بسم الله الرحمن الرحیم

كليه حقوق مادى مترتب بر نتايج مطالعات، ابتكارات و
نوآورى‌هاى ناشى از تحقيق موضوع اين پايان‌نامه
متعلق به دانشگاه رازى است.

دانشگاه رازی
دانشکده علوم پایه
گروه آمار

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته آمار ریاضی

عنوان :
P-مقدار فازی در آزمون فرض‌ها

استاد راهنما:
دکتر داود قزوینی نژاد

نگارش:
فاطمه شریفی

آبان ماه ۱۳۹۲

دانشکده علوم پایه
گروه آمار

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته آمار ریاضی

نام دانشجو:
فاطمه شریفی

تحت عنوان :
$P-$مقدار فازی در آزمون فرض‌ها

در تاریخ ۹۲/۸/۱ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه بسیار خوب به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر داود قزوینی نژاد	با مرتبه‌ی علمی	استادیار	امضاء:
استاد داور دکتر عبدالرضا سیاره	با مرتبه‌ی علمی	دانشیار	امضاء:
استاد داور دکتر حبیب جعفری	با مرتبه‌ی علمی	استادیار	امضاء:

... بنام خداوند لوح و قلم ...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز.

سپاسگزار کسانی هستم که سرآغاز تولدمنند. از یکی زاده میشوم و از دیگری جاودانه. پدر و مادری که تار مویی از آن ها به پای من، سیاه نماند، و استادی که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت.

اکنون که با لطف و یاری پروردگار انجام این رساله به اتمام رسیده است، بر خود لازم می دانم از کلیه عزیزانی که در این راه مرا یاری نموده اند صمیمانه قدردانی نمایم. سپاس بیکران بر همدلی، همراهی و همگامی همسر عزیزم که وجودش آسمان زندگی ام را فروغی صد چندان بخشید و همواره چون کوهی استوار پشتیبان و حامی من بود. از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر قزوینی نژاد که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛ قدردانی می نمایم. و صمیمانه از اساتیدی که داوری این پایان نامه را بر عهده دارند جناب آقای دکتر جعفری و جناب آقای دکتر سیاره سپاسگزاری می نمایم. و از خواهر دلسوزم که بسیار مرا یاری کرد تشکر می کنم.

فاطمه شریفی

کرمانشاه - آبان ماه ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم و

همسر فداکارم که همواره در کنارم بود

چکیده

یکی از مباحث اساسی در استنباط آماری آزمون فرض‌های آماری می‌باشد. تحلیل آماری در شکل سنتی‌اش براساس داده، متغیرهای تصادفی، فرضیه‌ها، قوانین تصمیم و پارامترهای دقیق است. اما یکی از محدودیت‌های اساسی در این حیطه مواجه شدن با اطلاعات نادقیق و مبهم است. بنابراین در بسیاری از مسائل آماری با مفهوم فازی روبرو می‌شویم. آزمون فرض فازی زمانی لازم می‌باشد که داده‌های گردآوری شده دارای مفهوم نادقیق می‌باشد و می‌توان به صورت مجموعه فازی مدل‌بندی کرد. مجموعه‌ها بر مبنای نوع اطلاعات فازی در مسئله، با تابع عضویت که در نظریه مجموعه‌های فازی تعریف شده‌اند وزن‌دار می‌شوند. برای بسیاری از آزمایش‌های علمی محاسبه $p-$ مقدار برای گزارش نتایج روش استانداردی است. این روش ساده خلاصه‌ای از اطلاعات را در مورد داده‌ها در اختیار محقق قرار می‌دهد. و در عمل به طور وسیع برای اندازه‌گیری قدرت شواهد علیه فرض صفر استفاده می‌شود. در آزمون فرض‌های فازی $p-$ مقدار یک مجموعه فازی خواهد بود و باید $\delta-$ برش‌های آن را محاسبه کنیم. برای تصمیم‌گیری در مورد آزمون فرض‌ها نیازمند سطح معنی‌داری فازی هستیم تا با مقایسه آن با $p-$ مقدار فازی در مورد فرض صفر تصمیم نهایی را اتخاذ می‌نماییم.

کلمات کلیدی: آزمون فازی، داده فازی، سطح معنی‌داری فازی، فرضیه فازی، ، $p-$مقدار فازی، ، $\delta-$ برش.

فهرست مطالب

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\sim$ علامت مجموعه فازی

$\tilde{X}$ متغیر تصادفی فازی

$\tilde{A}$ مجموعه فازی A

$\tilde{A}_\delta$ $\delta-$برش مجموعه فازی A

P_δ $\delta-$برش $p-$مقدار فازی برای فرض و داده فازی

$\xi_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت مجموعه فازی A

P^* $p-$مقدار فازی برای فرض دقیق و داده نادقیق

x^* عدد نادقیق

t^* آماره آزمون فازی

$C_\delta(t^*)$ $\delta-$ برش آماره آزمون فازی

$\eta(\cdot)$ تابع عضویت آماره آزمون فازی

$C_\delta(P^*)$ $\delta-$برش، $p-$ مقدار فازی برای داده فازی وفرضیه دقیق

$P(\tilde{A})$ احتمال فازی مجموعه A

$H(\theta)$ تابع عضویت پارامتر فازیθ

$H_{\circ b}(\theta)$ تابع عضویت کران فرض صفر فازی

پیشگفتار

در بسیاری از زمینه‌های فعالیت بشری، اغلب لازم است تا تصمیم گرفته شود که کدام یک از دو حالت ممکن بالفعل درست است؟ محققان علوم، بررسی کنندگان کنترل کیفیت کالاهای ساخته شده، تصمیم گیرندگان حکومتی و بسیاری از این قبیل نیازمند تصمیم‌گیری در مورد فرضیه پیش روی خود هستند.

آزمون فرضیه یکی از مباحث آمار استنباطی است. مبنای آزمون فرضیه‌های آماری در روش کلاسیک بر این است که هم فرضیه‌ها و هم داده‌های جمع‌آوری شده دقیق هستند. اما گاهی فرضیه‌های دقیق، غیر واقعی به نظر می‌رسند و یا مشاهدات غیر دقیق و تقریبی می‌باشند. برای همچون مواردی نظریه مجموعه‌های فازی راه‌کاری برای چنین محدودیت‌هایی است.

یکی از روش‌های اساسی برای تصمیم‌گیری در مورد فرض صفر استفاده از مفهوم p−مقدار است. که در مورد فرض‌های فازی با داده نادقیق یا فرض دقیق با داده نادقیق یا فرض و داده نادقیق با p− مقدار فازی مواجه می‌شویم. و اطلاعات نادقیق فازی را که شامل داده‌های فازی یا پارامتر فازی و یا هردو آن‌ها می‌باشد را به شکل δ− برش‌ها می‌سازیم. و با معرفی یک سطح معنی‌داری فازی آزمون را انجام می‌دهیم. مانند آزمون‌های کلاسیک، p− مقدار فازی را با یک سطح معنی‌داری α مقایسه می‌کنیم. و فرض صفر را رد یا می‌پذیریم و یا با یک وضعیت سوم عدم تصمیم‌گیری[1] مواجه می‌شویم که $\tilde{H}_0$ را نه می‌توانیم بپذیریم و نه رد کنیم.

به اختصار می‌توان گفت نظریه مجموعه‌های فازی نظریه‌ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان که قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق هستند، چنانچه در عالم واقع اکثراً چنین است، صورت‌بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. گسترش روز افزون این علم جدید در زمینه آمار و احتمال، چه از لحاظ نظری و چه کاربردی ما را بر آن داشت تا وارد مقوله جدید علمی گردیم.

در این پایان نامه فصل اول شامل مفاهیم اساسی نظریه مجموعه‌های فازی می‌باشد. در فصل دوم به بررسی p− مقدار فازی زمانی که فرضیه فازی و داده دقیق(کریسپ) می‌باشد می‌پردازیم. و با تعریف درجه پذیرش فرض صفر را می‌پذیریم. در فصل سوم به مبحث p− مقدار فازی زمانی که فرضیه‌ها دقیق و داده‌ها فازی است خواهیم پرداخت. و سرانجام در فصل چهارم با مسئله آزمون فرض آماری زمانی که هم داده و هم فرضیه فازی است سروکار داریم. و مفهوم p− مقدار فازی و سطح معنی داری فازی را گسترش می‌دهیم.

[1] No decision

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در دنیایی که ما در آن زندگی می کنیم، اکثر چیزهایی که درست به نظر می‌رسند «نسبتاً» درست هستند و در مورد صحت و سقم پدیده‌های واقعی همواره درجاتی از عدم قطعیت صدق می کند. به عبارتی دیگر پدیده‌های واقعی همواره سیاه و سفید نیستند، بلکه تا اندازه ای خاکستری هستند. بنابراین همواره غیر دقیق و مبهم‌اند. تنها ریاضی بود که سیاه و سفید بود و این خود چیزی جزء یک سیستم مصنوعی متشکل از قواعد و نشانه‌ها نبود. بدین ترتیب در حالیکه در تمامی جهان حتی یک پدیده را نمی‌توان یافت که صد در صد درست یا نادرست باشد. علم با ابزار ریاضی خود همه پدیده های جهان را این‌طور بیان کرد. مجموعه‌های فازی در ریاضیات جدید به مجموعه هایی اطلاق می‌شود که عناصر آن بطور نسبی متعلق به آن مجموعه باشند.

تئوری مجموعه های فازی اولین بار در سال (۱۹۶۵)توسط پرفسور زاده [۱] در رساله‌ای به نام مجموعه‌های فازی – اطلاعات و کنترل معرفی شد از نخستین روز تولد اندیشه فازی، بیش از چهل سال می گذرد. در این مدت نظریه فازی، چارچوب فکری و علمی جدیدی را در محافل آکادمیک و مهندسی معرفی نموده و دیدگاه دانشمندان را نسبت به کمّ و کیف دنیای اطرافمان تغییر داده است. منطق فازی جهان‌بینی بدیع و واقع گرایانه‌ای است که به اصلاح شالوده منطق علمی و ذهنی بشر کمک شایانی کرده است و معتقد است که ابهام در ماهیت علم وجود دارد. بر خلاف دیگران که معتقدند که باید تقریب‌ها را دقیق‌تر کرد تا بهره وری افزایش یابد. زاده معتقد است که باید به دنبال ساختن مدل هایی بود که ابهام را به عنوان بخشی از سیستم، مدل کند. گاه چاره ای جزء این نداریم که براساس آنچه ظاهراً تقریبی است، عمل کنیم.

در واقع منطق فازی یک منطق پیوسته است در مقابل منطق گسسته کلاسیکی که در آن گزاره ها فقط دو ارزش درست یا نادرست دارند و به آن منطق باینری [۲]یا منطق صفر و یک می گویند. به کمک منطق فازی، از کلی گویی و مطلق گویی دور شده و مسائل را بیشتر به سمت جواب صحیح‌تر سوق می‌دهیم. منطق فازی در عصر کنونی که با تغییرات سریع همراه با پیچیدگی‌های بغرنج توأم شده است، می‌تواند پاسخی مناسب باشد.

در واقع نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه‌ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم، سیستم‌ها و متغیرهایی که نادقیق هستند، را صورت‌بندی ریاضی بخشد و زمینه را برای استدلال، و تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان را فراهم آورد. گسترش نظریه مجموعه‌های فازی و ارتباط آن با سایر علوم، از جمله علم آمار و نظریه آمار شایان توجه می‌باشد. نظریه آمار و نظریه مجموعه‌های فازی، هر دو با عدم قطعیت سر و کار دارند، اولی برای مطالعه الگوهای مبتنی بر عدم قطعیت آماری منسوب به پیشامدهای تصادفی و دومی برای مطالعه الگوهای مبتنی بر عدم قطعیت امکانی که ناشی از ابهام و نادقیق بودن می‌باشد. این دو نظریه مکمل یکدیگرند.
مزایای عمده استفاده از سیستم‌های فازی:

۱–بیان و توصیف عدم قطعیت

[۱] Zadeh
[۲] Binary

۲-ابزاری جدیدی برای حل مشکلاتی که تئوری احتمالات راهی برای آن‌ها ندارد.
۳-استفاده از دانش بشری

فرض کنید که در مورد دمای هوا صحبت می کنیم، امروز روز گرمی است در مورد درجه حرارت صحبت نمی کنیم اما در واقع ساختار ذهنی ما با محاسبات فازی شکل گرفته است. خیلی از مهارت‌هایی که داریم دقیقاً به همین شکل نادقیقش بیان شده است. علی رغم اینکه ما به طور خیلی دقیقی می توانیم یک مهارت را به یک شخص یاد دهیم اما طرز بیانمان نادقیق است. می توان گفت کاری که منطق فازی انجام می‌دهد، بیان و توصیف عدم قطعیت بصورت دقیق است.

یکی از جنبه‌های مهم منطق فازی استفاده از دانش انسانی است. فرض کنید یک شخص سال‌هاست در بورس معامله می کند. و بازار را زیر نظر دارد. می‌داند اگر فلان نرخ بالا برود و فلان نرخ پایین بیاید به نظر میرسد اگر اینجا سرمایه گذاری کند سود خواهد برد. و این طبق تجربه به دست آمده و حرف از اعداد و ارقام نمی‌زند. در واقع این فرد همه چیز را فازی می‌بیند. این تجارب را می توانیم با عبارات فازی بیان کنیم؛ ولی با اعداد و ارقام نمی‌توانیم بیان کنیم. و اینجا منطق فازی به کمک ما خواهد آمد.
در سیستم فازی، عدم قطعیت پدیده‌ها دو نوع هستند:

۱. عدم قطعیت ناشی از ضعف دانش و ابزار بشری در شناخت پیچیدگی‌های یک پدیده.

۲. عدم قطعیت مربوط به عدم صراحت و عدم شفافیت مربوط به پدیده یا ویژگی خاص.
ویژگی‌های منطق فازی:

الف- در منطق فازی، استدلال‌های دقیق به عنوان مواردی مرزی، استدلال‌های تقریبی تلقی می‌شوند.

ب- در منطق فازی، هر چیزی درجه‌پذیر است.

پ- هر سیستم منطقی می تواند فازی شود.

ت- در منطق فازی، دانش به عنوان مجموعه‌ای از محدودیت‌های تغییرپذیر و یا به طور معادل فازی که بر روی مجموعه‌ای از متغیرها اعمال می‌شود، تعبیر می گردد.

تعمیم‌های یک مدل آماری

یک مدل آماری را می توان از چهار جنبه تعمیم داد:

۱-متغیرهای تصادفی مدل را به صورت متغیرهای تصادفی فازی در نظر گرفت.

۲-متغیر ها به صورت معمولی فرض شوند، اما مشاهدات مربوط به آنها مشاهدات نادقیق باشند.

۳-متغیرها و مشاهدات معمولی باشند، اما پارامترهای مدل، فازی فرض شوند.

۴-متغیر ها، مشاهدات مربوط به متغیرها و پارامترهای مدل اصلی، همگی معمولی باشند، اما فرض ها یا توابع مرتبط با مدل مورد آزمون منعطف و نادقیق باشند.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲.۱. یک مجموعه معمولی یا کلاسیک، با یک ویژگی دقیق و معین مشخص می‌شود. اگر یک عضو از مجموعه مرجع، آن ویژگی را داشته باشد، عضو مجموعه مورد نظر است و اگر فاقد آن باشد، عضو مجموعه نیست. فرض کنید بخواهیم درباره ی آن دسته از مجموعه اعداد حقیقی صحبت کنیم که «بزرگ» باشند. در اینجا با یک ویژگی مبهم یعنی «بزرگ» سروکار داریم. اینکه چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند، بسته به نظر افراد مختلف، فرق می‌کند. به عبارت دیگر عضویت یا عدم عضویت اعداد مختلف در گردایه ای با ویژگی «بزرگ بودن» قطعی نیست. مثلاً آیا ۱۰۰ عددی «بزرگ است» و عضو گردایه ی اعداد حقیقی بزرگ محسوب می شود؟ ۱۰۰۰چطور؟ ۱۰۰۰۰چطور؟ نظریه مجموعه های فازی در واقع تعمیمی از نظریه مجموعه‌های کلاسیک است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسان‌هاست. و می‌توان بیان کرد که مجموعه‌های کلاسیک (کریسپ)، حالت‌های خاص مجموعه‌های فازی هستند.

تعریف ۲.۲.۱. تابع نشانگر هر زیر مجموعه دلخواه A از یک مجموعه مرجع X تابعی است به فرم

$$I_A(x) : X \longrightarrow \{۰,۱\}$$

که به صورت زیر می‌توان نمایش داد:

$$I_A(x) : \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \in A^c \end{cases}$$

برای $x \in X$ در منطق کلاسیک عدم عضویت عنصر به مجموعه با عدد صفر و عضویت به مجموعه با عدد یک نمایش داده می‌شود اما در منطق فازی تابع نشانگر هر عددی را از بازه $[۰,۱]$ اختیار می‌کند. در این صورت در مجموعه مربوط به اعداد بزرگ، به مقادیر کوچک اعداد نزدیک صفر و به مقادیر بزرگ اعداد نزدیک یک را نسبت می‌دهیم. در واقع به جای آنکه بگوییم عدد۱۰۰ بزرگ است، می‌گوییم این عدد با درجه ۰/۷ بزرگ محسوب می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی $\{۰,۱\}$ به $[۰,۱]$ توسعه دهیم به تابعی می‌رسیم که به x از X عددی را در بازه ی $[۰,۱]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌گوییم و آن را با $\xi_A(x)$ یا به اختصار با $A(x)$ نمایش می‌دهیم. اینک A دیگر یک مجموعه کلاسیک نیست، بلکه یک مجموعه فازی است که با$\tilde{A}$ نمایش می‌دهیم با تابع عضویت،

$$\xi_{\tilde{A}}(x) : X \longrightarrow [۰,۱]$$

تابع عضویت X را بر دامنه اعداد حقیقی نگاشت می‌کند. بنابراین تابع عضویت یک عدد حقیقی است. مجموعه فازی بر روی کل فضای X یک مجموعه از جفت‌های $(x, \xi_{\tilde{A}}(x))$ می‌باشد به صورت:

$$\tilde{A} = \{(x, \xi_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X, \xi_{\tilde{A}}(x) \in [۰,۱] \subseteq \mathbb{R}\}$$

که $\xi_{\tilde{A}}(x)$ را درجه عضویت عنصر x در مجموعه فازی $\tilde{A}$ گویند. این درجه بین کران های صفر و یک از اعداد حقیقی قرار می‌گیرد.

$$\xi_{\tilde{A}}(x) = ۰ \quad \Rightarrow \quad x \notin \tilde{A}$$

$$\xi_{\tilde{A}}(x) = ۱ \quad \Rightarrow \quad x \in \tilde{A}$$

اگر تابع عضویت تنها مقادیر $\{۰,۱\}$ را اختیار کند دیگر مجموعه ما فازی نیست، حتمی است حوزه تعریف مجموعه فازی را به صورت $Supp(A) = \{A|\xi_{\tilde{A}}(x) > ۰\}$ نشان می‌دهیم. که این تعریف علی رغم این‌که یک خاصیت از یک مجموعه فازی است ولی خود یک مجموعه غیرفازی است.

مثال ۴.۲.۱. فرض کنید با یک مجموعه معمولی سروکار داریم مثلاً مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ (که زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی است)فرض کنید که زیر مجموعه‌ای مانند B از A را با صفت «بزرگ بودن» می‌خواهیم تشکیل بدهیم. همانطور که قبلاً گفتیم می‌شود یک مجموعه را با تابع عضویتش کاملاً معلوم کرد. اینجا هم می‌توانیم از «درجه عضویت» کمک بگیریم و اعضای مجموعه B را با کمک میزان عضویت هر یک از اعداد $۱,۲,۳,۴,۵$ در این مجموعه مشخص کنیم. (یعنی معلوم کنیم که هر عدد تا چه اندازه دارای صفت «بزرگ بودن » بوده و تا چه حد متعلق به B خواهد بود).برای این‌کار می‌شود درجه عضویت هر عضو را بصورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned}
\xi(۱) &= ۰ \\
\xi(۲) &= ۰/۲۵ \\
\xi(۳) &= ۰/۵ \\
\xi(۴) &= ۰/۷۵ \\
\xi(۵) &= ۱
\end{aligned}$$

ضمناً این اعداد نشان می‌دهند که در مجموعه یاد شده، عدد ۵ دارای بیشترین مقدار بزرگی بوده و عدد ۱ دارای کمترین مقدار بزرگی است.

۱.۲.۱ روابط مجموعه های فازی

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ وجود دارند. در این صورت

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Longleftrightarrow \forall\ x : \xi_{\tilde{A}}(x) \leq \xi_{\tilde{B}}(x)$$

یعنی درجه تعلق x به $\tilde{A}$کمتر از درجه تعلق x به $\tilde{B}$ است؛ و

$$\tilde{A} = \tilde{B} \quad \text{اگر} \quad \xi_{\tilde{A}}(x) = \xi_{\tilde{B}}(x)\ ; \quad \forall x \in X$$

اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی با تابع عضویت $\xi_{\tilde{A}}(x)$ باشد؛ متمم $\tilde{A}$ را با $\bar{\tilde{A}}$ نمایش می دهیم با تابع عضویت

$$\xi_{\bar{\tilde{A}}}(x) = ۱ - \xi_{\tilde{A}}(x)\ ; \qquad \forall x \in X$$

تعریف ۱.۲.۶. اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را به صورت یک مجموعه فازی با توابع عضویتی به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\xi_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = max\,[\xi_{\tilde{A}}(x), \xi_{\tilde{B}}(x)] \quad ; \ \forall x \in X$$

و

$$\xi_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = min\,[\xi_{\tilde{A}}(x), \xi_{\tilde{B}}(x)] \quad ; \ \forall x \in X$$

تعریف ۱.۲.۷. الف: ضرب جبری دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$\xi_{(\tilde{A}.\tilde{B})}(x) = \xi_{\tilde{A}}(x)\xi_{\tilde{B}}(x), \qquad ; \ x \in X$$

ب: جمع جبری یا احتمالی دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$\xi_{(\tilde{A}+\tilde{B})}(x) = \xi_{\tilde{A}}(x) + \xi_{\tilde{B}}(x) - \xi_{\tilde{A}}(x)\xi_{\tilde{B}}(x) \qquad ; \ x \in X$$

مثال ۱.۲.۸. فرض کنید $X = [0, \infty)$ مجموعه مقادیر ممکن طول عمر یک نوع لامپ بر حسب ساعت باشد. اگر مجموعه فازی $\tilde{A}$ بیانگر طول عمر کم و $\tilde{B}$ بیانگر طول عمر حدودا ۱۰۰۰ با توابع عضویت زیر باشند:

$$\xi_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{1500-x}{1500} & , x < 1500; \\ 0 & , x \geq 1500 ; \end{cases}$$

و

$$\xi_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{x-800}{200} & , 800 \leq x < 1000 ; \\ \frac{1200-x}{200} & , 1000 \leq x < 1200 ; \\ 0 & , \text{سایر نقاط}. \end{cases}$$

آنگاه

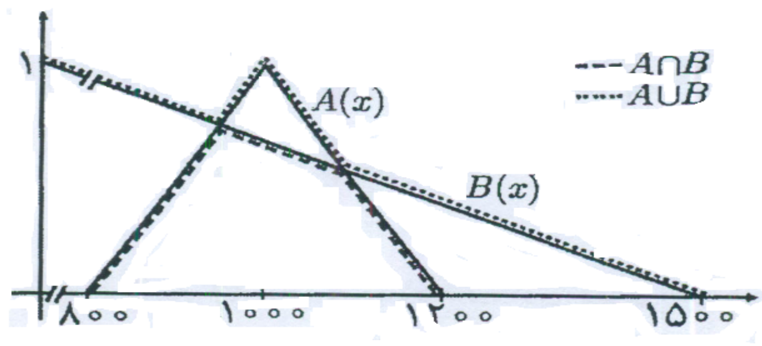
$$\xi_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = max[(\xi_{\tilde{A}}(x), \xi_{\tilde{B}}(x))] = \begin{cases} \frac{1500-x}{1500} & , 0 \leq x < 882/4 ; \\ \frac{x-800}{200} & , 882/4 \leq x < 1000 ; \\ \frac{1200-x}{200} & , 1000 \leq x < 1153/8 ; \\ \frac{1500-x}{1500} & , 1153/8 \leq x < 1500 ; \\ 0 & , x \geq 1500 ; \end{cases}$$

$$\xi_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = min[(\xi_{\tilde{A}}(x), \xi_{\tilde{B}}(x))] = \begin{cases} 0 & , x < 800 ; \\ \frac{x-800}{200} & , 800 \leq x < 882/4 ; \\ \frac{1500-x}{1500} & , 882/4 \leq x < 1153/8 ; \\ \frac{1200-x}{200} & , 1153/8 \leq x < 1200 ; \\ 0 & , 11200 \leq x ; \end{cases}$$

می‌باشد.

مثال ۱.۲.۹. فرض کنید $X_1 = X_2 = N$ مجموعه اعداد صحیح مثبت، A_1 مجموعه فازی تقریباً ۵، و A_2 مجموعه فازی تقریباً ۶ به صورت زیر باشند

$$A_1 = \{\frac{0/3}{3}, \frac{0/7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0/7}{6}, \frac{0/3}{7}\} \qquad A_2 = \{\frac{0/6}{5}, \frac{1}{6}, \frac{0/6}{7}\}$$



شکل ۱.۱: نمودارهای توابع عضویت مجموعه‌های فازی در مثال (۸۰۲۰۱)

$$\xi_{\tilde{A}_۱\cup\tilde{A}_۲}(x) = max\left[\xi_{\tilde{A}_۱}(x),\xi_{\tilde{A}_۲}(x)\right]$$
$$= \{\frac{۰/۳}{۳},\frac{۰/۷}{۴},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۶},\frac{۰/۶}{۷}\}$$

$$\xi_{\tilde{A}_۱\cap\tilde{A}_۲}(x) = min\left[\xi_{\tilde{A}_۱}(x),\xi_{\tilde{A}_۲}(x)\right]$$
$$= \{\frac{۰/۶}{۵},\frac{۰/۷}{۶},\frac{۰/۳}{۷}\}$$

$$\xi_{(\tilde{A}_۱.\tilde{A}_۲)}(x) = \xi_{\tilde{A}_۱}(x)\xi_{\tilde{A}_۲}(x)$$
$$= \{\frac{۰/۶}{۵},\frac{۰/۷}{۶},\frac{۰/۱۸}{۷}\}$$

$$\xi_{(\tilde{A}_۱+\tilde{A}_۲)}(x) = \xi_{\tilde{A}_۱}(x)+\xi_{\tilde{A}_۲}(x)-\xi_{\tilde{A}_۱}(x)\xi_{\tilde{A}_۲}(x)$$
$$= \{\frac{۰/۳}{۳},\frac{۰/۷}{۴},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۶},\frac{۰/۷۲}{۷}\}$$

افراز فازی

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید X یک مجموع مرجع باشد و $\tilde{A}_۱,...,\tilde{A}_n$ ، $(\tilde{A}_i \neq X,\emptyset)$ مجموعه‌های فازی از X باشند، به طوریکه که برای هر $x \in X$ ، $\sum_{i=۱}^{n} A_i(x) = ۱$ (شرط تعامد) باشد. در این صورت می‌گوییم مجموعه های فازی $\tilde{A}_۱,...,\tilde{A}_n$ یک افراز فازی برای X تشکیل می‌دهند.

۲.۲.۱ $\delta-$ برش [۳]

تعریف ۱۱.۲.۱. مجموعه همه اعضایی از X را که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی δ که $۰ \leq \delta \leq ۱$ باشد، $\delta-$ برش $\tilde{A}$ یا مجموعه تراز δ وابسته به $\tilde{A}$ گویند و آن را به صورت $\tilde{A}_\delta$ نشان می‌دهند. بدیهی است که

$\tilde{A}_\delta$ خود یک مجموعه غیر فازی به صورت زیر است:

$$\tilde{A}_\delta = \{x \in X : \xi_{\tilde{A}}(x) \geq \delta\}$$

هرگاه نامساوی بالا به صورت اکید باشد،$\delta-$ برش $\tilde{A}$ را $\delta-$ برش قوی گوییم.

مثال ۱۲.۲.۱. فرض کنید $\Theta = [۰,۱]$ مجموعه مقادیر ممکن برای پارامتر θ در یک توزیع دو جمله‌ای باشد. مجموعه فازی A با تابع عضویت زیر یک توصیف برای فرضیه فازی،θ تقریباً $\frac{۱}{۲}$ است، می‌باشد.

$$A(\theta) = \begin{cases} ۲\theta & , ۰ \leq \theta < \frac{۱}{۲} ; \\ ۲(۱-\theta) & , \frac{۱}{۲} \leq \theta \leq ۱ . \end{cases}$$

در اینصورت A_δ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} A_\delta &= \{\theta \in [۰,۱] \mid A(\theta) \geq \delta\} \\ &= \{\theta \in [۰,۱] \mid ۲\theta \geq \delta \quad \text{یا} \quad ۲(۱-\theta) \geq \delta\} \\ &= [\frac{\delta}{۲}, ۱ - \frac{\delta}{۲}] \end{aligned}$$

قضیه ۱۳.۲.۱. الف : خانواده $\{\tilde{A}_\delta \mid \delta \in [۰,۱]\}$ یکنواست، یعنی

$$\forall ۰ \leq \delta \leq \beta \leq ۱ \quad \Longrightarrow \tilde{A}_\beta \subseteq \tilde{A}_\delta$$

ب :

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Longleftrightarrow \tilde{A}_\delta \subseteq \tilde{B}_\delta \quad ; \forall \delta \in [۰,۱]$$

ج:

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\delta = \tilde{A}_\delta \cap \tilde{B}_\delta \qquad (\tilde{A} \cup \tilde{B})_\delta = \tilde{A}_\delta \cup \tilde{B}_\delta$$

اتحاد تجزیه

قضیه ۱۴.۲.۱. هر مجموعه فازی مانند $\tilde{A}$ را می‌توان بر حسب مجموعه‌های تراز آن تجزیه کرد بطوریکه،

$$A = \bigcup_\delta \delta \tilde{A}_\delta \qquad \delta \in [۰,۱]$$

در برخی متون از جمله کلیر و یان [۴] (۱۹۹۵) اتحاد تجزیه به صورت زیر بیان شده است:

هر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از مجموعه مرجع X را می‌توان به صورت زیر نوشت

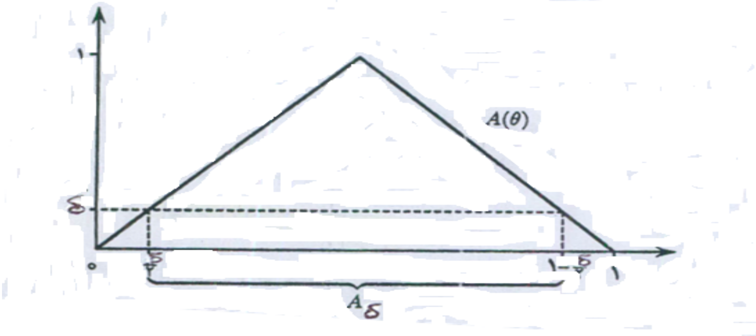
$$\begin{aligned} \xi_{\tilde{A}}(x) &= sup_{۰ \leq \delta \leq ۱} \ \{\delta : \xi_{\tilde{A}}(x) \geq \delta\} \\ &= sup_{۰ \leq \delta \leq ۱} \ \delta I_{\tilde{A}_\delta}(x) \end{aligned}$$

که در آن $I_{\tilde{A}_\delta}(x)$ تابع نشانگر مجموعه تراز $\tilde{A}_\delta$ می‌باشد. از اتحاد تجزیه نه تنها برای تجزیه یک مجموعه فازی به دنباله‌ای از مجموعه‌های معمولی می‌توان استفاده کرد، بلکه بر عکس برای ترکیب دنباله‌ای از مجموعه‌های معمولی و بدست آوردن یک مجموعه فازی نیز می‌توان استفاده نمود.

[۴] Klir and Yuan

مثال ۱۵.۲.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ مثال قبل را می‌توانیم، با استفاده از اتحاد تجزیه، به صورت زیر بر حسب δ− برش‌های آن تجزیه کنیم

$$A = \bigcup_{\delta} \delta A_{\delta} = \bigcup_{\delta} \delta[\frac{\delta}{۲}, ۱ - \frac{\delta}{۲}] = \bigcup_{\delta} \delta\{\theta \mid \frac{\delta}{۲} \leq \theta \leq ۱ - \frac{\delta}{۲}\}$$



شکل ۲.۱: δ−برش مجموعه فازی A در مثال (۱۵۰۲۰۱)

مثال ۱۶.۲.۱. فرض کنید $X = \{۰, ۱, ۲, \cdots\}$ مجموعه مقادیر یک متغیر تصادفی پواسن مربوط به تعداد تصادفات شبانه روزی در یک ناحیه باشد و فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X بیانگر تعداد تصادفات کم با تابع عضویت زیر باشد

$$A = \{\frac{۱}{۰}, \frac{۰/۸}{۱}, \frac{۰/۶}{۲}, \frac{۰/۴}{۳}, \frac{۰/۲}{۴}\}$$

در این صورت چند δ− برش A عبارتند از:

$$A_{۰/۲} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\} \qquad A_{۰/۵} = \{۰, ۱, ۲\} \qquad A_{۰/۶} = \{۰, ۱, ۲\}$$

با استفاده از اتحاد تجزیه، مجموعه فازی A را بر حسب δ− برش‌ها تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} A &= ۰/۲\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\} \cup ۰/۴\{۰, ۱, ۲, ۳\} \\ &\cup ۰/۶\{۰, ۱, ۲\} \cup ۰/۸\{۰, ۱\} \cup ۱\{۰\} = \{\frac{۱}{۰}, \frac{۰/۸}{۱}, \frac{۰/۶}{۲}, \frac{۰/۴}{۳}, \frac{۰/۲}{۴}\} \end{aligned}$$

مجموعه فازی محدب

تعریف ۱۷.۲.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ را محدب می‌گویند اگر $\tilde{A}_{\delta}$ به ازای هر $۰ \leq \delta \leq ۱$ محدب باشد. به طور معادل می‌توان گفت، $\tilde{A}$ یک مجموعه محدب است اگر و تنها اگر :

$$\xi_{\tilde{A}}(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \geq min(\xi_{\tilde{A}}(x), \xi_{\tilde{A}}(y)) \qquad ; \ \lambda \in [۰, ۱]$$