دیگری مشخص می‌شود. بنابراین هر مترويد با مجموعهٔ زمینهٔ خود و یکی از گردایه‌های $\mathcal{I}(M)$ یا $\mathcal{C}(M)$ یا $\mathcal{B}(M)$ قابل شناسایی است.

رتبه[34]

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنید $M = (E, \mathcal{I})$ یک مترويد باشد و $X \subseteq E$، تعداد اعضای زیرمجموعهٔ مستقل ماکسیمال X را رتبهٔ X می‌نامیم و با $r(X)$ نمایش می‌دهیم. به‌عبارتی

$$r(X) = \max\{|I| \,\big|\, I \subseteq X \text{ و } I \text{ یک مجموعهٔ مستقل است}\}$$

30) Loop 31) Parallel 32) Simple 33) Bases 34) Rank

گزاره ۱۲.۲.۱ فرض کنید $M = (E,\mathcal{I})$ یک متروید است و $X \subseteq E$ ، قرار دهید $\mathcal{I}|_X = \{I \subseteq X \mid I \in \mathcal{I}\}$. آنگاه $(X,\mathcal{I}|_X)$ یک متروید است .

متروید $(X,\mathcal{I}|_X)$ را با $M|_X$ یا $M\backslash_{E-X}$ نمایش می‌دهیم و آن را **تحدید**[۳۵] M به X و یا **حذف**[۳۶] $E-X$ از M گوییم و نیز داریم:

$$\mathcal{C}(M|_X) = \{C \subseteq X | C \in \mathcal{C}(M)\}$$

رتبهٔ متروید M را با $r(M)$ نمایش می‌دهیم و آن برابر است با تعداد اعضای پایه‌های متروید M.

تابع رتبهٔ متروید $M = (E,\mathcal{I})$ را با r نمایش می‌دهیم و بدیهی است که

$$r : P^{(E)} \longrightarrow Z^+ \cup \{۰\}$$

دارای سه خاصیت زیر است :

$R۱$) اگر $X \subseteq E$ آنگاه $۰ \leq r(X) \leq |X|$.

$R۲$) اگر $X \subseteq Y$ آنگاه $r(X) \leq r(Y)$.

$R۳$) اگر X و Y دو زیرمجموعهٔ E باشند آنگاه $r(X\cup Y)+r(X\cap Y) \leq r(X)+r(Y)$.

گزاره ۱۳.۲.۱ فرض کنید M یک متروید با تابع رتبهٔ r باشد و $X \subseteq E(M)$. آنگاه

i) X مستقل است اگر و فقط اگر $|X| = r(X)$.

ii) X یک پایهٔ متروید M است اگر و فقط اگر $r(M) = |X| = r(X)$.

iii) X یک دور است اگر و فقط اگر غیرخالی باشد و

$$\forall x \in X : r(X-x) = |X| - ۱ = r(X)$$

مثال ۱۴.۲.۱ فرض کنید $M = M(G)$ که در آن G یک گراف است. اگر G همبند باشد، آنگاه یک پایهٔ $M(G)$، مجموعهٔ یال‌های یک درخت فراگیر در G است.

35) Restriction 36) Deletion

بستار[37]

تعریف ۱۵.۲.۱ فرض کنید M یک ماتروید روی E با تابع رتبهٔ r باشد. تابع بستار M را با cl نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$cl : P^{(E)} \longrightarrow P^{(E)}$$

و برای هر $X \subseteq E$

$$cl(X) = \{x \in E \mid r(X \cup x) = r(X)\}$$

عملگر بستار ماتروید M روی E، چهار خاصیت زیر را داراست :

$cl1$) اگر $X \subseteq E$ ، آنگاه $X \subseteq cl(X)$.

$cl2$) اگر $X \subseteq Y \subseteq E$ ، آنگاه $cl(X) \subseteq cl(Y)$.

$cl3$) اگر $X \subseteq E$ ، آنگاه $cl(cl(X)) = cl(X)$.

$cl4$) اگر $X \subseteq E$ و $x \in E$ و $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$ ، آنگاه $x \in cl(X \cup y)$.

تعریف ۱۶.۲.۱ فرض کنید M یک ماتروید و $X \subseteq E(M)$ باشد. $cl(x)$ را بستار X یا **توسیع** X در M[38] گویند و آن را با $\bar{X}$ نیز نمایش می‌دهند.

اگر $X = \bar{X}$ ، آنگاه X را یک مجموعهٔ **بسته**[39] یا یک فلت در M گویند.

یک *ابرصفحه*[40] در M یک مجموعهٔ بستهٔ M است که رتبهٔ آن برابر $r(M) - 1$ است.

زیرمجموعهٔ X از E را یک مجموعهٔ فراگیر M گوییم هرگاه $cl(X) = E(M)$.

دوگان[41]

قضیه ۱۷.۲.۱ فرض کنید M یک ماتروید روی E باشد. فرض کنید

$$\mathcal{B}^*(M) = \{E - B | B \in \mathcal{B}(M)|\}$$

37) Closure 38) Span of X in M 39) Flat 40) Hyperplane 41) Duality