بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش جبر

عنوان:

رده‌هایی از گروه‌های متناهی

استاد راهنما:
دکتر غلامرضا رضایی زاده

استاد مشاور:
دکتر محمد رضا ریسمانچیان

توسط:
سید ابراهیم میردامادی

دی ۱۳۸۸

چکیده

بسیاری از محققین به جای بررسی گروه‌ها به صورت جداگانه، با در نظر گرفتن رده‌ای خاص با ویژگی مشترک، به بررسی گروه‌ها می‌پردازند.
در این پایان‌نامه به بررسی تعدادی از رده‌های گروه‌های متناهی می‌پردازیم. یکی از موارد مهم در هر رده، بررسی بسته‌ی زیرگروهی، بسته‌ی خارج قسمتی و بسته‌ی ضربی است. بررسی خواص مذکور در هر رده، منجر به معرفی رده‌های جدید خواهد شد. به عنوان مثال رده‌ی گروه‌های CLT (گروه‌های صادق در عکس قضیه‌ی لاگرانژ) بسته‌ی خارج قسمتی نیست. از این رو رده‌ای جدید تحت عنوان رده‌ی گروه‌های QCLT (رده‌ی گروه‌هایی که هر گروه خارج قسمتی آن CLT باشد) معرفی می‌گردد.
لازم به ذکر است بیشترین مطالعه در این پایان‌نامه مربوط به رده‌ی گروه‌های فوق حل‌پذیر است.

کلمات کلیدی CLT، QCLT، پوچ‌توان ـ به‌وسیله‌ی ـ آبلی، خاصیت سیلو تاور، فوق حل‌پذیر.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

متعلق است به	$\in$
متعلق نیست به	$\notin$
اجتماع	$\cup$
اشتراک	$\cap$
a، b را عاد می‌کند	$a\|b$
a، b را عاد نمی‌کند	$a \nmid b$
حاصل‌ضرب مستقیم A و B	$A \times B$
حاصل‌جمع مستقیم A و B	$A \oplus B$
f تابعی از A به B	$f\ :\ A \to B$
عدد اصلی مجموعه‌ی X	$\|X\|$
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n	(m, n)
A زیرگروه B است	$A \leq B$
A زیرگروه اکید B است	$A < B$
A با B یکریخت است	$A \cong B$
زیرگروه تولید شده توسط مجموعه‌ی X	$< X >$
A زیرگروه نرمال B است	$A \lhd B$
A زیرگروه زیرنرمال B است	$A \lhd \lhd B$
مجموعه‌ی همه‌ی هم‌دسته‌های راست (چپ) H در G	G/H
اندیس H در G	$[G : H]$

زیرگروه مشتق G	G'
مغز H در G	$\mathrm{Core}_G(H)$
نرمال‌ساز H در G	$N_G(H)$
گروه خودریختی‌های G	$\mathrm{Aut}(G)$
تصویر همریختی φ	$\mathrm{im}\varphi$
هسته‌ی همریختی φ	$\ker\varphi$
زیرگروه فراتینی G	$\Phi(G)$
زیرگروه فیتینگ G	$\mathrm{Fit}(G)$
مرکز G	$Z(G)$
ابر مرکز G	$Z^*(G)$
مرکز تعمیم‌یافته‌ی G	$\mathrm{genz}(G)$
ابر مرکز تعمیم‌یافته‌ی G	$\mathrm{genz}^*(G)$
مرکزساز x در G	$C_G(x)$
مرکزساز H در G	$C_G(H)$
مرکزساز ضعیف H در G	$C_G^*(H)$
مرکز ضعیف G	$WZ(G)$
شبه مرکز G	$Q(G)$
ابر شبه مرکز G	$Q^*(G)$

پیشگفتار

مطالعه و بررسی خواص گروه‌های متناهی یکی از موضوعات مورد علاقه و توجه بسیاری از محققین در این رشته می‌باشد. بسیاری از محققین به جای بررسی گروه‌ها به صورت جداگانه، با در نظر گرفتن رده‌ای خاص، با ویژگی مشترک، به بررسی گروه‌ها می‌پردازند. هنگام مطالعه‌ی رده‌ای علاوه بر آنکه نتایج مفیدی در زمینه‌ی گروه‌ها به صورت کلی حاصل می‌شود، می‌توانیم به ارتباط بین رده‌ها و شرایط معادل برای آنکه یک گروه عضو این رده باشد دست یابیم. یکی از موارد مهم در مطالعه‌ی گروه‌ها آن است که بدانیم رده‌ی مورد نظر در کدام یک از خواص زیر صدق می‌کند:

(آ). بسته‌ی زیرگروهی: رده‌ی $\mathfrak{G}$ از گروه‌ها بسته‌ی زیرگروهی است هرگاه $G \in \mathfrak{G}$ و $H \leq G$ نتیجه دهد $H \in \mathfrak{G}$.

(ب). بسته‌ی ضربی: رده‌ی $\mathfrak{G}$ از گروه‌ها بسته‌ی ضربی است هرگاه $G_۱, G_۲ \in \mathfrak{G}$ نتیجه دهد $G_۱ \times G_۲ \in \mathfrak{G}$.

(ج). بسته‌ی خارج قسمتی: رده‌ی $\mathfrak{G}$ از گروه‌ها بسته‌ی خارج قسمتی است هرگاه $G \in \mathfrak{G}$ و $H \lhd G$ نتیجه دهد $G/H \in \mathfrak{G}$.

یک رده ممکن است در هر سه خاصیت فوق صدق نکند. از این رو در بعضی موارد رده‌هایی جدید از رده‌های قبلی معرفی شده‌اند که فقدان یکی از خواص فوق را در رده جبران کنند. همچنین دسته‌ای از رده‌ها هر سه خاصیت فوق را دارا می‌باشند که به عنوان مثال می‌توان به رده‌ی گروه‌های فوق حل‌پذیر اشاره کرد که در ادامه معرفی می‌گردد.

در این پایان‌نامه هشت رده از گروه‌های متناهی مورد بررسی قرار می‌گیرند که به ترتیب زیر می‌باشند:

(۱). رده‌ی گروه‌های CLT:

گروه G را CLT گویند هرگاه در عکس قضیه‌ی لاگرانژ صدق کند.

(۲). رده گروه‌های QCLT:

گروه G را QCLT گویند هرگاه هر گروه خارج قسمتی آن CLT باشد.

(۳). رده‌ی گروه‌های پوچ‌توان ـ به‌وسیله‌ی ـ آبلی:

گروه G را پوچ‌توان ـ به‌وسیله‌ی ـ آبلی گویند هرگاه G' پوچ‌توان باشد.

(۴). رده‌ی گروه‌های صادق در خاصیت سیلو تاور:

اگر گروه G از مرتبه‌ی $p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_r^{e_r}$ باشد به نحوی که $p_1 > p_2 > ... > p_r$، آنگاه G در خاصیت سیلو تاور صدق می‌کند هرگاه S_1، S_2، ... و S_r موجود باشند به نحوی که به ازای هر $k = 1, 2, ..., r$، S_i یک p_i ـ زیرگروه سیلوی G باشد و $S_k...S_2S_1 \lhd G$.

(۵). رده‌ی گروه‌های فوق حل‌پذیر:

گروه G را فوق حل‌پذیر گویند هرگاه هر عامل اصلی آن دوری باشد (عامل اصلی در فصل اول تعریف می‌گردد).

(٦). رده‌ی Y:

گوییم $G \in \mathrm{Y}$ هرگاه به ازای تمام زیرگروه های H از G، اگر $p \mid [G : H]$ (p عددی اول)، آنگاه G دارای زیرگروهی مانند W باشد که $H \leq W$ و $[W : H] = p$.

(۷). رده‌ی SY:

گوییم $G \in \mathrm{SY}$ هرگاه هر زیرگروه G متعلق به Y باشد.

(۸). رده‌ی LM ـ گروه‌ها:

گوییم G یک LM ـ گروه است هرگاه به ازای هر جفت از زیرگروه‌های A و B از G که A در $< A, B >$ ماکسیمال است، نتیجه بگیریم $A \cap B$ در B ماکسیمال است.

رده‌ی گروه‌های CLT که موضوع بسیاری از تحقیقات بنیادی در نظریه‌ی گروه‌ها است، در سال

۱۹۶۸ توسط بری [۱] مورد بررسی قرار گرفت (مرجع [۴] و [۵]) و در ادامه ثابت شد که این رده بسته‌ی زیرگروهی و بسته‌ی خارج قسمتی نیست؛ ولی بسته‌ی ضربی است. ضمناً شرط لازم و کافی برای آنکه گروه حل‌پذیر G عضوی از رده‌ی گروه‌های CLT باشد، درسال ۱۹۸۲ توسط وینستین [۲] (مرجع [۲۱]) به‌دست آمد.

مطالعه در خصوص فرم‌ها و زیرگروه‌های پوششی در سال ۱۹۷۱ توسط والز [۳] (مرجع [۱۸]) به‌دست آمد که در ادامه‌ی آن گروه‌های پوچ‌توان ـ به‌وسیله‌ی ـ آبلی مورد بررسی قرار گرفت. سرانجام در سال ۱۹۸۲ وینستین (مرجع [۲۰]) با جمع آوری آثار و مقالات مرتبط توانست تصویری روشن از تعدادی از رده‌های گروه‌های متناهی ارائه دهد.

لازم به ذکر است در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی و لازم از جمله فرم‌ها ذکر خواهد شد. چهار رده‌ی اول ذکر شده در فوق در فصل دوم بررسی شده است. مهمترین بخش پایان‌نامه، مربوط به گروه‌های فوق حل‌پذیر است که در فصل سوم آورده شده است. در فصل آخر نیز سه رده‌ی باقیمانده مورد مطالعه قرار گرفته است.

در کل پایان‌نامه گروه‌ها متناهی فرض شده‌اند. البته در بعضی موارد کلمه‌ی متناهی ذکر شده است که یا به منظور تأکید و یا مطابقت با قضیه‌ی اصلی در مرجع مورد نظر است.

---

[۱] Bray
[۲] Weinstein
[۳] Walls

فصل ۱

مقدمات

دراین فصل تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز فصول اصلی پایان‌نامه آورده شده است. در کل فصل به منظور جلوگیری از حجیم شدن مطلب سعی شده است از برهان قضایایی که اثبات آن به طور معمول در کتب مربوط به نظریه‌ی گروه‌ها دیده می‌شود، صرف نظر گردد. در بعضی موارد قضایایی اثبات شده‌اند که هم از لحاظ تکنیک اثبات و هم از لحاظ کاربردی که در فصول اصلی دارد، حائز اهمیت هستند. دربخش آخر این فصل فرم‌ها معرفی شده‌اند که از آن به منظور سهولت در بیان شرایط معادل در تعدادی از رده‌ها استفاده می‌گردد.

۱.۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این بخش مفاهیم مقدماتی مورد نیاز از جمله عامل و سری اصلی که نقش اساسی در گروه‌های فوق حل‌پذیر دارند معرفی می‌گردد. همچنین قضایایی در باب پوچ‌توانی و حل‌پذیری نیز بیان می‌گردد.

تعریف ۱.۱.۱ **فرض کنید G یک گروه باشد. یک سری زیر نرمال G، زنجیری متناهی از زیرگروه‌های G مانند**

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_r = G$$

است، به نحوی که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $G_{i-1} \lhd G_i$.

تعریف ۲.۱.۱ **فرض کنید G یک گروه باشد و $H \leq G$. در این صورت H را یک زیرگروه زیرنرمال G گوییم هرگاه H جمله‌ای از یک سری زیرنرمال G باشد. اگر H در G زیرنرمال باشد، می‌نویسیم $H \lhd \lhd G$.**

تعریف ۳.۱.۱ **فرض کنید G یک گروه و سری**

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_r = G$$

یک سری زیرنرمال در G باشد. در این صورت سری را یک سری ترکیبی می‌نامند هرگاه به ازای هر i طبیعی که $1 \leq i \leq r$، G_i/G_{i-1} یک گروه ساده‌ی غیر بدیهی باشد. در سری ترکیبی فوق، هر گروه خارج قسمتی G_i/G_{i-1} را یک عامل ترکیبی می‌نامند.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. یک سری نرمال G، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های G مانند:

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_r = G$$

که در آن به ازای هر $0 \leq i \leq r$، داشته باشیم $G_i \lhd G$.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت سری نرمال

$$\{1\} = G_0 < G_1 < ... < G_r = G$$

را یک سری اصلی G می‌نامند هرگاه به ازای هر $1 \leq i \leq r$، G_i/G_{i-1} گروه مشخصاً ساده باشد. در سری فوق هر گروه خارج قسمتی G_i/G_{i-1} را یک عامل اصلی G می‌نامند. اگر H/K عامل اصلی از G و $|H/K|$ توانی از عدد اول p باشد، آنگاه H/K را یک pـ عامل اصلی از G می‌نامند.

تعریف ۶.۱.۱ دو سری

$$\{1\} = G_0 < G_1 < ... < G_r = G$$

و

$$\{1\} = H_0 < H_1 < ... < H_s = G$$

را یکریخت گوییم در صورتی که تناظری یک به یک بین مجموعه‌ی همه‌ی گروه‌های خارج قسمتی غیربدیهی G_i/G_{i-1} $(1 \leq i \leq r)$ و مجموعه‌ی همه‌ی گروه‌های خارج قسمتی غیربدیهی H_j/H_{j-1} $(1 \leq j \leq s)$ برقرار باشد به نحوی که گروه‌های خارج قسمتی متناظر یکریخت باشند.

لم ۱.۱.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. اگر H، K، H_1 و K_1 زیرگروه‌هایی از G باشند که $H_1 \lhd H$ و $K_1 \lhd K$، آنگاه

$$\frac{H_1(H\cap K)}{H_1(H\cap K_1)} \cong \frac{K_1(H\cap K)}{K_1(H_1\cap K)}.$$

برهان. قضیه‌ی ۲.۱.۹، مرجع [۱]. □

قضیه ۱.۱.۱ **(قضیه‌ی ژوردان هولدر)[1]. در هر گروه دلخواه G، هر دو سری ترکیبی یکریختند.**

برهان. فرض کنید

$$\{1\} = G_0 < G_1 < \dots < G_r = G, \tag{1}$$

$$\{1\} = H_0 < H_1 < \dots < H_s = G \tag{2}$$

دو سری ترکیبی باشند. حال i ثابتی را که $1 \leq i \leq r$ در نظر بگیرید. به وضوح به ازای هر $1 \leq j \leq s$، می‌توان گفت $G_{i-1}(G_i\cap H_{j-1}) \lhd G_{i-1}(G_i\cap H_j)$ و لذا سری به صورت زیر موجود می‌باشد:

$$G_{i-1} = G_{i-1}(G_i\cap H_0) \lhd G_{i-1}(G_i\cap H_1) \lhd \dots \lhd G_{i-1}(G_i\cap H_s) = G_i. \tag{3}$$

ولی سری (۱) یک سری ترکیبی است و لذا به ازای یک j که $1 \leq j \leq s$ داریم:

$$G_{i-1} = G_{i-1}(G_i\cap H_{j-1}) \quad \text{و} \quad G_i = G_{i-1}(G_i\cap H_j).$$

[1] Jordan-Holder

حال با استفاده از لم قبل، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{G_i}{G_{i-1}} = \frac{G_{i-1}(G_i \cap H_j)}{G_{i-1}(G_i \cap H_{j-1})} \cong \frac{H_{j-1}(G_i \cap H_j)}{H_{j-1}(G_{i-1} \cap H_j)}.$$

ولی $H_{j-1}(G_{i-1} \cap H_j) \lhd H_{j-1}(G_i \cap H_j)$ و لذا در یک سری زیرنرمال مشابه سری (۳) و بین H_{j-1} و H_j قرار دارند. حال گوییم سری (۲) یک سری ترکیبی است و لذا $G_i/G_{i-1} \cong H_j/H_{j-1}$. بنابراین هر عامل ترکیبی سری (۱) با عاملی ترکیبی از سری (۲) یکریخت است. همچنین به طور مشابه هر عامل ترکیبی سری (۲) با عاملی ترکیبی از سری (۱) یکریخت است و لذا دو سری یکریختند. □

با استدلالی مشابه می‌توان قضیه‌ی فوق را در مورد سری اصلی به صورت زیر بیان کرد:

قضیه ۲.۱.۱ **در هر گروه دلخواه G، هر دو سری اصلی یکریختند.**

تعریف ۷.۱.۱ **فرض کنید G یک گروه باشد. سری نرمال**

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_r = G$$

را یک سری مرکزی G گوییم در صورتی که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $G_i/G_{i-1} \leq Z(G/G_{i-1})$.

تعریف ۸.۱.۱ **گروه G را پوچ‌توان نامند در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد.**

قضیه ۳.۱.۱ **فرض کنید G گروهی پوچ‌توان و H زیرگروهی سره از آن باشد. در این صورت $H \neq N_G(H)$.**

برهان. قضیه ۱.۶، مرجع [۱۷]. □

تعریف ۹.۱.۱ **فرض کنید G گروهی دلخواه باشد. در این صورت مانده‌ی پوچ‌توانی G را که با $\gamma_\infty(G)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:**

$$\gamma_\infty(G) = \bigcap\{H : H \lhd G \text{ و } G/H \text{ پوچ‌توان است}\}.$$

به وضوح می‌توان دید که G/G' پوچ‌توان است و لذا $\gamma_\infty(G) \leq G'$.

قضیه ۴.۱.۱ **در هر گروه دلخواه G، $G/\gamma_\infty(G)$ پوچ‌توان است.**

برهان. قضیه‌ی ۵.۲، ضمیمه‌ی C در مرجع [۲۰]. □

قضیه ۵.۱.۱ **در هر گروه دلخواه G، اگر $H \leq Z(G)$ و G/H پوچ‌توان باشد، آنگاه G پوچ‌توان است.**

برهان. با در نظر گرفتن سری مرکزی برای G/H و با توجه به اینکه $H \leq Z(G)$، می‌توان سری مرکزی برای G ایجاد کرد و نتیجه گرفت G پوچ‌توان است. □

قضیه ۶.۱.۱ **فرض کنید G یک گروه غیربدیهی متناهی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:**

(۱) G پوچ‌توان است؛

(۲) هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال است؛

(۳) هر p - زیرگروه سیلوی G نرمال است؛

(۴) هر دو عضو G که مرتبه‌ی آنها نسبت به هم اول‌اند، تعویض‌پذیرند؛

(۵) G حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود است.

برهان. قضیه‌ی ۸.۱.۱۰، مرجع [۱]. □

قضیه ۷.۱.۱ **فرض کنید N_1، N_2،...، و N_r زیرگروه‌های نرمالی از گروه G باشند. در این صورت اگر G/N_1، G/N_2،...، و G/N_r پوچ‌توان باشند، آنگاه $\frac{G}{N_1\cap N_2\cap\ldots\cap N_r}$ پوچ‌توان است.**

برهان. از آنجاییکه G/N_1، G/N_2،...، و G/N_r پوچ‌توان هستند، می‌توان سری‌های مرکزی به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
1 = \frac{G_{10}}{N_1} \leq \frac{G_{11}}{N_1} \leq \ldots \leq \frac{G_{1t}}{N_1} = \frac{G}{N_1},\\
1 = \frac{G_{20}}{N_2} \leq \frac{G_{21}}{N_2} \leq \ldots \leq \frac{G_{2t}}{N_2} = \frac{G}{N_2},\\
. \qquad\qquad . \qquad\qquad . \;,\\
. \qquad\qquad . \qquad\qquad . \;,\\
. \qquad\qquad . \qquad\qquad . \;,\\
1 = \frac{G_{r0}}{N_r} \leq \frac{G_{r1}}{N_r} \leq \ldots \leq \frac{G_{rt}}{N_r} = \frac{G}{N_r}.
\end{aligned}$$

(یکسان بودن تعداد جملات هر سری را می توان با اضافه کردن جملات تکراری ایجاد کرد.)

بنابراین به ازای هر $1 \leq i \leq r$ و $0 \leq j \leq t$، $\frac{G_{ij}/N_i}{G_{ij-1}/N_i} \leq Z(\frac{G/N_i}{G_{ij-1}/N_i})$.

حال اگر سری از G را چنان در نظر بگیریم که جمله‌ی j ام آن به صورت $\frac{\bigcap_{i=1}^{r} G_{ij}}{\bigcap_{i=1}^{r} N_i}$ باشد، به آسانی می‌توان ثابت کرد این سری یک سری مرکزی از $\frac{G}{N_1\cap N_2\cap\ldots\cap N_r}$ است و لذا G پوچ‌توان می‌گردد. □

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان و N زیرگروه نرمال غیربدیهی از آن باشد. در این صورت، $N \cap Z(G) \neq \{1\}$.

برهان. قضیه‌ی ۵.۴۱، مرجع [۱۵]. □

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید G یک گروه باشد، و $A, B \leq G$. در این صورت زیرگروه

$$\langle [a,b] | a \in A, b \in B \rangle$$

را زیرگروه تعویض‌گر A و B می‌نامند و آن را با $[A,B]$ نشان می‌دهند.

لم ۲.۱.۱ فرض کنید A و B دو زیرگروه G باشند که A در G نرمال است. در این صورت به ازای هر $a_1, a_2 \in A$ و هر $b_1, b_2 \in B$، $a' \in A$ موجود است به نحوی که $[a_1 b_1, a_2 b_2] = a'[b_1, b_2]$

برهان. با اضافه کردن $b_1 b_1^{-1}$ به $[a_1 b_1, a_2 b_2]$ داریم:

$$[a_1 b_1, a_2 b_2] = b_1^{-1} a_1^{-1} b_2^{-1} a_2^{-1} a_1 b_1 a_2 b_2 = b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 b_1^{-1} b_2^{-1} a_2^{-1} a_1 b_1 a_2 b_2.$$

حال گوییم چون $A \lhd G$، عضو $a_3 \in A$ موجود است به نحوی که $b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 = a_3$. بنابراین

$$[a_1 b_1, a_2 b_2] = a_3 b_1^{-1} b_2^{-1} a_2^{-1} a_1 b_1 a_2 b_2.$$

با اضافه کردن $b_2 b_1 b_1^{-1} b_2^{-1}$ به عبارت فوق و ادامه‌ی این روند، نتیجه‌ی مورد نظر به دست می‌آید. □

تعریف ۱۱.۱.۱ گروه G را حل‌پذیر گویند هرگاه یک سری زیر نرمال مانند

$$1 = G \leq G_1 ... \leq G_r = G$$

داشته باشد به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، گروه G_i/G_{i-1} آبلی باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید G یک pـ گروه آبلی باشد. در این صورت G را آبلی مقدماتی گوییم هرگاه مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی G عدد اول p باشد.

قضیه ۹.۱.۱ فرض کنید G گروهی حل‌پذیر باشد. در این صورت هر زیرگروه نرمال مینیمال G آبلی مقدماتی است.

برهان. قضیه‌ی ۹.۴، مرجع [۳]. □

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنید G یک گروه حل‌پذیر متناهی باشد. در این صورت اگر M یک زیرگروه ماکسیمال G باشد، آنگاه اندیس M در G توانی طبیعی از عددی اول است.

برهان. قضیه‌ی ۴.۲.۱۱، مرجع [۱]. □

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید X زیرگروه دلخواهی از گروه G باشد. در این صورت مغز X در G که با $\mathrm{Core}_G(X)$ نشان می‌دهیم بزرگترین زیرگروه نرمال G است که مشمول در X باشد.