بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

حل معادله انتگرال فازی فردهلم نوع دوم با روش آنالیز هموتوپی

مولف:
محمدجواد عاقلی

استاد راهنما:
دکتر محمدعلی ولی

استاد مشاور:
دکتر عظیم ریواز

بهمن ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: محمدجواد عاقلی	امضاء:
استاد راهنما: دکتر محمدعلی ولی	امضاء:
استاد مشاور: دکتر عظیم ریواز	امضاء:
داور اول :	امضاء:
داور دوم:	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی:	امضاء:

تقدیم به

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نسبیم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار ، مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

تقدیم به همسرم که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می باشد، او که اسوه ی صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نموده.

تقدیم به بنیانگذار دانشگاه شهید باهنر کرمان، مهندس افضلی پور به پاس تعبیر عظیم و انسانی اش از کلمه ایثار و از خودگذشتگی.

تشکر و قدردانی

ستایش برای خداست، آن نخستین بی آغاز و آن واپسین بی انجام.

ای هستی بخش، وجود من را بر نعمات بی کرانت توان شکر نیست. ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دست مایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

در ابتدا صمیمانه ترین تقدیرها، تقدیم به پدر و مادر عزیزم که همواره بر کوتاهی و درشتی من قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند و پیوسته جرعه نوش جام تعلیم و تربیت، فضیلت و انسانیت آن ها بوده ام.از همسرم تنها اسطوره زندگیم که در تمام مراحل انجام این پایان نامه مرا یاری نموده است کمال تشکر را دارم.

همچنین از خواهران مهربان و برادران عزیزم، ستارگان همدلی و مهربانی که موفقیت ایشان در تمام امور زندگی آرزوی قلبی من است، قدردانی می کنم.

از اساتید فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر محمدعلی ولی و جناب آقای عظیم ریواز که با سعه صدر مرا راهنمایی نموده و با ارئه نظرات سازنده و رهنمودهای خویش در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشتند، کمال تشکر را دارم.

از اساتید فرزانه جناب آقای دکتر اکبر نظری و سرکار خانم آزیتا تاجدینی که زحمت باز خوانی و داوری این پایان نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

در نهایت از تمامی کسانی که در این مسیر همراه همیشگی من بودند تشکر می نمایم.

مقدمه

قبل از صحبت در مورد روش هموتوپی مقدمه‌ای خواهیم داشت مبنی بر اینکه چرا روش هموتوپی را برای حل معادله انتگرال برگزیدیم.

برای حل معادلات خطی یا غیر خطی دو روش تحلیلی و عددی مطرح می شود.منظور از روش عددي مشخص است ، از يك مقداراوليه شروع مي كنيم و با استفاده ازخود معادله و انجام هزاران محاسبه تكراري با استفاده از كامپيوتر، به ليست بلند بالايي از اعداد دست مي يابيم كه باكمك آن مدل رياضي مربوطه را شبيه سازي مي كنيم. اما منظور از روش هاي تحليلي چيست؟ در روش هاي تحليلي، سعي مي كنيم جواب معادله مورد نظر را با استفاده از يكي از تكنيك هاي رياضي همچون حساب ديفرانسيل يا مثلثات و ...بدست آوريم. چون در اين صورت، مي‌توانيم دريابيم كه اين مدل رياضي تحت هر شرايطي چگونه رفتار مي‌كند . در حقيقت، يك جواب تحليلي جوابي است كه به صورت يك فرم بسته يادقيق نوشته شود. اما يافتن جواب هاي تحليلي براي مسائل غيرخطي پيچيده، به همان نسبت مستلزم استفاده از تكنيك هاي تحليلي پيچيده است و اين يعني، حل يك معادله غيرخطي از روش هاي تحليلي به راحتي امكان پذير نيست. و حتي، در مورد برخي از مسائل غيرخطي پيچيده غيرممكن است. اما روش‌هايي وجود دارند، كه مي‌توان با كمك آن‌ها يك جواب تحليلي تقريبي پيدا كرد و به جواب دقيق آن‌ها نزديك شد. يكي از اين تكنيك‌هاي تحليلي كه بسيار مورد استفاده قرار گرفته و منجر به بدست آوردن نتايج مهم و جالب شده اند روش آشفتگي است، كه مزيت آن بر روش‌هاي عددي اين است كه در عوض بدست آوردن ليست بلندبالايي از اعداد به

جوابي به فرم بسته مي‌رسيم . روش آشفتگي، به پارامترهاي فيزيكي بزرگ و كوچكي به نام كميت هاي آشفتگي وابسته است، و در حقيقت، با استفاده از همين كميت‌ها، يك معادله غيرخطي را به تعداد نامتناهي زيرمعادلات خطي تبديل مي‌كنيم، و سپس جواب را با جمع جواب‌هاي بدست آمده ازاين زيرمسائل خطي تقريب مي‌زنيم. اما وجود همين پارامترهاي آشفتگي، خود بزرگ‌ترين محدوديت‌ها را بر اين روش تحميل مي‌كند. چون اول اينكه : تمام مسائل غيرخطي كه با آنها برخورد مي كنيم، شامل چنين كميت‌هايي نيستند .

دوم اينكه: حتي اگر چنين پارامترهايي موجود باشند، نتايجي كه از اين روش حاصل مي‌شود در بيشتر موارد تنها براي مقادير بسيار كوچك اين پارامترها معتبرند.

بنابراین لازم بود بدنبال روش‌های باشیم که به چنین پارامترهای وابسته نباشد. از جمله این روش ها می‌توان به روش تجزیه آدومیان، روش هموتوپی و ... نام برد

دردهه ۱۹۸۰ ، جرج آدوميان روش آناليزي قدرتمندي براي بدست آوردن جواب مسايل غيرخطي به نام روش تجزيه آدوميان پيشنهاد داد كه اين روش براي حل معادلات ديفرانسيل جزيي و معادلات ديفرانسيل معمولي و معادلات انتگرال به كار مي‌رود و مهم نيست كه آيا معادلات غيرخطي داده شده شامل پارامترهاي فيزيكي بزرگ يا كوچك هستند يا نه. بنابراين، مي‌توان گفت اين روش نسبتا كلي است و علاوه براين سري تقريب آدوميان به سرعت همگراست. اما از جمله معايب اين روش اين است كه جواب تقريبي بدست آمده توسط روش تجزيه آدوميان، اغلب، شامل چند جمله اي ها مي باشد و در نتيجه ناحيه همگرايي سري تواني جواب كوچك هستند، اين اساسا بدين خاطر است كه سري هاي تواني، مجموعه توابع پايه‌اي مناسب براي تقريب زدن يك مساله غيرخطي نيستند و همچون روش هاي قبلي، دراين روش نيز نمي‌توان از توابع پايه‌اي متفاوت براي بيان سري جواب استفاده كرد و همگرايي سري جواب و ناحيه همگرايي آن را افزايش داد .

بنابراين، ديده مي شود كه علاوه بر روش‌هاي آشفتگي، در روش‌هاي غير آشفتگي كماكان محدوديت‌هايي همچون تضمين نبودن همگرايي سري جواب به قوت خود باقي مي ماند. ولي،

توجه به اين نكته ضروري است كه مساله همگرايي سري جواب به مراتب مهم‌تر است از وابستگي داشتن يا نداشتن روش‌هاي پيشنهادي براي حل مسايل غيرخطي، چرا كه بي‌توجهي به اين نكته منجربه يافتن جواب‌هايي خواهد شد كه عملا بي‌فايده هستند.

۱- براي مسايل غيرخطي پيچيده، حتي اگر داراي هيچ پارامتر فيزيكي بزرگ و كوچكي نباشند برقرار باشد.

۲- بتوان به راحتي دامنه همگرايي و سرعت همگرايي سري جواب را كنترل كرد .

در پي تلاش براي بدست آوردن جواب هاي هر چه دقيق تر براي معادلات غيرخطي شخصي به نام لئو در سال۱۹۹۲ ،در رساله دكترايش يك روش آناليزي قدرتمند، كه به پارامترهاي كوچك نياز نداشت معرفي كرد، و توانست آن رابراي مسايل غيرخطي‌اي كه به پارامترهاي بزرگ و كوچك وابسته نبودند به كار ببرد. اين تكنيك بر پايه مفهوم هموتوپي است كه قسمت مهمي از توپولوژي مي‌باشد. در اين روش، با استفاده از خاصيت جالب هموتوپي مي توان مساله غيرخطي را به تعداد نامتناهي مسائل خطي تبديل نمود، بدون توجه به اين نكته كه آيا پارامتر بزرگ يا كوچكي وجود دارد يا نه، البته لازم به ذكراست كه در روش آشفتگي، یک مساله غيرخطي را با استفاده از پارامتر آشفتگي، به تعداد نامتناهي مساله خطي تبديل مي‌كرديم. روش آناليزي هموتوپي يك روش آناليزي كلي است، كه در حل انواع مختلف معادلات جبري، معادلات ديفرانسيل معمولي، معادلات ديفرانسيل جزيي، معادلات انتگرال و... به كارمي‌رود و كاربرد وسيع آن درحل معادلات مختلف نشان از قدرت بالا و انعطاف پذيري زياد آن دارد . از نكات مهم اين روش اين است كه در روند تشكيل نگاشت هموتوپي، در انتخاب حدس اوليه، عملگر خطي معين آزاديم و با هر حدس اوليه و عملگر خطي قادر به كنترل همگرايي سري جواب بدست آمده خواهيم بود. چون در اين روش از پارامتري تحت عنوان پارامتر كنترل همگرايي بهره مي‌بريم كه حتي ما را قادر مي‌سازد ناحيه همگرايي سري جواب را نيز افزايش دهيم، يعني كاري كه در روش‌هاي آناليزي قبلي قادر به انجام آن نبوديم، و به علاوه اينكه، اين روش نه تنها محدوديت هاي روش هاي آناليزي قبلي را رفع

مي كند، بلكه تمام روش هاي آناليزي قبلي را نيز در بر مي گيرد .

چکیده

در این پایان نامه به حل معادلات انتگرال در حالت های حقیقی و فازی با استفاده از روش هموتوپی می پردازیم.

در فصل اول به بیان مفاهیم مقدماتی از معادلات انتگرال می پردازیم، همچنین چند روش عددی و تحلیلی را برای حل آنها ارائه می دهیم.

در فصل دوم مفاهیم مورد نیاز از ریاضیات فازی را بیان می کنیم.

در فصل سوم روش هموتوپی را به طور کامل ارائه می دهیم.

فصل چهارم را به حل معادله انتگرال ولترا- فردهلم به روش هموتوپی اختصاص میدهیم.

و در پایان در فصل پنجم معادله انتگرال فردهلم فازی را تعریف کرده و روش هموتوپی را برای حل این معادله بکار می بریم.

کلمات کلیدی: ، *معادلات انتگرال فردهلم فازی ، فرم پارامتری معادلات انتگرال فردهلم فازی ، روش تجزیه آدومیان، روش آشفتگی هموتوپی،روش آنالیز هموتوپی*

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا تاریچه‌ای از معادله انتگرال را بیان می‌کنیم، بعد به معرفی معادلات انتگرال می‌پردازیم، سپس دسته بندی معادلات انتگرال را همراه با ارائه مثال‌هایی بیان می‌کنیم. و در آخر به ارائه چند روش برای حل معادلات انتگرال می پردازیم.

۲.۱ تاریخچه ی پیدایش معادلات انتگرال

به نظر بوچر [۱] نام معادله انتگرال برای اولین بار توسط بویس- ریموند [۲] در سال ۱۸۸۸ بر روی معادلاتی که تابع مجهول تحت یک یا چند علامت انتگرال ظاهر می‌شد، گذاشته شد.هرچند که عده ای پیدایش معادله انتگرال را به لاپلاس [۳] در سال ۱۸۷۲ برای تبدیل انتگرالی $s \geq ۰$ $\int_۰^\infty e^{-sx} f(x)dx$ نسبت می‌دهند.در سال ۱۸۱۱ ژوزف فوریه [۴] ریاضیدان فرانسوی با استفاده از سری‌های مثلثاتی در حل مسئله انتقال گرما به نتایجی در رابطه با معادله انتگرال دست یافت.نیلز آبل ریاضیدان نروژی در سال ۱۸۲۳ حرکت یک ذره را که به سمت پایین در طول یک منحنی هموار نامعلوم در یک صفحه قائم که تحت تأثیر نیروی جاذبه، لغزیده می‌شد، مطالعه کرد.این مسئله به معادله انتگرال $۰ < \alpha < ۱$ $f(x) = \int_a^x \dfrac{y(t)}{(x-t)^\alpha}$ منجر شد.در این معادله $f(x)$ تابعی معلوم و پیوسته است، $f(a) = ۰$ و $y(t)$ یک تابع مجهول است.

به ازای $\alpha = \frac{۱}{۲}$ معادله انتگرال آبل متناظر مسئله مشهور کوتاه‌ترین زمان است که برای اولین بار توسط هویگنس [۵] حل شد.در این مسئله (کوتاه‌ترین زمان) تعیین حرکت یک ذره، که

---

[۱] M.Bocher

[۲] Boise-Reymond

[۳] Laplace

[۴] Fourier

[۵] Hoygnes

روی منحنی با یک نقطه انتهایی داده شده و مستقل از وضعیت اولیه تحت تأثیر نیروی ثقل در بازه ای از زمان حرکت می‌کند مورد بررسی قرار می‌گیرد. در سال ۱۸۲۶ پواسن [۶] در نظریه علم مغناطیس خود، معادله $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$ را با بسط $u(x)$ به یک سری توانی با پارامتر λ حل کرد.ژوزف لیوویل [۷] به طور مستقل معادلات انتگرال خاصی را از سال ۱۸۳۲ به بعد حل کرد.وی در سال ۱۸۳۷ رابطه بین معادله دیفرانسیل و معادله انتگرال را مطرح کرد و نشان داد که جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل معین به وسیله یک معادله انتگرالی داده می‌شود.نیومن [۸] در سال ۱۸۷۰ جواب مسئله دیریکله یعنی تابع φ که دارای مقدار مشخصی روی مرز ناحیه می‌باشدs و درون s را که در معادله لاپلاس $\nabla^۲\varphi = ۰$ صدق می‌کند به صورت جوابی از یک معادله انتگرال نشان داد و مسئله دیریکله [۹] را به یک معادله انتگرال تبدیل کرد.

.در سال ۱۸۹۶ پوانکاره [۱۰] معادله انتگرال $y(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)dt = f(x)$ که متناظر با معادله دیفرانسیل جزئی $\nabla^۲ y + \lambda y = F(x,t)$ که در آن $\nabla^۲ = \frac{d^۲}{dx^۲} + \frac{d^۲}{dy^۲}$ می‌باشد را به دست آورد.همچنین در همان سال ویتو ولترا ریاضیدان ایتالیایی در حین مطالعه موضوع رشد جمعیت به یک معادله انتگرال برخورد کرد.ولترا با استفاده از مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال تابعی، نشان داد که نظریه همیلتون [۱۱] و کارل ژاکوبی [۱۲] برای انتگرال گیری از معادلات را می‌توان به دیگر مسائل فیزیک و ریاضی توسعه داد.وی با وارد کردن متغیر x به عنوان حد بالایی انتگرال یک رده مهم از معادله انتگرال را ایجاد نمود که هم اکنون تحت

[۶] Poisson

[۷] Liouville

[۸] Noeiman

[۹] Direcle

[۱۰] H.Poincare

[۱۱] Hamilton

[۱۲] Carl jakobi

عنوان معادله انتگرال ولترا شناخته می‌شود.

در حدود سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۳ ریاضیدان سوئدی به نام فردهلم با ثابت نگه‌داشتن حدود انتگرال یک دسته بندی کلی از معادلات انتگرال را ارائه کرد.فردهلم حلی به صورت نسبتی از دترمینان را معرفی کرد و نشان داد که می‌توان آن را با یک سری توانی بر حسب λ، که یک پارامتر است، بیان نمود.تحقیقات فردهلم برای دستیابی به جواب معادله حرکت موج منجر به ارائه قضایای فردهلم گردید که از قضایای بنیادی در معادلات انتگرال می‌باشد.ابتدا قضایای فردهلم برای هسته پیوسته ارائه شد و بعدها توسط کارلمان [۱۳] و ریس [۱۴] برای هسته های کلی‌تر تعمیم یافت. ولترا و لیروکس [۱۵] اولین کسانی بودند که قضایای وجود و یکتایی جواب را برای رده های عمومی معادلات انتگرال ثابت کردند.در سال ۱۹۰۱ اریک هولمگر [۱۶] ریاضیدان سوئدی سمیناری در دانشگاه گوتینگن آلمان ارائه داد که محتوای آن کاربردهای کارهای فردهلم بود و این انگیزه ای برای تلاش و تحقیق دیوید هیلبرت [۱۷] بود.هیلبرت به اهمیت نظریه فردهلم پی برد و ثابت نمود که معادله دیفرانسیل حاصل از نوسانات یک صفحه اصلی می‌تواند منجر به یک معادله انتگرال همگن از نوع فردهلم با هسته متقارن باشد.هیلبرت نظریه فردهلم را توسعه داد که منجر به نظریه مقادیر ویژه برای معادلات انتگرال شد.یکی از کارهای مهم هیلبرت فرموله نمودن مسائل، معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط مرزی و اولیه به صورت یک معادله انتگرال است.اصطلاح معادلات نوع اول و دوم که امروزه به کار می‌رود برای اولین بار توسط هیلبرت پیشنهاد شد. در اوایل نیمه دوم قرن بیستم تحقیقات زیادی روی

[۱۳] F.Carleman

[۱۴]F.Riesz

[۱۵]Lirox

[۱۶]LHolmger

[۱۷]Hilbert

جواب معادله انتگرال به وسیله هرمن ویل [۱۸] در ارتباط با این که به ازای چه مقادیری از معادله انتگرال جواب دارد صورت گرفت. روی هم رفته معادلات دیفرانسیل جهان ما را به خوبی توصیف می‌کنند اما معادلات انتگرال ویژگی‌های خاصی دارند که اهمیت آنها را آشکار می‌سازد. به عنوان مثال، معادلات انتگرال تابع مجهول را نه تنها به مقدار آن تابع در نقاط مجاور بلکه به مقدارش در تمامی ناحیه از جمله مرز مرتبط می‌کنند. در واقع شرایط مرزی به جای این که در مرحله آخر معادله وضع شوند در معادله انتگرال تعبیه می‌شوند. از این رو معادلات انتگرال می‌توانند نسبت به معادلات دیفرانسیل مناسب‌تر و کاراتر باشند. غالباً راه حل مسائل ریاضی نظیر وجود و یکتایی، به صورت انتگرالی آسان‌تر می‌شود و از ظرافت بیشتری هم برخوردار است. مسائلی نظیر مسئله پخش و ترابری وجود دارند که نمی‌توان آنها را با معادلات دیفرانسیل نمایش داد بلکه برای حل این نوع مسائل باید به نوعی، از معادلات انتگرال استفاده کرد.

۳.۱ معرفی معادلات انتگرال

تعریف ۱.۳.۱. یک معادله انتگرال معادله ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد شکل کلی این معادلات به فرم زیر می‌باشد:

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)F(u(t))dt$$

در معادله فوق $K(x,t)$ به عنوان هسته معادله، $\lambda \neq ۰$ پارامتری که می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد، $\alpha(x)$ و $\beta(x)$حدود انتگرال گیری، $f(x)$ ، $\varphi(x)$ و F همگی معلوم هستند و $u(x)$ مجهول می‌باشد.

تعریف ۲.۳.۱. معادله انتگرال فوق خطی است هر گاه $u(x)$ خطی باشد و غیرخطی است هرگاه $u(x)$ غیر خطی باشد.اگر در معادله فوق $f(x) = ۰$ معادله را همگن و در غیر این

[۱۸] Hermanvill

صورت معادله را غیر همگن می نامیم.

به عنوان مثال معادله

$$u(x) = 2x + \int_0^1 xtu(t)dt$$

یک معادله انتگرال خطی و معادله

$$u(x) = 2x + \int_0^1 xte^{u(t)}dt$$

یک معادله انتگرال غیر خطی است.