دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

$n-$ میانگین پذیری ضعیف گسترش های مدولی جبرهای باناخ

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

الهام خاکره

اساتید راهنمای پایان‌نامه

دکتر رسول نصر اصفهانی
دکتر محمد ابوالقاسمی

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز) خانم الهام خاکره

تحت عنوان

$n-$ میانگین پذیری ضعیف گسترش های مدولی جبرهای باناخ

در تاریخ ۱۳۹۰/۸/۱۸ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ – استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر رسول نصر اصفهانی
۲– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر محمد ابوالقاسمی
۳– استاد داور ۱	دکتر مجید اسحاقی گرجی (دانشگاه سمنان)
۴– استاد داور ۲	دکتر فریدون حبیبیان دهکردی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر اعظم اعتماد دهکردی

شکر و سپاس پروردگاری که بالاترین مقام را در ستایش سزاست. او که می‌داند بدون این‌که آموخته باشد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست‌مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران. خدای را شاکرم که به من این توفیق را داد تا این مرحله از زندگی را نیز همچون دیگر مراحل با موفقیت پشت سر بگذارم.

از پدر و مادرم که عمرشان را توشه‌ی راهم کردند سپاسگذارم. اکنون که به لطف و عنایت بی‌بدیل حضرتش موفق به اتمام این تحقیق شدم بر خود فرض می‌دانم مراتب تشکر و قدردانی خود را از

— اساتید ارجمند و گرامی آقایان دکتر نصر اصفهانی و دکتر ابوالقاسمی که در اجرای این تحقیق همواره راهنما و پشتیبان من بودند و آقای دکتر ودادی که مشاورت این پایان‌نامه را بر عهده داشتند

— خانم‌ها دکتر سلطانی و شاهمرادی

— آقایان دکتر نعمتی و قانعی

کمال تشکر و قدردانی را دارم و از خداوند متعال برای ایشان سلامت روزافزون را خواستارم.

خاکره

آبان ۱۳۹۰

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان‌نامه مفهوم میانگین پذیری و $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف را برای جبر باناخ A معرفی می‌کنیم. ابتدا به بررسی رابطه‌ی بین $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف و $n+2-$ میانگین‌پذیری ضعیف جبر باناخ A می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که اگر A، $n+2-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد، آن‌گاه $n-$ میانگین‌پذیر ضعیف است. سپس شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن، $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف A، $n+2-$ میانگین‌پذیری ضعیف را نتیجه دهد. در ادامه به بررسی شرایط لازم و کافی برای $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف گسترش مدولی $A \oplus X$ می‌پردازیم که در آن X یک $A-$ مدول دو طرفه‌ی باناخ است. در پایان یک مثال از جبرهای باناخ میانگین‌پذیر ضعیف می آوریم که $3-$ میانگین پذیر ضعیف نیست.

رده‌بندی موضوعی: ۴۳A۰۳، ۴۶H۰۵.

کلمات کلیدی: جبر باناخ، گسترش مدولی جبر باناخ، میانگین‌پذیری، میانگین‌پذیری ضعیف، مشتق، مشتق داخلی.

فصل ۱

مقدمه

فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک $A-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ باشد که همه روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ فرض می‌شوند. در این صورت نگاشت خطی $D : A \to X$ یک مشتق نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $D(ab) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$. خانواده‌ی همه‌ی مشتق‌های پیوسته از A به X را با $Z^{1}(A, X)$ نمایش می‌دهیم. مشتق $D : A \to X$ را داخلی نامیم هرگاه عنصر $x \in X$ موجود باشد به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $D(a) = a \cdot x - x \cdot a$. منظور از $N^{1}(A, X)$، خانواده‌ی همه‌ی مشتق‌های داخلی از A به X می‌باشد که یک زیرفضای بسته از $Z^{1}(A, X)$ است. فضای خارج قسمتی $Z^{1}(A, X)/N^{1}(A, X)$ را با $H^{1}(A, X)$ نمایش می‌دهیم که به اولین گروه کوهمولوژی روی A با ضرایب در X موسوم است. جبر باناخ A را میانگین‌پذیر گوییم هرگاه برای هر $A-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ X داشته باشیم $H^{1}(A, X^*) = \{0\}$، یا به عبارت دیگر هر مشتق از A به X^*، داخلی باشد. A را میانگین‌پذیر ضعیف گوییم هرگاه داشته باشیم $H^{1}(A, A^*) = \{0\}$. برای $n \geq 0$، A را $n-$ میانگین‌پذیر ضعیف گوییم هرگاه $H^{1}(A, A^{(n)}) = \{0\}$ و A همواره میانگین‌پذیر ضعیف است هرگاه برای هر $n \geq 1$، $n-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد.

نظریه‌ی میانگین‌پذیری جبرهای باناخ یکی از مهمترین مباحث آنالیز روی جبرهای باناخ است که اولین بار توسط جانسون در سال ۱۹۷۲ در [۲۷] معرفی و مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. در واقع هدف جانسون یافتن خاصیت مناسبی روی جبر گروهی $L^{1}(G)$ از یک گروه موضعاً فشرده‌ی G بود که با میانگین‌پذیری G معادل باشد. وی پس از یافتن این خاصیت آن را میانگین‌پذیری $L^{1}(G)$ نام نهاد و این

مفهوم را به کلیه‌ی جبرهای باناخ تعمیم داد. با این حال نتیجه‌ی جانسون برای ساختارهای جبری ضعیف‌تر از گروه‌ها لزوماً برقرار نبود. برای مثال نیم گروه جبری $\mathbb{N}$ میانگین‌پذیر است، در حالی که جبر باناخ $l^{1}(\mathbb{N})$ میانگین‌پذیر نیست.

در ادامه ریاضیدانان متعددی انواع مفاهیم میانگین‌پذیری و شرایط معادل آن‌ها را بررسی کردند. نخستین بار در سال ۱۹۸۷ در [۲] بید، کرتیز و دیلز مفهوم میانگین‌پذیری ضعیف را برای جبرهای باناخ جابه‌جایی معرفی کردند. تعریف اصلی بیان شده در این مقاله این است که جبر باناخ جابه‌جایی A میانگین‌پذیر ضعیف است هرگاه برای هر $A-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ متقارن X داشته باشیم $H^{1}(A,X)=\{0\}$. آن‌ها نشان دادند این مفهوم معادل است با $H^{1}(A,A^{*})=\{0\}$. سپس این مفهوم توسط جانسون در همان سال برای حالت غیر جابه‌جایی گسترش یافت [۲۶]. (همچنین [۱۱]، [۱۳]، [۱۷]، [۱۹] و [۲۰] را ببینید.) دیلز، قهرمانی و گرنبک [۱۲] در سال ۱۹۹۸ مفهوم جدیدی از میانگین‌پذیری به نام $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ را مطرح کردند و به برخی از خواص مهم این مفهوم از جمله رابطه‌ی بین $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف و $m-$ میانگین‌پذیری ضعیف برای اعداد صحیح متمایز m و n پرداختند.

همچنین آن‌ها پس از تحقیقات روی جبرهای باناخ کلاسیک این سوال را مطرح کردند که آیا میانگین‌پذیری ضعیف جبر باناخ A، ۳$-$ میانگین‌پذیری ضعیف آن را نتیجه می‌دهد؟ ژانگ در مقاله‌ای در سال ۲۰۰۲ به بررسی شرایط لازم وکافی برای $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف گسترش‌های مدولی جبرهای باناخ پرداخت. او در ادامه مثالی ارایه می‌کند که میانگین‌پذیر ضعیف است اما ۳$-$ میانگین‌پذیر ضعیف نمی باشد. در سال ۲۰۰۹، اسحاقی و نیازی [۱۶] در مقاله‌ای مفهوم $(\sigma-\tau)-$ میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را مورد مطالعه قرار دادند و شرایط لازم و کافی را برای $(\sigma-\tau)-$ میانگین‌پذیری جبر باناخ A بررسی کردند.

هدف این پایان‌نامه که شامل چهار فصل است، بررسی مفهوم $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ و گسترش‌های مدولی جبرهای باناخ برای $n\geq 0$ است و شرایط لازم و کافی را برای $n-$ میانگین پذیری ضعیف گسترش‌های مدولی جبرهای باناخ بیان می‌کند.

فصل اول، به بیان مختصری از تعاریف و نتایجی اختصاص دارد که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، برخی نظریه‌های کلی در مورد $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ را بیان می‌کنیم و بعضی نتایج مهم از [۱۲] را گسترش می‌دهیم.

در فصل سوم، درباره‌ی گسترش‌های مدولی جبرهای باناخ بحث می‌کنیم و یک شرط لازم و کافی برای $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف آن‌ها بیان می‌کنیم و چندین حالت خاص را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

همچنین با ارایه‌ی مثال‌هایی روابط بین میانگین‌پذیری‌های ضعیف برای nهای مختلف مورد بحث قرار می‌گیرد. در پایان این فصل مفهوم $(\sigma,\tau)-$ میانگین‌پذیری را برای جبر باناخ A معرفی می‌کنیم.

در فصل چهارم، یک مثال نقض می‌آوریم که نشان می‌دهد یک جبر باناخ میانگین‌پذیر ضعیف لزوماً ۳$-$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست.

فرض کنیم A یک فضای برداری همراه با عمل ضرب $A\times A\to A$: باشد به طوری که برای هر $a,b,c\in A$ و $t\in\mathbb{C}$ داشته باشیم

(۱) $(ab)c=a(bc)$،

(۲) $(a+b)c=ac+bc$،

(۳) $a(b+c)=ab+ac$،

(۴) $t(ab)=(ta)b=a(tb)$.

در این صورت A را یک جبر می‌نامیم. جبر A را نرم‌دار گوییم هرگاه به عنوان یک فضای برداری نرم‌دار باشد و برای هر $a,b\in A$ داشته باشیم

$$\| ab \|\leq\| a \|\| b \| .$$

جبر نرم‌دار A را یک جبر باناخ گوییم هرگاه به عنوان یک فضای نرم‌دار کامل باشد؛ یعنی هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد. جبر A را جابه‌جایی گوییم هرگاه برای هر $a,b\in A$ داشته باشیم $ab=ba$. اگر A یک جبر روی $\mathbb{C}$ باشد، آن‌گاه نگاشت

$$\begin{aligned} *:A&\to A\\ a&\mapsto a^* \end{aligned}$$

را یک برگشت گوییم اگر برای هر $a,b\in A$ و $\lambda\in\mathbb{C}$ داشته باشیم

$$(a+b)^*=a^*+b^*,$$

$$(\lambda a)^*=\overline{\lambda}a^*,$$

$$(ab)^*=a^*b^*,$$

$$(a^*)^*=a.$$

منظور از یک $*-$ جبر باناخ، جبر باناخی است مجهز به برگشت $*$، به طوری‌که برای هر $a\in A$ داشته باشیم $\| a \|=\| a^* \|$. یک $*-$ جبر باناخ را C^*- جبرباناخ گوییم هرگاه برای هر $a\in A$ داشته باشیم $\| a^*a \|=\| a \|^2$. فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک فضای باناخ باشد. در این صورت فضای X مجهز به نگاشت دوخطی و کران‌دار

$$\cdot : A\times X\to X$$

$$(a,x) \mapsto a\cdot x$$

را یک $A-$ مدول چپ باناخ گوییم هرگاه برای هر $a,b\in A$ و $x\in X$ داشته باشیم

$$a\cdot(b\cdot x)=(ab)\cdot x.$$

$A-$ مدول راست باناخ به طور مشابه تعریف می‌شود. X را یک $A-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ گوییم هرگاه $A-$ مدول چپ و راست باناخ باشد و برای هر $a,b\in A$ و $x\in X$ داشته باشیم

$$a\cdot(x\cdot b)=(a\cdot x)\cdot b.$$

اگر X یک فضای برداری توپولوژیک باشد، آن‌گاه فضای دوگان X را با X^* نمایش می‌دهیم. به علاوه اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آن‌گاه برای هر $\Lambda\in X^*$ قرار می دهیم

$$\parallel \Lambda \parallel=\sup\{\parallel \Lambda(x)\parallel : \parallel x\parallel\leq ۱\}.$$

یادآور می‌کنیم که X^* با نرم فوق یک فضای باناخ است. برای هر جبر باناخ A، خود A یک $A-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ است. اگر X یک $A-$ مدول چپ باناخ باشد، آن‌گاه X^* یک $A-$ مدول راست باناخ با ضرب مدولی زیر است

$$\langle x, f\cdot a\rangle=\langle a\cdot x, f\rangle \qquad f\in X^*, a\in A, x\in X. \qquad (۱-۱)$$

همچنین اگر X یک $A-$ مدول راست باناخ باشد، آن‌گاه X^* با عمل مدولی زیر یک $A-$ مدول چپ باناخ است

$$\langle x, a\cdot f\rangle=\langle x\cdot a, f\rangle \qquad f\in X^*, a\in A, x\in X. \qquad (۲-۱)$$

تعریف ۱.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ و X و Y، $A-$ مدول‌های چپ باناخ باشند. در این صورت نگاشت خطی $T: X\to Y$ را یک همریختی $A-$ مدولی چپ گوییم هرگاه

$$T(a\cdot x)=a\cdot T(x).$$

همریختی $A-$ مدولی راست به طور مشابه تعریف می‌شود. T را همریختی $A-$ مدولی دوطرفه گوییم هرگاه هم همریختی $A-$ مدولی چپ و هم همریختی $A-$ مدولی راست باشد.

در این پایان‌نامه برای $x\in X$ و $f\in X^*$، مقدار $f(x)$ را با $\langle x, f\rangle$ نیز نمایش می‌دهیم. اگر X یک $A-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ باشد، آن‌گاه X^* با ضرب‌های (۱ − ۱) و (۱ − ۲) یک $A-$ مدول دوطرفه‌ی

باناخ است. X^* را مدول دوگان X گوییم. مدول دوگان (چپ و راست) X^*، دوگان دوم(چپ و راست) X گفته می‌شود.

تعریف ۲.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار باشد.

(۱) منظور از توپولوژی ضعیف روی X، کوچکترین توپولوژی روی X است که تحت آن هر $f \in X^*$ پیوسته است. این توپولوژی موضعاً محدب را با $\sigma(X, X^*)$ یا wk نمایش می‌دهیم.

(۲) نگاشت $\Phi : X \to X^{**}$ را با ضابطه‌ی $\Phi(x) = \widehat{x}$ برای $x \in X$ تعریف می‌کنیم که در آن برای هر $f \in X^*$ داریم $\widehat{x}(f) = f(x)$. Φ خطی و طولپا است. بنابراین یک به یک نیز هست. در حالتی که Φ پوشا باشد، X را انعکاسی گوییم. معمولا $\widehat{x}$ را به طور ساده با x نشان می‌دهیم.

(۳) منظور از توپولوژی ضعیف* روی X^*، کوچکترین توپولوژی روی X^* است که خانواده‌ی $\Phi(X)$ را پیوسته می‌سازد. این توپولوژی موضعاً محدب را با $\sigma(X^*, X)$ یا wk^* نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱ فضای برداری H را یک فضای ضرب داخلی نامیم اگر به هر زوج مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند (x, y) به نام حاصل‌ضرب داخلی چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند

(۱) $(y, x) = \overline{(x, y)}$.

(۲) برای هر $z \in H$ داریم $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

(۳) اگر $\alpha \in \mathbb{C}$، آن‌گاه $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

(۴) به ازای هر $x \in H$، $(x, x) \geq ۰$.

واضح است که در هر فضای ضرب داخلی H داریم

$$x = ۰ \Leftrightarrow (x, x) = ۰.$$

H با نرم زیر یک فضای نرم‌دار خواهد بود

$$\| x \| = (x, x)^{\frac{۱}{۲}} \qquad x \in H.$$

اگر H با این نرم یک فضای کامل باشد، آن‌گاه H را یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

تعریف ۴.۱ مجموعه‌ی D را با رابطه‌ی دوتایی $\leq$ جزئی مرتب گوییم هرگاه برای هر $a, b, c \in D$ داشته باشیم

(۱) اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ ، آن‌گاه $a \leq c$.

(۲) برای هر $a \in D$، $a \leq a$.

(۳) اگر $a \leq b$ و $b \leq a$ ، آن‌گاه $a = b$.

تعریف ۵.۱ یک مجموعه‌ی جهت‌دار، یک مجموعه‌ی جزئی مرتب D است که در آن برای هر دو عضو d_1 و d_2 از D یک کران بالا وجود داشته باشد؛ یعنی $d \in D$، به طوری که داشته باشیم $d_1, d_2 \leq d$.

تعریف ۶.۱ منظور از یک تور در مجموعه‌ی X تابعی است مانند $f : D \to X$ که در آن D یک مجموعه‌ی جهت‌دار باشد. تور f را معمولاً با فرض $x_\alpha = f(\alpha)$ به صورت $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ نشان می‌دهیم. گوییم $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ به $x \in X$ همگراست اگر برای هر همسایگی U از x در X، عنصر $\alpha_0 \in D$ موجود باشد به طوری که $x_\alpha \in U$ برای هر $\alpha \geq \alpha_0$. در این حالت می‌نویسیم $x_\alpha \to x$ یا $\lim_\alpha x_\alpha = x$.

فرض کنیم $\phi \in X^{**}$. در این صورت طبق قضیه‌ی گلدشتاین [۱۵]، تور کران‌دار $(x_\alpha) \subset X$ چنان موجود است که

$$\phi = wk^* - \lim_\alpha x_\alpha$$

و برای هر $a \in A$ داریم

$$a \cdot \phi = wk^* - \lim_\alpha a \cdot x_\alpha,$$

$$\phi \cdot a = wk^* - \lim_\alpha x_\alpha \cdot a.$$

با استفاده از استقرا می‌توانیم $n-$ امین مدول دوگان X را تعریف کنیم که آن را با $X^{(n)}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک $A-$ مدول چپ باناخ باشد. در این صورت تور $(e_i) \subset A$ را همانی تقریبی چپ X گوییم اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\lim_i e_i \cdot x = x.$$

اگر تور (e_i) در A کران‌دار باشد، آن‌گاه (e_i) را همانی تقریبی کران‌دار چپ X گوییم.

به طور مشابه، برای $A-$ مدول راست باناخ X، تور (کران‌دار) $(e_i) \subset A$ همانی تقریبی (کران‌دار) راست X گفته می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\lim_i x \cdot e_i = x$. اگر X یک $A-$ مدول دوطرفه‌ی

باناخ باشد و (e_i) به طور هم‌زمان همانی تقریبی (کران‌دار) چپ و راست برای X باشد، آن‌گاه (e_i) را همانی تقریبی (کران‌دار) برای X گوییم. اگر $X = A$، آن‌گاه یک همانی تقریبی (چپ یا راست، کران‌دار) برای X، یک همانی تقریبی (چپ یا راست، کران‌دار) برای A نیز می‌باشد. قضیه‌ی زیر به قضیه‌ی تجزیه‌ی کوهن معروف است که اغلب در تجزیه‌ی جبرهای باناخ مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای دیدن توضیحات بیشتر [۴] یا [۲۴] را ببینید.

قضیه ۸.۱ اگر A یک جبر باناخ و X یک $A-$ مدول چپ باناخ و A دارای یک همانی تقریبی کران‌دار چپ برای X باشد، آن‌گاه برای هر $x \in X$ و $\delta > \circ$، عناصر $a \in A$ و $y \in X$ چنان موجودند که $x = a \cdot y$ و $\| x - y \| \leq \delta$.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۱.۱۰ از [۴] مراجعه کنید. ■

قضیه ۹.۱ (هان– باناخ) فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار و Y یک زیر فضای خطی X باشد و $g \in Y^*$. در این صورت $f \in X^*$ وجود دارد به طوری که $g = f|_Y$ و $\| g \| = \| f \|$.

اثبات. به [۱۰] مراجعه کنید. ■

تعریف ۱۰.۱ فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. همچنین فرض کنیم M یک زیر فضای X و N یک زیر فضای X^* باشد. $M^\perp$ و ${}^\perp N$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M^\perp := \{f \in X^* : \langle x, f \rangle = \circ, \forall x \in M\},$$

$${}^\perp N := \{x \in X : \langle x, f \rangle = \circ, \forall f \in N\}.$$

واضح است که $M^\perp$ و ${}^\perp N$ به ترتیب زیر فضاهایی از X^* و X هستند.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک $A-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ باشد.

(۱) نگاشت خطی $D : A \to X$ یک مشتق نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

$$D(ab) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b).$$

خانواده‌ی همه‌ی مشتق‌های پیوسته از A به X را با $Z^1(A, X)$ نمایش می‌دهیم.

(۲) مشتق $D: A \to X$ را داخلی نامیم هرگاه عنصر $x \in X$ موجود باشد به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$D(a) = a \cdot x - x \cdot a.$$

منظور از $N^1(A, X)$، خانواده‌ی همه‌ی مشتق‌های داخلی از A به X می‌باشد که یک زیرفضای $Z^1(A, X)$ است.

(۳) فضای خارج قسمتی $Z^1(A, X)/N^1(A, X)$ را با $H^1(A, X)$ نمایش می‌دهیم که به اولین گروه کوهمولوژی روی A با ضرایب در X موسوم است.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد.

(۱) A را میانگین‌پذیر گوییم هرگاه برای هر $A-$ مدول دوطرفه‌ی باناخ X داشته باشیم $H^1(A, X^*) = \{0\}$؛ به عبارت دیگر هر مشتق از A به X^*، داخلی باشد.

(۲) A را میانگین‌پذیر ضعیف گوییم هرگاه داشته باشیم $H^1(A, A^*) = \{0\}$.

جبرهای باناخ میانگین‌پذیر ضعیف، شامل جبرهایی چون جبرهای گروهی و C^*- جبرها است. [۱۳]، [۲۲] و [۲۴] را ببینید. همچنین برخی ویژگی‌های جالب میانگین‌پذیری ضعیف توسط گرنبک در [۲۱]—[۱۹] آمده است. در [۳] دیلز، قهرمانی و گرینبک مفهوم جدیدی به نام $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف را به صورت زیر تعریف کردند.

تعریف ۱۳.۱ برای $n \geq 0$، جبر باناخ A را $n-$ میانگین‌پذیر ضعیف گوییم هرگاه $H^1(A, A^{(n)}) = \{0\}$. A را همواره میانگین‌پذیر ضعیف گوییم هرگاه برای هر $n \geq 1$، $n-$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد.

C^*- جبرها همواره میانگین‌پذیر ضعیف‌اند [۱۱]. در [۱۲] می‌بینیم $n + 2-$ میانگین‌پذیری ضعیف برای $n \geq 1$، $n-$ میانگین‌پذیری ضعیف را نتیجه می‌دهد و اگر A یک ایدآل از A^{**} باشد، آن‌گاه میانگین‌پذیری ضعیف A، $2n + 1-$ میانگین‌پذیری ضعیف A را نتیجه می‌دهد. این نتایج را در فصل بعد ثابت می‌کنیم.

اکنون این سوال پیش می آید که آیا میانگین‌پذیری ضعیف، ۳− میانگین‌پذیری ضعیف را نتیجه می‌دهد؟ پس از یک مطالعه‌ی گسترده درمورد جبرهای باناخ به فرم $A \oplus X$ در فصل ۳، پاسخ این سوال را در فصل ۴ ارایه می‌کنیم.

۱—۱ حاصلضرب آرنز

آرنز [۱] برای جبر باناخ A دو نوع ضرب جبری روی A^{**}، دوگان دوم A، به صورت زیر تعریف کرده است

$$\Box : A^{**} \times A^{**} \to A^{**}$$

$$(\Phi, \Psi) \rightarrowtail \Phi\Box\Psi$$

که برای $a, b \in A$، $f \in A^*$ و $\Phi, \Psi \in A^{**}$ داریم

$$\langle f, \Phi\Box\Psi\rangle = \langle \Psi f, \Phi\rangle,$$

$$\langle a, \Psi f\rangle = \langle fa, \Psi\rangle,$$

$$\langle b, fa\rangle = \langle ab, f\rangle.$$

همچنین دومین ضرب آرنز را با نماد $\Diamond$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Diamond : A^{**} \times A^{**} \to A^{**}$$

$$(\Phi, \Psi) \to \Phi\Diamond\Psi$$

که برای $a \in A$، $f \in A^*$ و $\Phi, \Psi \in A^{**}$ داریم

$$\langle f, \Phi\Diamond\Psi\rangle = \langle f\Phi, \Psi\rangle,$$

$$\langle a, f\Phi\rangle = \langle af, \Phi\rangle,$$

$$\langle b, af\rangle = \langle ba, f\rangle.$$

اگر حاصلضرب‌های آرنز اول و دوم با هم برابر باشند؛ یعنی اگر برای هر $\Phi, \Psi \in A^{**}$ داشته باشیم $\Phi\Box\Psi = \Phi\Diamond\Psi$، آن‌گاه گوییم A منظم آرنز است. C^*- جبرها همواره منظم آرنز می‌باشند [۹]. برای جزییات بیشتر در مورد ضرب‌های آرنز مرجع [۱۴] را ببینید.

اگر $A^{(۲m+۲)}$ را به عنوان دوگان دوم $A^{(۲m)}$ برای $m \geq ۰$ در نظر بگیریم، آن‌گاه می‌توانیم با استفاده از استقرا برای $n \geq ۱$ حاصلضرب آرنز را برای $A^{(۲n)}$ تعریف کنیم. در این پایان‌نامه همواره برای همه‌ی $۲n-$ امین جبرهای دوگان $A^{(۲n)}$ حاصلضرب اول آرنز را در نظر می‌گیریم و گاهی اوقات به جای $\Phi\Box\Psi$ از $\Phi\Psi$ استفاده می‌کنیم. اکنون اگر $(u_\alpha), (v_\beta)$ تورهایی در $A^{(۲n)}$ و μ, ν در $A^{(۲n+۲)}$ باشند و داشته باشیم

$$\mu = wk^* - \lim_\alpha \quad u_\alpha$$

و

$$\nu = wk^* - \lim_{\alpha} \quad v_\beta$$

آن گاه داریم [۱۱]

$$\mu\Box\nu = wk^* - \lim_{\alpha} wk^* - \lim_{\beta} \quad u_\alpha v_\beta.$$

۱—۲ اعمال مدولی دو طرفه‌ی $A^{(2m)}$ روی $X^{(2m)}$

اگر A یک جبر باناخ و X یک $A-$ مدول دو طرفه‌ی باناخ باشد، آن‌گاه X^{**} یک $A^{**}-$ مدول دو طرفه‌ی باناخ با اعمال مدولی تعریف شده به صورت زیر است؛ در واقع، برای $f \in X^*, \phi \in X^{**}, u \in A^{**}$ و $x \in X$ تابعک‌های $\phi f \in A^*, fx \in A^*, uf \in X^*$، برای $a \in A$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle a, \phi f\rangle = \langle f \cdot a, \phi\rangle,$$

$$\langle a, fx\rangle = \langle x \cdot a, f\rangle$$

وبرای $x \in X$ داریم

$$\langle x, u \cdot f\rangle = \langle fx, u\rangle.$$

اکنون برای $\phi \in X^{**}$ و$u \in A^{**}$، $u \cdot \phi, \phi \cdot u \in X^{**}$ را برای هر $f \in X^*$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle f, u \cdot \phi\rangle = \langle \phi f, u\rangle,$$

$$\langle f, \phi \cdot u\rangle = \langle u.f, \phi\rangle.$$

این‌ها اعمال مدولی A^{**} روی X^{**} را نشان می‌دهند. همچنین برای $u \in A^{**}$ و $f \in X^*$، $u \cdot f \in X^*$، یک عمل مدولی باناخ چپ A^{**} روی X^* است. اگر $u = a \in A$، آن گاه این اعمال مدولی همان اعمال مدولی A روی X^{**} خواهند بود. اگر$A^{(2m)}$ یک A جدید و $X^{(2m)}$ یک X جدید باشد، آن‌گاه مشابه بحث قبل برای $m \geq 0$، $X^{(2m+2)}$ یک $A^{(2m+2)}-$مدول دو طرفه‌ی باناخ است. بنابراین درحالت کلی برای هرعدد صحیح نامنفی m ، $X^{(2m)}$ یک $A^{(2m)}-$ مدول دو طرفه‌ی باناخ است. چون برخی روابط به دست آمده از این روش برای استفاده‌های بعد مفیدند، چند تعریف را با بیان جزئیات در ادامه می آوریم.

فرض کنیم اعمال مدولی $A^{(2m)}$ روی $X^{(2m)}$ برای $m \geq 0$ تعریف شده باشند. در این صورت برای $k \geq 1$، $X^{(2m+k)}$ یک $A^{(2m)}$ – مدول دو طرفه‌ی باناخ است. اگر $\Lambda \in X^{(2m+k)}$ و $u \in A^{(2m)}$، آن‌گاه برای $\gamma \in X^{2m+k-1}$ اعمال مدولی به صورت زیر خواهند بود

$$\langle \gamma, u \cdot \Lambda \rangle = \langle \gamma \cdot u, \Lambda \rangle,$$
$$\langle \gamma, \Lambda \cdot u \rangle = \langle u \cdot \gamma, \Lambda \rangle,$$

که در این جا $\Lambda \cdot u, u \cdot \Lambda \in X^{(2m+k)}$. اگر $u = a \in A$، آن‌گاه این اعمال همان اعمال $A-$ مدولی دو طرفه روی $X^{(2m+k)}$ است. اکنون برای $F \in X^{(2m+1)}$ و $\Phi \in X^{(2m+2)}$، $\Phi F, F\Phi \in A^{(2m+1)}$ برای $u \in A^{(2m)}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\langle u, F\Phi \rangle = \langle F, \Phi \cdot u \rangle (= \langle u \cdot F, \Phi \rangle),$$
$$\langle u, \Phi F \rangle = \langle F \cdot u, \Phi \rangle (= \langle F, u \cdot \Phi \rangle).$$

برای هر جبرباناخ Y و هر $y \in Y$، $\widehat{y}$ بر تصویر متعارف y در Y^{**} دلالت دارد. در حالت کلی ما این نماد را برای تصویر متعارف y در هر $2m-$ امین فضای دوگان Y به کار می بریم. اگر $F \in X^{(2m+1)}$ و $\phi \in X^{(2m)}$، آن گاه $F\widehat{\phi}$ همان $F\phi$ و $\widehat{\phi}F$ همان ϕF است و برای $u \in A^{(2m)}$ داریم

$$\langle u, F\phi \rangle = \langle \phi \cdot u, F \rangle, \langle u, \phi F \rangle = \langle u \cdot \phi, F \rangle. \qquad (1-3)$$

با به کار بردن تصویر متعارف F یا Φ در $2l-$ امین فضای دوگان می‌توانیم برای $F \in X^{(2m+1)}$ و $\Phi \in X^{(2n)}$، $F\Phi$ و ΦF را تعریف کنیم. در این جا $\Phi F, F\Phi \in A^{(2k+1)}$ و $k = \max\{m, n-1\}$. حال اگر $\mu \in A^{(2m+2)}$ و $F \in X^{(2m+1)}$، آن‌گاه $\mu \cdot F \in X^{(2m+1)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle \phi, \mu \cdot F \rangle = \langle F\phi, \mu \rangle \quad (\phi \in X^{(2m)}).$$

و این دقیقا عمل $A^{(2m+2)}-$ مدولی باناخ چپ را روی $X^{(2m+1)}$ نشان می‌دهد. نهایتا برای $\mu \in A^{(2m+2)}$ و $\Phi \in X^{(2m+2)}$ داریم $\mu \cdot \Phi, \Phi \cdot \mu \in X^{(2m+2)}$ و

$$\langle F, \mu \cdot \Phi \rangle = \langle \Phi F, \mu \rangle \;\; \langle F, \Phi \cdot \mu \rangle = \langle \mu \cdot F, \Phi \rangle \;\; (F \in X^{(2m+1)})$$

این‌ها اعمال $A^{(2m+2)}-$ مدولی دو طرفه روی $X^{(2m+2)}$ را نشان می دهند. به این ترتیب تعریف کامل می‌شود.

اگر در $\sigma(A^{(2m+2)}, A^{(2m+1)})$ برای تور $(u_\alpha) \subset A^{(2m)}$ داشته باشیم

$$\mu = wk^* - \lim_{\alpha} u_\alpha$$

و همچنین اگر در $\sigma(X^{(2m+2)}, X^{(2m+1)})$ برای $(\phi_\beta) \subset X^{(2m)}$ داشته باشیم

$$\phi = wk^* - \lim_{\beta} \phi_\beta,$$

آن‌گاه در $\sigma(X^{(2m+2)}, X^{(2m+1)})$ داریم

$$\mu \cdot \Phi = wk^* - \lim_{\alpha} \lim_{\beta} \quad u_\alpha \cdot \phi_\beta,$$

$$\Phi \cdot \mu = wk^* - \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \quad \phi_\beta \cdot u_\alpha.$$

چون برای $\mu \in A^{(2m+2)}$ و $\phi \in X^{(2m)}$ داریم $\mu \cdot \phi = \mu \cdot \widehat{\phi}$ و $\phi \cdot \mu = \widehat{\phi} \cdot \mu$، پس برای $F \in X^{(2m+1)}$ داریم

$$\langle F, \mu \cdot \phi \rangle = \langle \phi F, \mu \rangle, \quad \langle F, \phi \cdot \mu \rangle = \langle F\phi, \mu \rangle. \quad (۴-۱)$$

همچنین روابط زیر برای $u \in A^{(2m)}$، $\Phi \in X^{(2m)}$، $\phi \in X^{(2m-2)}$، $f \in X^{(2m-1)}$ و $m \geq 1$ برقرارند

$$u \cdot \widehat{f} = \widehat{u} \cdot \widehat{f} = \widehat{(u \cdot f)},$$

$$\widehat{f}\widehat{\phi} = \widehat{(f\phi)},$$

$$\widehat{\phi}\widehat{f} = \widehat{(\phi f)},$$

$$\widehat{u} \cdot \widehat{\Phi} = \widehat{(u \cdot \Phi)},$$

$$\widehat{\Phi} \cdot \widehat{u} = \widehat{(\Phi \cdot u)}.$$

قضیه ۱۴.۱ فرض کنیم X, Y دو $A-$ مدول دو طرفه باناخ باشند. در این صورت برای هر عدد صحیح $m \geq 1$ و هر همریختی $A-$ مدولی دو طرفه‌ی پیوسته

$$\tau : X \to Y$$

$2m-$ امین عملگر دوگان τ یعنی

$$\tau^{(2m)} : X^{(2m)} \to Y^{(2m)}$$

یک همریختی $A^{(2m)}-$ مدولی دو طرفه‌ی باناخ است.

اثبات. کافی است نشان دهیم قضیه برای $m = ۱$ برقرار است. فرض می‌کنیم $\Phi \in X^{**}$ و $u \in A^{**}$ و تورهای (a_α) و (x_β) را به ترتیب در A و X در نظر می‌گیریم، به طوری که داریم

$$a_\alpha \to u, \quad x_\beta \to \Phi.$$

چون $\tau^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ ، ضعیف$^*-$ پیوسته است، داریم

$$\begin{aligned}
\tau^{**}(\Phi \cdot u) &= \tau^{**}(wk^* - \lim_\beta \lim_\alpha (\widehat{x_\beta} \cdot \widehat{a_\alpha})) \\
&= wk^* - \lim_\beta \lim_\alpha \tau^{**}(\widehat{x_\beta} \cdot \widehat{a_\alpha}) \\
&= wk^* - \lim_\beta \lim_\alpha \tau(x_\beta \cdot a_\alpha)\widehat{} \\
&= wk^* - \lim_\beta \lim_\alpha \tau(x_\beta)\widehat{} \cdot \widehat{a_\alpha} \\
&= wk^* - \lim_\beta \lim_\alpha \tau^{**}(\widehat{x_\beta}) \cdot \widehat{a_\alpha} \\
&= \tau^{**}(\Phi) \cdot u.
\end{aligned}$$

به همین ترتیب عمل چپ نیز روی آن قابل تعریف است. بنابر این τ^{**} یک همریختی $A^{**}-$ مدولی دو طرفه‌ی باناخ است. ■

قضیه ۱.۷ از [۱۲] یک قضیه مشابه ۱۴.۱ درباره‌ی مشتق هاست .

قضیه ۱۵.۱ اگر A یک جبر باناخ، X یک $A-$ مدول دو طرفه‌ی باناخ و $D : A \to X$ یک مشتق پیوسته باشد، آن‌گاه برای $n \geq ۰$،

$$D^{(۲n)} : A^{(۲n)} \to X^{(۲n)}$$

$۲n-$ امین عملگر دوگان D نیز مشتق پیوسته است.

اثبات. برای $n = ۱$ اثبات مشابه قضیه‌ی قبل است و با استقرا برای هر n به دست می‌آید. ■