بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

حل سه بعدی تحریک سیال دارای سطح آزاد به روش بدون شبکه ی توابع پایه نمایی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران

گرایش سازه

سهیل بزازاده

استاد راهنما

دکتر بیژن برومند

۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران-سازه

سهیل بزاززاده

تحت عنوان

حل سه بعدی تحریک سیال دارای سطح آزاد به روش بدون شبکه ی توابع پایه نمایی

در تاریخ (۱۳۹۳/۲/۲۰) توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر بیژن برومند	امضاء
۲- استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر احمد رضا پیشه ور	امضاء
۳- استاد داور	دکتر محمدمهدی سعادت‌پور	امضاء
۴- استاد داور	دکتر مجتبی ازهری	امضاء

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر عبدالرضا کبیری	امضاء

تشکر و قدردانی

- با تشکر و سپاس فراوان از استاد عزیزم **جناب آقای دکتر بیژن برومند** که در نهایت صبر و دقت راهنمای من در انجام این پایان نامه بودند.
- با سپاس فراوان از **جناب آقای دکتر احمدرضا پیشه ور** که در طول دوران تحصیل و انجام پایان نامه همواره مشوق و راهنمای من بودند.
- با سپاس فراوان از **جناب آقای دکتر سید مهدی زندی** که در انجام پایان نامه همواره مشوق و راهنمای من بودند.
- با سپاس از **کلیه اساتید محترم دانشکده مهندسی عمران** به پاس خدماتی که همواره به دانشجویان این دانشکده ارائه کرده‌اند.
- با قدردانی از **خانواده‌ام** که همواره همراه من بوده و هستند.
- با تشکر از **کلیه دوستانم** که در طی دوران تحصیل از لطف و محبت آن‌ها برخوردار بوده‌ام.

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به

پدر و مادرم

چکیده

در این پایان نامه، روشی نیمه تحلیلی و بدون شبکه برای حل معادلات حرکت سیال دارای سطح آزاد ارائه شده است. از دو نوع نگرش که یکی بر پایه ی تئوری فشار و دیگری بر پایه‌ی تئوری پتانسیل سرعت استوار است، برای حل این نوع مسائل به صورت سه بعدی استفاده شده است. در تئوری فشار، معادلات ناویر استوکس برای سیال تراکم ناپذیر غیر لزج به صورت معادله ی لاپلاس فشار تبدیل خواهد شد که در هر گام زمانی با یک روش بدون شبکه با استفاده از توابع پایه، حل شده و سایر پارامتر های سیال مانند شتاب، سرعت و جابه‌جایی از آن حاصل می‌شود. با توجه به نگرش لاگرانژی هندسه‌ی سیال به هنگام می‌شود و حل در زمان پیش می‌رود. پاسخ معادله به صورت یک سری از توابع پایه نمایی با ضرایب ثابت در نظر گرفته می‌شود، توابع فوق به گونه ای انتخاب می‌شوند که معادلات دیفرانسیل در داخل ناحیه حل به طور دقیق ارضا شوند. ضرایب ثابت نیز از ارضای شرایط مرزی بر روی مجموعه نقاطی از مرز، با استفاده از یک تبدیل ویژه به دست می‌آیند.

در نگرش دوم یعنی استفاده از پتانسیل سرعت، برای سیال تراکم ناپذیر غیر لزج؛ معادلات ناویر استوکس به صورت معادله‌ی لاپلاس پتانسیل سرعت تبدیل خواهد شد که با استفاده از حل بدون شبکه‌ی توابع پایه نمایی، سرعت ودر نتیجه جابه‌جایی قابل محاسبه است. همچنین از یک الگوریتم زمانی کوتاه تر استفاده شده که زمان حل را به طور قابل توجهی به نصف کاهش می‌دهد. از آنجا که دقت در ارضای معادله لاپلاس ۳ بعدی از اهمیت ویژه‌ای برای همگرایی بیشتر حل در طول زمان دارد، در این پایان‌نامه الگوی جدیدی برای انتخاب توابع نمایی معرفی می‌شود. در ادامه پس از ارائه مثال های خطی و غیر خطی در مخازن مکعبی، مکعب مستطیل و استوانه‌ای به مقایسه‌ی نتایج حاصل از آن ها با دیگر روش‌های لاگرانژی موجود پرداخته می‌شود، که به لحاظ صرف وقت و هزینه‌ی محاسبات بسیار درخور توجه است.

کلمات کلیدی

توابع پایه نمایی، روش بدون شبکه، معادلات ناویر استوکس، معادلات لاگرانژی حرکت سیال، تئوری فشار، تئوری پتانسیل سرعت

فهرست مطالب

فصل اول
مقدمه و کلیات

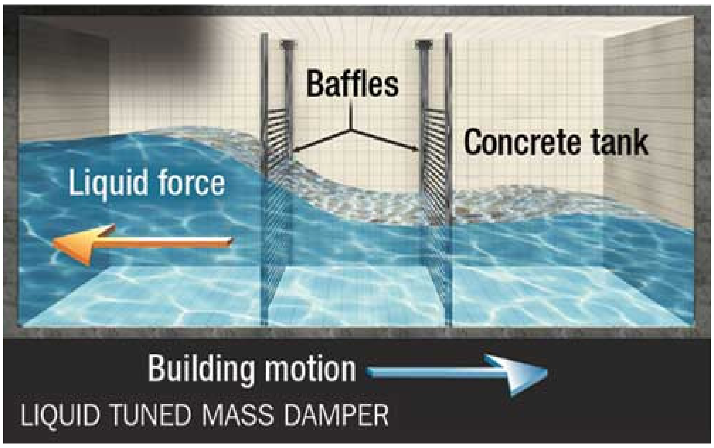
۱-۱-مقدمه

اگرچه حل بسته‌ی معادلات دیفرانسیل در اغلب مسائل مهندسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، ولی از آنجا که حل مستقیم (بسته‌ی) این معادلات همراه با ارضای کلیه‌ی شرایط مرزی کمی پیچیده می‌باشد، این امر بسیاری از مهندسین را بر آن داشته که از روش‌های عددی برای حل این گونه معادلات بهره جویند. از جمله این معادلات، می‌توان به معادلات ناویراستوکس[۱] و پیوستگی[۲] که از معادلات معروف حاکم بر سیال هستند، اشاره نمود. به علت ماهیت غیر خطی حرکت ذرات سیال، کاربرد گسترده‌ی نوسانات دینامیکی سیال دارای سطح آزاد و عدم تطبیق دقیق پاسخ‌های تئوریک خطی با حرکت واقعی سیال در هنگام نوسانات شدید؛ تمایل زیادی برای حل این گونه مسائل به صورت عددی بوجود آورده است. از جمله کاربردهای این مسائل را می‌توان در مستهلک

[۱] Naver-Stokes equation

[۲] Continuity equation

کننده‌های طبقه‌ی فوقانی (شکل ۱-۱) برج های بلند، مخازن تعادل کشتی‌ها[۱]، سازه های فراساحلی، سدها، مخازن سیال و ... مشاهده کرد.



شکل ۱-۱. نمونه‌ای از کاربرد تحلیل دینامیک سیالات در مستهلک کننده‌های طبقه‌ی فوقانی برج‌های بلند

به طور کلی در مکانیک سیالات دو رویکرد کلی اویلری و لاگرانژی برای مدل کردن حرکت سیال وجود دارد؛ در نگاه اویلری[۲]، به یک حجم خاص سیال در فضا توجه می‌شود که در محل خود ثابت بوده و سیال عبور کننده از آن که مرتب جایگزین می گردد. در نگاه لاگرانژی، ذرات سیال دنبال می‌شوند و بدین ترتیب شکل حجم سیال دائم تغییر کرده ولی جرم کل آن ثابت می‌ماند. بنابراین در حل مسائل دینامیک سیالات در قالب لاگرانژی[۳]، مرزهای سیال دائماً در حال حرکت بوده و ناحیه حل در طول زمان مرتباً تغییر می کند. لذا در روش هایی نظیر اجزا محدود[۴] که نیازمند تولید شبکه[۵] در هر گام زمانی[۶] می‌باشد، هزینه‌ی محاسبات و نیاز به برنامه نویسی‌های پیچیده افزایش می‌یابد.

از جمله روش‌هایی که اخیراً در حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل مختلف مهندسی مورد توجه قرار

---

[۱] Ballast tank
[۲] Eulerian formulation
[۳] Lagrangian formulation
[۴] Finite element
[۵] Mesh generation
[۶] Time step

گرفته است، حل به کمک توابع پایه می‌باشد. از این توابع هم در روش اجزا محدود و هم روش‌های بدون شبکه استفاده شده است. روشی که در این پایان نامه برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیال تراکم ناپذیر غیر لزج ارائه شده است، از انواع بدون شبکه‌ی سه بعدی با استفاده از توابع پایه نمایی در فرم لاگرانژی است. در روش توسعه داده شده در این تحقیق، سیال در تماس با دیواره‌های صلب است که در آن شرط تراکم‌ناپذیری به صورت دقیق ارضا می‌شود. همچنین در مسائل دینامیکی، با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد و فرمول بندی نیمه تحلیلی، معادلات حاکم تنها به معادله‌ی لاپلاس فشار و یا لاپلاس پتانسیل سرعت خلاصه شده و سایر مشخصه‌های سیال (شتاب، سرعت و جابه‌جایی) از آن حاصل می‌شود؛ لذا شرایط مرزی مسأله بسیار ساده بیان می‌شود. بدین منظور پاسخ کلی سیستم در هر گام زمانی، به صورت مجموعی از توابع پایه در نظر گرفته می‌شود؛ به صورتی که توابع مذکور در معادلات دیفرانسیل صدق می‌کند. در این حالت ضرایب آن‌ها از ارضای شرایط مرزی در مرزهای سیال (شامل سطح آزاد و دیواره های نفوذناپذیر صلب) بدست می‌آیند. توابع نمایی به کار رفته در همه ی گام ها ثابت می‌مانند و تنها ضرایب آنها با توجه به شرایط مرزی و حل مسأله در هر گام تغییر می‌کند.

۱-۲-تاریخچه و پیشینه‌ی علمی

در ۳۰ سال گذشته، بیشتر دیدگاه اویلری در شبیه سازی‌های رایانه‌ای مورد توجه قرار داشت و این امر مستلزم آن بود که معادلات پیچیده ی تماسی[۱] برای سیال ترکم ناپذیر دارای سطح آزاد حل شوند [۱]. از آنجا که مرزهای سیال در اینگونه مسائل دائماً در حال تغییر است، حل آنها از روش اویلری نیازمند صرف هزینه و وقت زیادی می‌باشد. در سال‌های اخیر فرمول بندی لاگرانژی [۲] بیشتر مورد توجه قرار گرفته و یا ترکیب دو روش برای افزایش دقت و قدرت حل، تحت عنوان فرمول‌بندی لاگرانژی-اویلری[۲] اختیاری، استفاده شده است. در نوع اخیر از فرمول‌بندی حرکت شبکه‌ی نقاط مستقل از حرکت ذرات سیال می‌باشد [۳] . همچنین، برخی از محققین از این روش به صورت ترکیبی برای حل مسائل سیال دارای سطح آزاد[۳] استفاده کرده اند [۴]. در ادامه به برخی تحقیقات انجام شده در حل مسائل با مرزهای متحرک به روش‌های مختلف اشاره شده است.

به طور کلی دو نوع حل تحلیلی[۴] و عددی برای مسائل سیال تراکم‌ناپذیر وجود دارد. فالتینسن دانشمند نروژی، نروژی، از پیشگامان حل تحلیلی می‌باشد [۵]. منظور از حل تحلیلی، حل دقیقی است که با صرف نظر از اثرات غیر خطی سیال به دست می‌آید. این حل برای بسیاری از مسائل مهندسی مناسب است زیرا که چندان وقت‌گیر نبوده و یک دید کلی وتقریبی را برای محققین به وجود می‌آورد. حل دو بعدی فالتینسن برای مخازن مکعب مستطیلی

---

[۱] Contact problems

[۲] Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation (ALE)

[۳] Sloshing problem

[۴] Analytic

راهگشای بسیاری از محققین بود. از آنجا که این حل برای مسائل واقعی قابل استفاده نبود و با حل آزمایشگاهی تفاوت زیادی داشت، راه حل‌های عددی مورد توجه قرار گرفت.

وو و همکاران[۶] بااستفاده از نگرش پتانسیل سرعت[۱] و از روش اجزا محدود به حل معادله‌ی لاپلاس سه بعدی با در نظر گرفتن اثرات غیر خطی پرداختند. از طرفی لی و فلمینگ [۷] با همان نگرش معادله ی لاپلاس را به روش تفاضل‌های محدود حل نمودند.

لو ویانگ [۸] در مقاله خود در سال ۲۰۰۴ معادلات ناویر- استوکس را بر اساس سرعت- چرخش[۲] بیان کرده و سپس از اجزا محدود لاگرانژی- اویلری اختیاری برای حل آن استفاده کرده‌اند؛ در این حالت فشار از معادلات ناویر- استوکس حذف شده و در طول حل نیازی به محاسبه آن نمی‌باشد. در این مقاله مسائل با تغییر شکل‌های بزرگ چون نوسانات سطح آزاد سیال درون مخزن صلب[۳] ، انتشار موج تنها[۴] و برخورد آن با دیواره صلب و همچنین اندرکنش دو موج متقابل[۵] بررسی شده است. دوراته و همکاران[۹] نیز از اجزا محدود لاگرانژی- اویلری اختیاری برای حل مسائلی چون انتشار موج تنها وبرخورد آن با دیواره صلب، شکست سد[۶] و حرکات حباب هوا در درون سیال استفاده کرده اند.

از آنجا که روش‌های بدون شبکه[۷] نیاز به صرف هزینه برای ساختن شبکه[۸] را نداشت و در بعضی از آنها انتگرال‌های پیچیده، که اکثراً با صرف وقت فراوان همراه بود، استفاده نمی‌شد؛ بسیاری از محققین بر آن شدند که برای توسعه‌ی این روش‌ها اقدام نمایند. از جمله روش‌های بدون شبکه در حرکت سیالات، روش‌های ذره‌ای است؛ که در آنها سیال به صورت مجموعه‌ای از ذرات در نظر گرفته شده و هر ذره در یک رفتار لاگرانژی دنبال می‌شود. اولین ایده در این زمینه توسط جینگولد و موناقان[۱۰] با عنوان روش هیدرودینامیک ذره‌ای[۹] هموار مطرح شد؛ که در در آن از توابع کرنل برای تقریب پاسخ‌ها استفاده شده است. ایده‌های متعدد دیگری از روش هیدرودینامیک ذره‌ای هموار حاصل شده است؛ یکی از این روش‌ها که نتایج درخور توجهی دارد، روش شبه ضمنی ذره متحرک[۱۰] نام دارد که در سال ۱۹۹۶ توسط کوشیزوکا و اوکا [۱۱] ارائه شده است. این روش نیز از یک تابع کرنل برای درونیابی

---

[۱] Potential Flow

[۲] Velocity-vorticity formulation

[۳] Sloshing Problem

[۴] Solitary wave propagation

[۵] Interaction of two opposite solitary waves

[۶] Broken dam (water column collapse)

[۷] Meshless methods

[۸] Mesh Generation

[۹] Smooth Particle Hydrodynamics Method (SPH)

[۱۰] Moving Particle Semi-Implicit Method (MPS)

مجهولات استفاده می‌کند. در این روش از فرم ضعیف معادلات استفاده می‌شود، در حالی که در روش قبلی فرم قوی معادلات به کار به کار برده شده است.

در روش‌های ذره‌ای[۱] معادلات حاکم به صورت معادلات اندرکنش حرکت ذرات نوشته شده و بـدین ترتیـب ذرات سیال می‌توانند از سطح سیال جدا شده و مجدداً به آن بازگردند. بدین ترتیب مدل‌سازی تغییر شکل‌های بـزرگ ساده‌تر می‌شود. در واقع بعد از جینگولد و موناقان، افراد زیادی سعی کرده‌انـد تـا روش‌هـای بـدون شـبکه‌بنـدی ارائـه نمایند که بتوانند معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در شاخه‌های مختلف را با دقت، سرعت و همگرایی قابل قبول حل کنند.

ایدلسون و همکاران[۱] در سال ۲۰۰۳ از اجزاء محدود بدون شبکه[۲] برای حل مسائل انـدرکنش سـیال- سـازه[۳] در قالب لاگرانژی استفاده کرده‌اند. اُنیاته و همکاران[۱۲-۱۳] در سال ۲۰۰۴ روش دیگری که در زمینه‌ی حل مسـائل سیال در تماس با دیواره‌های صلب بود، به نام اجزاء محدود ذره ای[۴] ارائه کردند. در ایـن روش گـره‌هـای مربـوط بـه شبکه‌بندی حوزه سیال شبیه ذراتی عمل می‌کنند که می‌توانند آزادانه حرکت کنند و حتی از حـوزه اصـلی سـیال جـدا شوند. شبکه بندی اجزاء محدود که گره‌ها را به هم متصل کرده، ناحیه حل گسسته سازی شده‌ای را تعریـف مـی‌کنـد که معادلات حاکم در آن به روش اجزاء محدود استاندارد و در فرم لاگرانژی حل می‌شوند.

یکی از موضوعات مهم در بررسی رفتار سیال، تحلیل سه بعدی آن است؛ چرا که درک واقعـی‌تـری از مسـئله ایجاد می‌کند و با مدل‌های آزمایشگاهی تطبیق بیشتری دارد. چن و همکـاران[۱۴] در سـال ۲۰۰۷ بـه مـدل سـازی سـه بعدی مخازن مکعبی و استوانه‌ای به روش المان‌های مرزی پرداختند. امـا روش آن‌هـا بسـیار پـر هزینـه بـود، چـرا کـه گام‌های زمانی بسیار کوچکی را برای حل مسأله انتخاب کردند.

از جمله افرادی که دراین زمینه کار کرده‌اند می‌توان لیو و لین[۱۵] را نام برد که از یک تکنیـک ویـژه[۵] بـرای حل مسائل سه بعدی سیال در مخازن مکعبی بهره برده‌اند. در روش آنها حجم از سلول های جدا گانه‌ای که هر کـدام از این سلول‌ها حاوی سیال وگاز (هوای روی سطح) می‌باشد، تشکیل شده است. مدل‌سازی شکسـت سـطح سـیال، از مزیت روش آنهاست. در عین حال روش آن‌ها در مقایسه با روش ارائه شـده در ایـن پایـان‌نامـه نیازمنـد صـرف وقـت بیشتری می‌باشد.

یانگ و همکاران[۱۶] در سال ۲۰۰۵ از روش توابع پایه برای حل معادلات ناویر- استوکس در غیاب نیروهـای اینرسی و ترم‌های غیر خطی (معادلات استوکس) در نواحی حلِ مستطیلی سوراخ‌دار استفاده کرده‌انـد. پایـه‌هـای حل

---

۱ Particle Methods

۲ Meshless Finite Element Method (MFEM)

۳ Fluid-Structure Interaction (FSI)

۴ Particle Finite Element Method (PFEM)

۵ Bi-CGSTAB technique with Volume-Of-Fluid (VOF) method

در این حالت استوکس‌لِت[۱] نامیده می‌شود. همین محققین در سال ۲۰۰۶ [۱۷] معادلات استوکس را در حالت دو بعدی و سه بعدی با استفاده از استوکس‌لِت برای مسائل مختلفی چون جریان در گودال مربعی[۲] و مکعبی[۳] و نیز گودال با مرز موج‌دار[۴] حل نموده‌اند. یانگ و همکاران[۱۸] در تحقیق دیگری، پس از تبدیل معادلات استوکس به معادلات هارمونیک و بای‌هارمونیک اقدام به حل آنها نموده‌اند. بدین ترتیب بدست آوردن پایه‌های حل ساده تر بوده و نتایج دقیق‌تری حاصل شده است.

تسای و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۰۶ از همین روش برای حل جریان پایدار سه بعدی استفاده کرده‌اند. در واقع آنچه در مراجع [۱۶–۱۷, ۱۹] ارائه شده است را می‌توان چند تحقیق مشابه قلمداد کرد. همین محققین در مقاله دیگری [۲۰] با استفاده از روش توابع پایه، با پایه‌های وابسته به زمان، اقدام به حل جریان ناپایدار جزئی در یک محیط دمبلی شکل نمودند.

در سال ۲۰۱۱ وو و چَنگ [۲۱] یک روش بدون شبکه با استفاده از توابع پایه شعاعی[۵] را ارائه نمودند و از یک یک الگوریتم زمانی به نام پرش قورباغه[۶] به همراه اصلاح کرک نیکلسون[۷] برای حل معادله‌ی لاپلاس استفاده نمودند. آنها ابتدا به حل معادله‌ی پواسون حاکم بر جریان یک لوله که حل دقیق آن مشخص بود پرداختند و سپس تحریک دو بعدی و سه بعدی را در مخازن مکعبی مورد بررسی قرار دادند. یکی از معایب حل آن‌ها این بود که می‌بایست علاوه بر مرزها، در داخل ناحیه حل نیز نقاط حل در نظر گرفته می‌شد.

در سال ۲۰۱۲ یانگ و همکاران [۲۲] نمونه‌ای از اندرکنش قوی سیال- سازه دو بعدی را به کمک ترکیب دو روش هیدرودینامیک ذره‌ای هموار و اجزامحدود، ارائه نمودند و توانستند شکست سد با دریچه‌ای الاستیک و همچنین نوسانات سیال با مانع الاستیک درون مخزن صلب را مدل کنند. آنها نتایج خود را با نتایج آزمایشگاهی نیز به خوبی تطبیق دادند.

در سال ۲۰۱۲ زندی و همکاران [۲۳] توانستند با استفاده از یک روش بدون شبکه توابع پایه نمایی[۸] به صورت صورت دو بعدی مسائل خطی و غیر خطی سیال را حل کنند. برخی از مسائلی که آن‌ها در مقاله‌ی خود ارائه نمودند عبارتند از: نوسانات سیال تحت تاثیر شتاب ثقل و شکل اولیه سطح آزاد، مخزن حاوی سیال تحت تحریک

---

[۱] Stokeslet

[۲] Square cavity

[۳] Cubic cavity

[۴] Wave-shaped bottom cavity

[۵] Radial Basis Function method (RBF)

[۶] Leap-Frog approach

[۷] Crank–Nicolson approach

[۸] Exponential Basis Function method (EBF)

هارمونیک، انتشار و برخورد موج تنها با دیواره‌های صلب و اندرکنش دو موج تنهای متقابل . مزیتی که روش آنها نسبت به دیگر روش‌های حل داشت، یکی سادگی نسبی الگوریتم حل و دیگری نداشتن انتگرال‌های زمان بر و در نهایت همگرایی بسیار بالا با وجود افزایش ده تا بیست برابری هر گام زمانی، بود. در واقع ادامه‌ی کار آنها بستری را فراهم نمود تا بتوان در این پایان نامه به مسائل سه بعدی سیال پرداخت.

روش بدون شبکه توابع پایه نمایی تا به حال در مسائل گوناگونی چون ورق[۲۴-۲۸]، الاستیسیته‌ی غیر محلی[۲۹]، مسائل وابسته به زمان[۳۰] و ... نیز کاربرد داشته است که در سال‌های اخیر توانسته قدرت خود را در حل مسائل متنوع و پیچیده‌ی مهندسی نشان دهد.

۱-۳-روش حل و محتوی فصول آتی

همانگونه که پیش از این اشاره شد، برای حل معادلات لاگرانژی حرکت سیال به روش‌های اجزاء محدود، در طول فرایند حل لازم است که شبکه بندی ناحیه حل مرتباً تجدید شود. چرا که مرزهای حل دائماً در حال تغییر بوده و با دنبال کردن لاگرانژی شبکه‌بندی اولیه، به علت تغییر شکل‌های نامناسب نقاط، نمی‌توان به حل مناسب دسترسی پیدا کرد.

روشی که در این پایان‌نامه برای حل معادلات لاگرانژی حرکت سیال ارائه می‌شود، بدون شبکه بوده و تراکم‌ناپذیری سیال نیز به سادگی ارضا می‌شود. در این تحقیق برای حل معادلات حاکم بر حرکت سیال غیر لزج نیوتنی از روش توابع پایه با یک الگوی جدید، استفاده می‌شود. توابع پایه، توابعی هستند که معادلات را به طور دقیق ارضا می‌نمایند و بر اساس همین تعریف ارزیابی می‌شوند. توابعی که در این تحقیق به عنوان پایه‌های حل استفاده می‌شوند، توابع نمایی بوده و متفاوت با توابع منفرد مورد استفاده در حل مسائل المان‌های مرزی می‌باشد؛ به همین دلیل توابع مذکور را توابع گرین هموار می‌نامیم.

با توجه به فرمولبندی نیمه تحلیلی روش حاضر و ارضای دقیق شرط تراکم ناپذیری، معادلات حاکم به معادله لاپلاس فشار سه بعدی تقلیل یافته و سایر مشخصه‌های سیال از حل آن حاصل می‌شود. بدین ترتیب پاسخ کلی سیستم در هر مرحله زمانی به صورت یک سری ساخته شده از توابع نمایی بیان می‌گردد. در روش های معمول توابع پایه، با استفاده از یک سری نقاط مرجع در خارج از ناحیه حل، از روش‌هایی چون روش نقطه‌ای و یا روش حداقل مربعات برای محاسبه ضرایب ثابت سری پاسخ استفاده می‌شود. در روش حاضر از تبدیلی ویژه برای محاسبه‌ی این ضرایب استفاده شده است. این تبدیل اولین بار در مرجع [۳۱] و در حل مسائل انتشار امواج در محیط‌های نیمه بی‌نهایت به روش المان‌های محدود معرفی گردید. با استفاده از این تبدیل، محاسبه‌ی ضرایب سری پاسخ بر اساس ارضای شرایط مرزی در نقاط در نظر گرفته شده بر روی مرز ناحیه حل انجام می‌گیرد. در اینجا با توجه به مختلف بودن شرایط مرزی از تکنیکی جدید برای حل استفاده می‌شود که در مراجع [۳۲-۳۳] ارائه شده است. پس از حل معادلات در

یک بازه‌ی زمانی، هندسه‌ی حل بر اساس مقادیر جابه‌جایی محاسبه شده در نقاط مرزی بهنگام می‌شود؛ سپس مقادیر سرعت نقاط مرزی در موقعیت جدید محاسبه شده و حل وارد مرحله بعدی می‌شود. لازم به ذکر است در این روش از گسسته سازی معادلات در زمان، مشابه با آنچه در دیگر روش‌ها بکار می‌رود، استفاده نخواهد شد. چنانچه در طول حل، نقاط مرزی دچار نامنظمی و درهم‌ریختگی شوند، از الگوریتمی ساده برای تولید نقاط منظم بر روی مرز استفاده خواهد شد.

از آنجا که انتخاب توابع پایه نمایی با آنچه در مراجع [۲۳, ۳۲] کمی متفاوت است، در فصل دوم آرایشی جدید از اعداد مختلط معرفی خواهد شد که در ساختن پایه‌های نمایی از آنها استفاده می‌شود. همچنین در این فصل دقت ارضا شدن معادله بر روی مرزها مورد بررسی قرار می‌گیرد. دقت حل معادله‌ی لاپلاس سه بعدی با روش‌های دیگر با روش ارائه شده در این پایان‌نامه مقایسه شده‌اند. همچنین پارامترهای تاثیرگذار روی دقت نتایج، نظیر تعداد نقاط انتخابی، تعداد پایه‌های انتخابی و آرایش نفاط روی مرزها مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند.

در فصل سوم به روش لاگرانژی با نگرش فشار، به حل دینامیکی سیال دارای سطح آزاد در تماس با مخزن صلب پرداخته می‌شود. در این فصل مباحثی چون معادلات لاگرانژی حرکت سیال غیر لزج، ارضای معادلات با استفاده از توابع نمایی، محاسبه فشار، شتاب، سرعت و جابه‌جایی، بهنگام‌سازی هندسه، تولید نقاط مرزی منظم و ... ارائه می‌شود. در فصل چهارم با نگرش پتانسیل سرعت به حل دینامیکی سیال دارای سطح آزاد پرداخته می‌شود و همچنین الگوریتم زمانی جدیدی ارائه خواهد شد. در فصل پنجم مسائل مختلف مربوط به دینامیک سیال سطح آزاد و اندرکنش آن با سازه صلب بیان می‌شود. در این بخش سعی شده تا مثال‌های متنوعی از مراجع مختلف ارائه شود تا توانایی و مزایای روش حاضر به خوبی مشخص شود. در این ارتباط، مسائل خطی و غیر خطی چون نوسانات سیال درون مخزن مکعبی و استوانه‌ای تحت تحریک هارمونیک و یا تحت تاثیر شتاب ثقل و شکل اولیه سطح آزاد در شرایط و پارامترهای متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل ششم نیز جمع بندی نهایی و پیشنهادات ارائه می‌شود.

فصل دوم

حل معادله‌ی دیفرانسیل لاپلاس در فضای سه بعدی

۲-۱-مقدمه

با توجه به اینکه دقت در حل معادله‌ی دیفرانسیل لاپلاس فشار و یا پتانسیل سرعت بسیار حائز اهمیت است، در این فصل روش توابع پایه با الگویی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل سه بعدی توسعه داده می‌شود. بدین منظور در ابتدا به معرفی معادله‌ی لاپلاس در فضای سه بعدی پرداخته می‌شود. سپس فرمول‌بندی روش توابع پایه برای حل این معادله ارائه می‌گردد. در ادامه الگوی جدید انتخاب توابع پایه برای حل همگن معادلات سه بعدی توسعه داده می‌شود. در پی آن نیز چند نمونه مثال مکعبی، کروی و استوانه‌ای بررسی خواهند شد و همچنین بر روی تاثیر تعداد پایه‌ها، تعداد نقاط انتخابی و نسبت آنها بر روی ارضای معادله دیفرانسیل بحث می‌شود. در پایان در مورد حل معادله‌ی دیفرانسیل سیال سطح آزاد، با شرایط ویژه ی مرزی آن، بحث و شرایط ارضای مرزها در اولین گام زمانی بررسی می‌شود.

۲-۲-معادله دیفرانسیل لاپلاس در فضای سه بعدی

معادله‌ی دیفرانسیل لاپلاس که به افتخار « پی‌یر سیمون لاپلاس[۱] » به این اسم نامیده می‌شود، در واقع یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی محسوب می‌گردد که در فضای سه بعدی به فرم زیر بیان می‌شود

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0 \qquad (۱-۲)$$

حل معادله دیفرانسیل لاپلاس از اهمیت زیادی در رشته‌های مختلف علمی برخوردار است. از جمله کاربردهای این معادله می‌توان به کاربرد آن در دینامیک سیالات و الکترومغناطیس و نجوم اشاره کرد. به عنوان نمونه در مسائل دینامیک سیالات U تابع پتانسیل سیال را بیان می‌کند. یکی از موارد کاربرد این معادله در مهندسی سازه، تحلیل بخش سیال در مسائل با اثر متقابل سیال و سازه است. همچنین در حل مسائل انتقال حرارت، معادله ی لاپلاس بیانگر توزیع دما در حالت پایدار[۲] می‌باشد [۳۴].

معادله لاپلاس مطابق رابطه (۲-۱) در دامنه سه بعدی Ω با مرز $\partial\Omega=\Gamma_D\bigcup\Gamma_N$ به گونه‌ای که Γ_D و Γ_N اشتراک نداشته باشند $(\Gamma_D\bigcap\Gamma_N=\varnothing)$ بیان می‌شود. Γ_D و Γ_N به ترتیب بیان‌گر شرایط مرزی دریشله و نویمان در حل معادله لاپلاس هستند، که مطابق رابطه زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{cases} U=\bar{U}_B & on \quad \Gamma_D \\ \dfrac{\partial U}{\partial n}=\bar{f}_B & on \quad \Gamma_N \end{cases} \qquad (۲-۲)$$

در رابطه فوق $\mathbf{n}$ بردار عمود بر مرز و $\dfrac{\partial}{\partial n}$ معرف گرادیان در جهت بردار $\mathbf{n}$ می‌باشد. به عنوان یک تفسیر فیزیکی از شرایط مرزی دریشله و نویمان می‌توان به مسأله انتقال حرارت اشاره کرد. در این مسأله شرط مرزی دریشله معادل دمای ثابت و شرط مرزی نویمان معادل شارگرمایی بر روی مرز دامنه حل می‌باشد. در نهایت با استفاده از این شرایط مرزی، توزیع دما درون دامنه تعیین می‌شود.

۲-۳-روش توابع پایه برای حل معادله لاپلاس سه بعدی

در ابتدا جواب معادله به صورت یک سری به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\hat{U}_H=\sum_{i=1}^{N}C_i e^{\alpha_i x+\beta_i y+\gamma_i z} \qquad (۳-۲)$$

در سری فوق N تعداد توابع پایه انتخابی برای حل مسأله و ضرایب α_i، β_i و γ_i به صورت اعداد مختلط در نظر گرفته می‌شوند. همچنین ضرایب ثابت C_i با استفاده از یک تبدیل ویژه، که در مرجع [۳۲] به طور کامل بیان

---

[۱] Pierre-Simon Laplace

[۲] Steady state