دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

خواص هندسی دینامیک موضعی در سیستم‌های همیلتنی: روش شاخص همترازی تعمیم‌یافته (گالی)

استاد راهنما

دکتر حسین خیری

استاد مشاور

دکتر غلامرضا حجتی

پژوهشگر

فرزانه مصطفی‌زاده

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرّحمن الرّحیم

حمد و سپاس خداوندی را که اگر معرفت حمد خویش را از بندگان خود دریغ می داشت، در برابر آن همه نعمت ها که از پس یکدیگر بر آنان فرو می فرستاد، آن نعمت ها به کار می داشتند و لب به سپاسش نمی گشادند. به رزق او، فراخ روزی می جستند و شکرش نمی گفتند. و اگر چنین می بودند، از دایره انسانیت برون می افتادند و در زمره ی چهارپایان در می آمدند.

تقدیم به:

پدرم، مادرم،

برادرم و خواهرانم

آنان که وجودشان برایم همه مهر بوده

و تمام وجودم همواره سرشار از عشق برایشان.

و تقدیم به نادیا عزیزم.

بنام خدا

و من لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **حسین خیری** صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که همواره با گشاده‌رویی و سعه صدر در تمام مراحل آماده‌سازی این رساله یار و یاور بودند.
از جناب آقای دکتر **غلامرضا حجتی** که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.
از جناب آقای دکتر **کریم ایواز** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.
هم چنین از سرکار خانم دکتر **وجیهه وفایی** به خاطر پیشنهادات ارزنده‌شان و کمک‌های بی‌دریغ‌شان کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام و دوستانم که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

فرزانه مصطفی‌زاده
شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: مصطفی‌زاده   نام: فرزانه

عنوان: خواص هندسی دینامیک موضعی در سیستم‌های همیلتنی: روش شاخص همترازی تعمیم‌یافته (گالی)

استاد راهنما : دکتر حسین خیری

استاد مشاور : دکتر غلامرضا حجتی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی کاربردی   گرایش: معادلات دیفرانسیل   دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲   تعداد صفحات: ۱۲۹

کلید واژه‌ها: سیستم دینامیکی، سیستم همیلتنی، حرکت آشوبناک، معادله تغییر، نمای لیاپانوف.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا مفاهیم اولیه در مورد سیستم‌های دینامیکی بیان می‌شود. سپس به بررسی سیستم‌های همیلتنی، خواص، معادله تغییر و نماهای لیاپانوف این نوع سیستم‌ها می‌پردازیم. در ادمه روش سالی را بطور خلاصه برای مدارهای آشوبناک و منظم شرح می‌دهیم. این شاخص در حالت آشوبناک بطور نمایی به صفر میل می‌کند، و در حالت منظم حول مقادیر غیر صفر نوسان دارد. سرانجام روش گالی برای تشخیص بین حرکت منظم و آشوبناک بیان می‌شود. گالی در حالت آشوبناک بطور نمایی به صفر میل می‌کند و در حالت منظم حول مقادیر غیر صفر نوسان و یا با یک تابع توانی به صفر میل می‌کند. همچنین نشان می‌دهیم که $SALI \propto GALI_۲$ می‌باشد. این روش در سیستم‌های همیلتونی با دو و سه درجه آزادی به‌کار برده می‌شود و با روش نمای لیاپانوف و سالی مقایسه می‌گردد.

فهرست مطالب

مقدمه **۳**

۱ سیستم‌های دینامیکی و مفاهیم اولیه **۶**

۱.۱ نقاط ثابت و پایداری آن‌ها ۶
۲.۱ تصاویر فاز سیستم‌های خطی ۸
۳.۱ سیستم‌های غیرخطی ۱۶
۱.۳.۱ خطی‌سازی در نقاط ثابت ۱۶
۲.۳.۱ شار و سیستم دینامیکی ۱۷
۴.۱ نقاط حدی و دورهای حدی ۱۸
۵.۱ انشعاب ۲۱
۶.۱ منیفلدهای پایدار و ناپایدار ۲۲
۷.۱ سیستم‌های گسسته ۲۳
۸.۱ سطح مقطع و نگاشت پوانکاره ۲۵
۱.۸.۱ آشوب ۲۷
۲.۸.۱ تاریخچه آشوب ۲۸
۳.۸.۱ آشوب و ویژگی‌های نظریه آشوب ۳۲
۴.۸.۱ روش‌های تشخیص رفتار آشوبناک ۳۷
۵.۸.۱ کاربرد آشوب ۴۳

۲ سیستم‌های همیلتنی و خواص آن‌ها **۴۶**

۱.۲ سیستم‌های پایستار ۴۶
۲.۲ دینامیک لاگرانژی و همیلتنی ۴۸
۱.۲.۲ مختصات تعمیم‌یافته ۴۹

۲.۲.۲ نیروهای تعمیم‌یافته ۵۱
۳.۲.۲ معادله لاگرانژی ۵۳
۴.۲.۲ تکانه تعمیم‌یافته ۵۸
۵.۲.۲ تابع همیلتنی ۶۰
۶.۲.۲ معادله همیلتنی حرکت ۶۵

۳ بررسی نظم و آشوب در سیستم‌های همیلتنی ۸۱
۱.۳ تعیین حجم توسط ضرب قوه‌ای k بردار انحراف ۸۳
۲.۳ سالی ۸۵
۳.۳ گالی ۹۰
۴.۳ نتایج تئوری ۹۲
۱.۴.۳ کاهش نمایی گالی برای مدارهای آشوبناک ۹۲
۲.۴.۳ محاسبه گالی برای مدارهای منظم ۹۸
۵.۳ محاسبات عددی گالی برای سیستم‌های همیلتنی ۱۰۸
۶.۳ مقایسه روش گالی با روش‌های دیگر ۱۱۶
۱.۶.۳ مقایسه روش گالی با روش نمای لیاپانوف ۱۱۶
۲.۶.۳ مقایسه روش گالی با روش سالی ۱۱۸

نتایج و پیشنهادها ۱۲۳

مراجع ۱۲۵

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۲۸

مقدمه و پیشینه پژوهش

سیستم دینامیکی، قانون معینی است که موقعیت هر نقطه را در فضای فاز با گذشت زمان شرح می‌دهد. بنابراین، در صورتی که مدل یک مسأله کاربردی، به‌صورت یک سیستم دینامیکی باشد، با حل آن و دانستن وضعیت متحرک در یک لحظه خاص، می‌توان وضعیت آن را در لحظه‌های قبل و بعد پیش‌بینی کرد و کل اطلاعات را در مورد آن بدست آورد. از این رو، درک رفتار کیفی سیستم‌های دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

یک سیستم دینامیکی خودگردان به شکل

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \tag{۱.۰}$$

بیان می‌شود. در صورتی که سیستم (۱.۰) دو بعدی و یا خطی باشد، رفتار آشوبناک نخواهد داشت. بنابراین پدیده آشوب فقط در سیستم‌هایی حاصل می‌شود که سه بعدی یا بیشتر بوده و غیر خطی باشند. دانستن اینکه آیا مدارهای یک سیستم دینامیکی منظم یا آشوبناک هستند برای درک رفتار سیستم اساسی است. در سال‌های اخیر، روش‌های زیادی برای تشخیص منظم یا آشوبناک بودن سیستم‌های دینامیکی ارائه شده است.

روش معروف و معمولی که برای این منظور استفاده شده، محاسبه‌ی نمای لیاپانوف مشخصه‌ی ماکزیمال σ_1 است. اگر $\sigma_1 > 0$ باشد مدار آشوبناک است. بنتین [۱] و همکارانش بطور نظری مسأله‌ی محاسبه‌ی همه‌ی نماهای مشخصه‌ی لیاپانوف را بررسی و یک الگوریتم برای محاسبه‌ی آن‌ها ارائه کرده‌اند [۶].

روش دیگر که برای این منظور استفاده شده، روش شاخص همترازی زیرین [۲] (سالی) است.

[۱] Benettin

[۲] Smaller Alignment Index

روش سالی نخستین بار در سال ۲۰۰۱ میلادی توسط چی. اسککس[۳] معرفی شده و برای تشخیص حرکت منظم و آشوبناک مدارها، در نگاشت‌های سیمپلتیک دو بعدی، چهاربعدی و شش بعدی به‌کار برده شده است[۲۹، ۳۰].

روش دیگر روش شاخص همترازی تعمیم‌یافته (گالی) است. این روش تعمیمی از روش سالی می‌باشد؛ که توسط چی.اسککس معرفی شده است؛ و در مواردی که روش سالی بی‌نتیجه است کارایی خود را نشان داده است. همچنین این روش می‌تواند در زمان کمتری نسبت به گالی برای تشخیص حرکت آشوبناک از منظم به‌کار برده شود.

سیستم های همیلتنی کلاس خاصی از سیستم‌های دینامیکی هستند که برای اولین بار در فیزیک کلاسیک مطرح شده‌اند و از یک اصلی بنام اصل همیلتن ناشی شده‌اند، که این اصل به‌صورت زیر است: از بین همه‌ی مسیرهای ممکن که یک سیستم دینامیکی در یک فاصله زمانی معین می‌تواند طی کند، مسیری انتخاب می‌شود که کوتاهترین فاصله‌ی زمانی را داشته باشد [۲۷، ۲۴].

این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [۳۲] تنظیم شده است، شامل سه فصل است و در آن به بررسی خواص سیستم‌های همیلتنی و تشخیص حرکت منظم و آشوبناک (سیستم‌هایی از درجه‌ی آزادی دو و سه) با استفاده از روش شاخص همترازی تعمیم‌یافته و نماهای لیاپانوف پرداخته می‌شود.

در فصل اول، ابتدا مفاهیم اولیه در مورد سیستم‌های دینامیکی پیوسته از قبیل نقطه بحرانی، پایداری نقطه بحرانی، شار، نقطه حدی، دور حدی، آشوب، برخی روش‌های تشخیص آشوب و نحوه تعیین نمای لیاپانوف بیان شده است. سپس، مطالب ذکر شده به سیستم‌های دینامیکی گسسته تعمیم داده شده است.

در فصل دوم، پس از تعریف سیستم‌های پایستار، مختصات تعمیم‌یافته، نیروهای تعمیم‌یافته، تابع لاگرانژی، تکانه‌های تعمیم‌یافته، تابع همیلتنی، معادله همیلتنی حرکت و خواص آن‌ها از قبیل انتگرال‌پذیری و غیره بیان شده است. سپس، معادلات تغییرات سیستم‌های همیلتنی بررسی شده است.

در فصل سوم، پس از شرح روش گالی، این روش برای دو سیستم همیلتنی به ترتیب از درجه‌ی آزادی دو و سه به‌کار برده شده و رفتار آن برای حرکت منظم و آشوبناک توضیح داده شده است. سپس، رابطه‌ی این روش با روش نمای لیاپانوف و روش سالی بررسی و مقایسه بین آن‌ها صورت گرفته است.

لازم به ذکر است که همه برنامه‌های لازم با نرم‌افزار Maple ۱۴ نوشته شده است. به دلیل حجم

[۳] Ch. Scoks

زیاد این برنامه‌ها، به جای اینکه در آخر پایان‌نامه پیوست شود، در یک CD با توجه به شماره شکل ضمیمه شده است. همچنین، در شبیه‌سازی‌های عددی از روش رانگ- کوتا[۴] استفاده شده است.

[۴] Runge-Kutta

فصل ۱

سیستم‌های دینامیکی و مفاهیم اولیه

سیستم دینامیکی، قانون معینی است که موقعیت هر نقطه را در فضای فاز $D \subseteq \mathbb{R}^n$ با گذشت زمان شرح می‌دهد. هرگاه زمان با استفاده از مقادیر صحیح سنجیده شود، یعنی $t \in \mathbb{Z}$، سیستم دینامیکی را **گسسته** گویند و بطور معمول با نگاشت تکراری به‌صورت

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

توصیف می‌شوند. درحالی که اگر زمان بطور پیوسته تغییر کند، یعنی $t \in \mathbb{R}$، سیستم دینامیکی را **پیوسته** گویند و بطور معمول توسط معادله‌ی دیفرانسیل به‌صورت

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = F(x),$$

توصیف می‌شوند. بیشتر آنچه برای سیستم‌های پیوسته برقرار است با روندی مشابه برای سیستم‌های گسسته به‌کار برده می‌شود. در واقع اغلب مطلوب است که سیستم پیوسته را با استفاده از نگاشت‌های پوانکاره یا نگاشت‌های τ-زمانی به‌صورت سیستم گسسته تبدیل کنند، به ویژه وقتی که با سیستم‌های با بعد بالاتر مواجه می‌شوند، زیرا در این حالت نمایش بهتری از مسیرها بدست می‌آید.

۱.۱ نقاط ثابت و پایداری آن‌ها

تعریف ۱.۱.۱. سیستم‌هایی به‌صورت

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{۱.۱}$$

که متغییر مستقل t فقط در دیفرانسیل dt در سمت چپ بوده و بطور صریح در تابع $X(x)$ در سمت راست ظاهر نمی‌گردد، یک **سیستم خودگردان** نامیده می‌شود.

یکی از بهترین روش‌ها برای درک رفتار کیفی یک سیستم دینامیکی خودگردان، پیدا کردن برخی نقاط خاص سیستم و بررسی رفتار سیستم در همسایگی این نقاط است.

تعریف ۲.۱.۱. سیستم خودگردان (۱.۱) را در نظر بگیرید. یک **نقطه ثابت** (نقطه تعادل، نقطه بحرانی)، نقطه‌ای است که در معادله $\dot{x} = X(x) = 0$ صدق می‌کند. اگر یک جواب از این نقطه شروع شود، برای همیشه در آنجا باقی می‌ماند.

تعریف ۳.۱.۱. نقطه ثابت x_0 از سیستم (۱.۱) را **منفرد** گویند هرگاه یک همسایگی از نقطه x_0 وجود داشته باشد بطویکه x_0 تنها نقطه ثابت (۱.۱) در آن همسایگی باشد.

لازم به ذکر است که همواره می‌توان نقطه ثابت x_0 را مبدأ اختیار کرد. این کار به کلیت مسأله خللی وارد نمی‌کند؛ زیرا با تبدیل مختصات $y = x - x_0$ می‌توان x_0 را به مبدأ انتقال داد.

در ادامه بحث، نقاط ثابت را منفرد فرض می‌کنیم مگر اینکه خلاف آن ذکر شود. نقاط ثابت در بررسی رفتار سیستم‌های دینامیکی از اهمیت خاصی برخوردار است و براساس آن می‌توان نحوه تحول سیستم را درک کرد. رفتار جواب سیستم (۱.۱) در همسایگی هر نقطه ثابت، فقط و فقط به‌صورت یکی از سه حالت بطور مجانبی پایدار، پایدار خنثی و ناپایدار است.

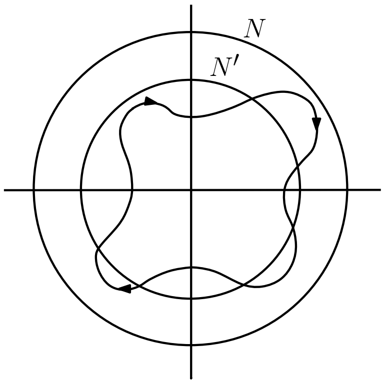
تعریف ۴.۱.۱. نقطه ثابت x_0 از (۱.۱) را **پایدار** گویند هرگاه برای هر همسایگی N از x_0 یک همسایگی کوچکتر $N' \subseteq N$ از x_0 وجود داشته باشد بطوریکه هر مسیری که وارد N' می‌شود، با افزایش t، در N باقی بماند. شکل ۱.۱ را ببینید.

تعریف ۵.۱.۱. نقطه ثابت x_0 از (۱.۱) را **بطور مجانبی پایدار** گویند هرگاه

۱. پایدار باشد؛

۲. یک همسایگی N از x_0 وجود داشته باشد بطوریکه هر مسیری که وارد N می‌شود با افزایش t، به x_0 میل کند.

توجه کنید که در تعریف پایداری، هر مسیری اگر به اندازه کافی در نزدیکی x_0 باشد، به اندازه دلخواه در نزدیکی آن باقی می‌ماند. اما پایداری مجانبی، قوی‌تر از پایداری است؛ زیرا علاوه بر پایداری ایجاب می‌کند که با افزایش t، هر مسیری به اندازه کافی به x_0 نزدیک شود. این خاصیت، در شکل ۲.۱ نشان داده شده است.



شکل ۱.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف ۴.۱.۱ برای نقطه ثابت مبدأ در $\mathbb{R}^2$.

تعریف ۶.۱.۱. نقطه ثابت x_0 از (۱.۱) را **پایدار خنثی** گویند هرگاه پایدار باشد اما بطور مجانبی پایدار نباشد.

تعریف ۷.۱.۱. نقطه ثابت x_0 از (۱.۱) را **ناپایدار** گویند هرگاه پایدار نباشد.

به‌عبارت دیگر، یک همسایگی N از نقطه ثابت x_0 وجود دارد بطوریکه برای هر همسایگی $N' \subseteq N$، حداقل یک مسیر وجود دارد که وارد N' می‌شود ولی در N باقی نمی‌ماند. شکل ۳.۱ را ببینید.

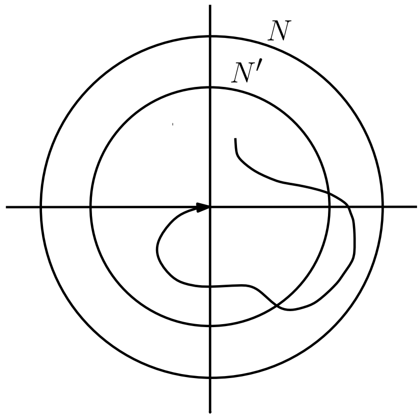
تعریف ۸.۱.۱. نقاط ثابت بطور مجانبی پایدار را **جاذب** و نقاط ثابت ناپایدار را **دافع** می‌نامند.

۲.۱ تصاویر فاز سیستم‌های خطی

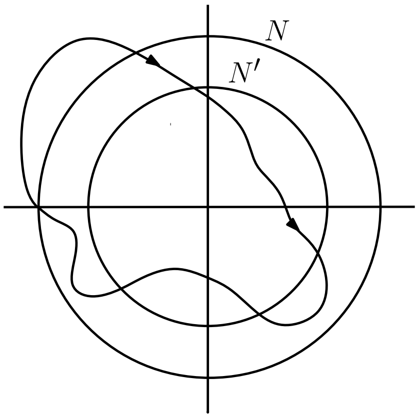
با توجه به اینکه اغلب سیستم‌های غیرخطی بطور موضعی با سیستم‌های خطی هم‌ارز هستند، لذا با دانستن خواص سیستم‌های خطی، می‌توان خواص طیف وسیعی از سیستم‌ها را مشخص کرد. برای این منظور، در این بخش، از تکنیک‌های تحلیلی و هندسی برای مطالعه سیستم‌های خطی استفاده می‌کنیم. در ادامه فصل، توسیعی از این تکنیک‌ها را برای بررسی رفتار کیفی سیستم‌های غیرخطی ارائه می‌دهیم.

سیستم خطی

$$\dot{x} = X(x) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{۲.۱}$$



شکل ۲.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف ۵.۱.۱ برای نقطه ثابت مبدأ در $\mathbb{R}^2$.



شکل ۳.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف ۷.۱.۱ برای نقطه ثابت مبدأ در $\mathbb{R}^2$.

را در نظر بگیرید. این سیستم، با تغییر متغییر $x = Py$ به **سیستم متعارف**

$$\dot{y} = Jy,$$

تبدیل می‌شود که در آن، A ماتریس ضرایب در (۲.۱) و J فرم متعارف جردن ماتریس A است بطوریکه $J = P^{-1}AP$ است. در واقع، ستون‌های P پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهند و y مختصات x نسبت به این پایه است. از آنجایی که ماتریس‌های A و J متشابه هستند و تشابه یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ است، لذا این مجموعه به کلاس‌های هم‌ارزی مجزا افراز می‌شود. برای هر دو ماتریس A و J در یک کلاس هم‌ارزی، جواب‌های سیستم‌های $\dot{x} = Ax$ و $\dot{y} = Jy$ با روابط

$$x = Py, \quad P^{-1}AP = J,$$

به هم وابسته هستند. بنابراین، اگر یکی از سیستم‌ها حل شود، جواب‌های سایر اعضای کلاس نیز بدست می‌آیند.

تعریف ۱.۲.۱. سیستم خطی (۲.۱) را **ساده** نامند هرگاه ماتریس A نامنفرد باشد.

اگر سیستم خطی (۲.۱) ساده باشد، آنگاه $x = 0$ تنها جواب سیستم

$$\dot{x} = Ax = 0,$$

است. لذا سیستم (۲.۱) فقط یک نقطه ثابت در مبدأ دارد. همچنین، از آنجایی که ماتریس A و ماتریس جردن متناظر با آن، متشابه هستند، پس مقادیر ویژه یکسان دارند. بنابراین، سیستم متعارف متناظر با (۲.۱) نیز ساده است.

تعریف ۲.۲.۱. سیستم خطی (۲.۱) را **غیرساده** گویند هرگاه A منفرد باشد.

به‌عبارت دیگر، سیستم غیرساده $Ax = 0$، دارای جواب‌های غیربدیهی است و سیستم به غیر از $x = 0$، نقطه ثابت دیگری نیز دارد. در این حالت، برای سیستم خطی در صفحه دو امکان وجود دارد: یا رتبه A یک است و یا صفر است. در حالت اول، خطی از نقاط ثابت وجود دارد که از مبدأ می‌گذرد و در حالت دوم، هر نقطه از صفحه، نقطه ثابت است. از آنجایی که رتبه J با رتبه A یکسان است، بنابراین، سیستم متعارف، رفتار سیستم غیرساده متناظر را نشان می‌دهد.

در ادامه، رفتار کیفی سیستم‌های خطی دو بعدی را بررسی می‌کنیم. همه مفاهیم ارائه شده برای این سیستم‌ها، به راحتی قابل تعمیم به سیستم‌های با بعد بالاتر است.

سیستم خطی

$$\dot{x} = X(x) = Ax, \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{۳.۱}$$

را در نظر بگیرید.

تعریف ۳.۲.۱. هر جواب از سیستم (۳.۱)، یعنی، $\phi(t) = (x_1(t), x_2(t))$ توسط یک منحنی در صفحه نشان داده می‌شود. این منحنی‌های جواب، **مسیر فاز** و یا **مدار** نامیده می‌شوند.

تعریف ۴.۲.۱. **تصویر فاز** شکلی دو بعدی است که نشان دهنده رفتار کیفی سیستم بوده و با تغییر t برحسب x_1 و x_2 در **صفحه فاز** x_1x_2 نشان داده می‌شود.

در این قسمت، ابتدا تصویر فاز سیستم‌های متعارف را بررسی می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان تصویر فاز سیستم (۳.۱) را با توجه به تصویر فاز سیستم متعارف متناظر بدست آورد. همچنان که خواهیم دید، ماهیت نقطه ثابت نیز در هر دو سیستم، یکسان است.

قضیه ۵.۲.۱. *ماتریس J که در تبدیل سیستم (۳.۱) به سیستم متعارف ظاهر می‌شود، به‌صورت*

یکی از چهار حالت

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 > \lambda_2, \qquad J_2 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \qquad J_4 = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \beta > 0$$

است که α، β، λ_0، λ_1 و λ_2 اعداد حقیقی هستند.

برهان. رجوع شود به [۵]. □

ملاحظه ۶.۲.۱. در قضیه ۵.۲.۱، ماتریس J_1، متناظر با حالتی است که مقادیر ویژه ماتریس A حقیقی و متمایز هستند. ماتریس J_2، متناظر با حالتی است که ماتریس A قطری و مقادیر ویژه آن برابر هستند. ماتریس J_3، متناظر با حالتی است که مقادیر ویژه ماتریس A برابر هستند ولی A قطری نیست. ماتریس J_4، متناظر با حالتی است که مقادیر ویژه ماتریس A مختلط مزدوج هستند.

سیستم خطی ساده (۳.۱) را در نظر بگیرید که λ_1 و λ_2 ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه آن هستند و فرض کنید سیستم متعارف ساده متناظر با آن، $\dot{y} = Jy$ باشد. نشان می‌دهیم که ماهیت نقطه ثابت $(0,0)$ از سیستم متعارف ساده، به ماهیت ریشه‌های λ_1 و λ_2 بستگی دارد.

(الف) مقادیر ویژه حقیقی و متمایز. در این حالت، سیستم متعارف به‌صورت

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1,$$
$$\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2,$$

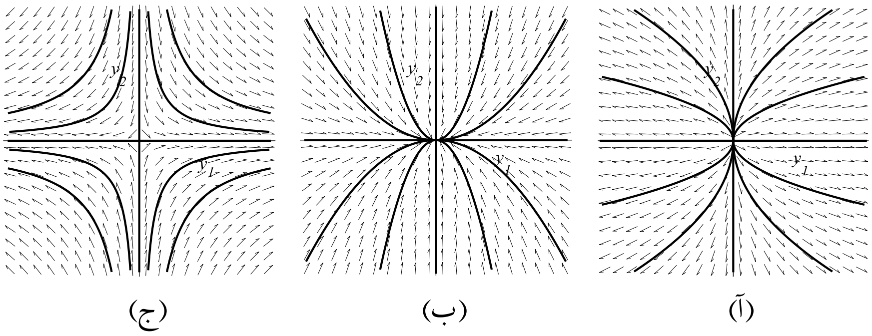
است. این سیستم دارای جواب‌های

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t},$$

است که c_1 و c_2 ثابت‌های حقیقی و دلخواه هستند. منحنی‌های جواب از حل معادله

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_2 y_2}{\lambda_1 y_1},$$

بدست می‌آیند. از این رو، نوع تصاویر فاز با توجه به مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 به‌صورت زیر خلاصه می‌شود.



شکل ۴.۱: مقادیر ویژه حقیقی و متمایز منجر به (آ) گره ناپایدار ($0 < \lambda_2 < \lambda_1$)؛ (ب) گره پایدار ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$) و (ج) نقطه زینی ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$) می‌شود.

- اگر مقادیر ویژه متمایز، حقیقی و مثبت باشند، نقطه ثابت از نوع گره ناپایدار است.
- اگر مقادیر ویژه متمایز، حقیقی و منفی باشند، نقطه ثابت از نوع گره بوده که بطور مجانبی پایدار است.
- اگر یکی از مقادیر ویژه مثبت و دیگری منفی باشد، نقطه ثابت از نوع زینی و ناپایدار است.

تصاویر فاز مربوط به این سه حالت در شکل ۴.۱ رسم شده است.

(ب) مقادیر ویژه حقیقی و برابر. در این حالت، ماتریس‌های متعارف به شکل‌های J_2 و J_3 هستند. در این صورت، نوع تصاویر فاز با توجه به دو حالت زیر تعیین می‌شود.

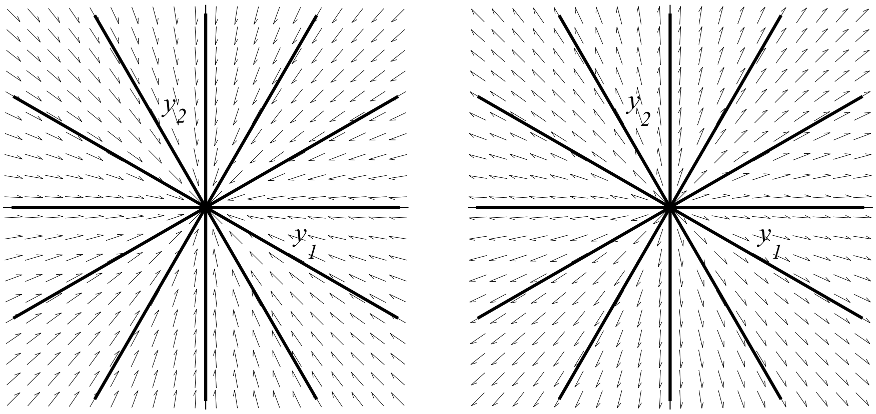
- اگر A قطری باشد، نقطه ثابت از نوع گره ستاره است. تصاویر فاز متناظر با این حالت در شکل ۵.۱ نشان داده شده است.
- اگر A قطری نباشد، نقطه ثابت از نوع گره نامتعارف است. تصاویر فاز مربوط به این حالت، در شکل ۶.۱ رسم شده است.

(ج) مقادیر ویژه مختلط($\lambda = \alpha \pm i\beta$). در این حالت، سیستم متعارف به‌صورت

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \alpha y_1 - \beta y_2, \\ \dot{y}_2 &= \beta y_1 + \alpha y_2, \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

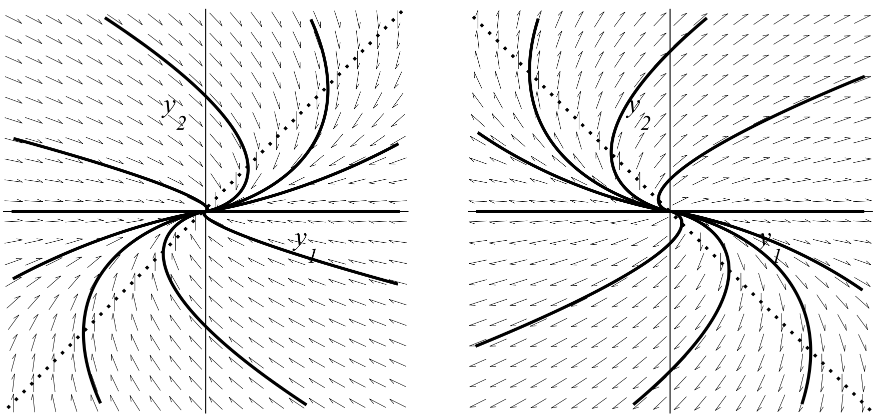
است. با در نظر گرفتن مختصات قطبی $y_1 = r\cos\theta$ و $y_2 = r\sin\theta$، سیستم (۴.۱) به سیستم

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = \beta,$$



(ب) (آ)

شکل ۵.۱: وقتی A قطری باشد، مقادیر ویژه برابر $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0)$ منجر به گره ستاره می‌شود: (آ) ناپایدار؛ (ب) پایدار.



(ب) (آ)

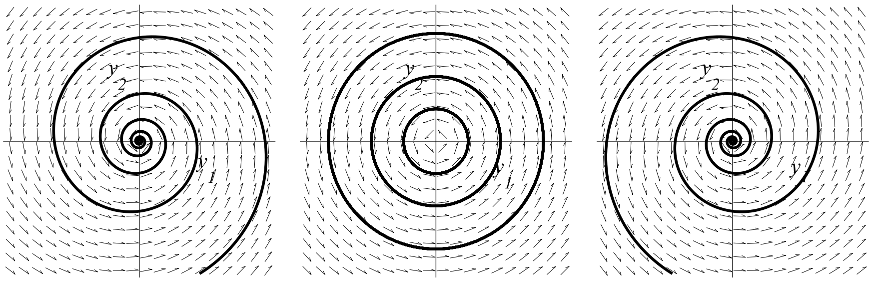
شکل ۶.۱: وقتی A قطری نباشد، مقادیر ویژه برابر $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0)$ منجر به گره نامتعارف می‌شود: (آ) ناپایدار $(\lambda_0 > 0)$؛ (ب) پایدار $(\lambda_0 < 0)$.

تبدیل می‌شود. این سیستم، دارای جواب‌هایی به‌صورت

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \beta t + \theta_0,$$

است. در این صورت، نوع تصویر فاز با توجه به مقادیر α و β به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

- اگر $\alpha > 0$، آنگاه نقطه ثابت از نوع کانون ناپایدار است.
- اگر $\alpha = 0$، آنگاه نقطه ثابت از نوع مرکز بوده و پایدار خنثی است.



(ج) (ب) (آ)

شکل ۷.۱: مقادیر ویژه مختلط منجر به (آ) کانون ناپایدار ($\alpha > 0$)؛ (ب) مرکز ($\alpha = 0$) و (ج) کانون پایدار ($\alpha < 0$) می‌شود.

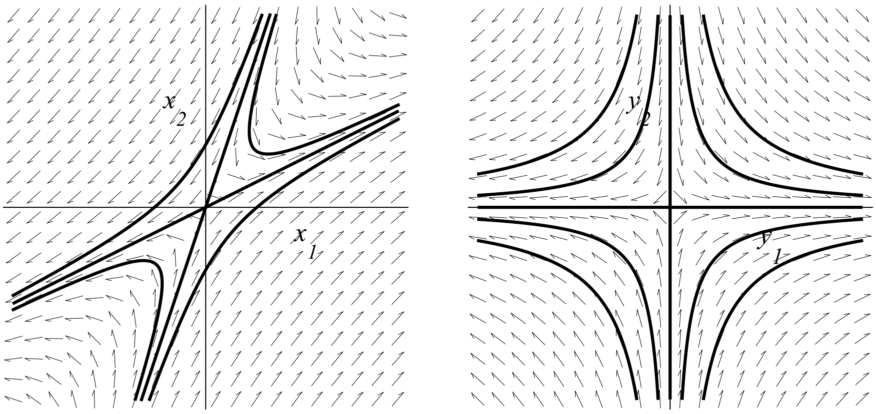
- اگر $\alpha < 0$، آنگاه نقطه ثابت از نوع کانون بوده و بطور مجانبی پایدار است.
- اگر $\beta < 0$، آنگاه مسیرهای فاز مارپیچ‌وار در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور مبدأ حرکت می‌کنند.
- اگر $\beta > 0$، آنگاه مسیرهای فاز مارپیچ‌وار در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور مبدأ حرکت می‌کنند.

شکل ۷.۱ تصاویر فاز مربوط به این حالت‌ها را نشان می‌دهد.

وقتی $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$) باشد، گوییم تصویر فاز، شامل یک مارپیچ **جاذب** (**دافع**)است. پارامتر $\beta > 0$ سرعت زاویه‌ای مارپیچ را نشان می‌دهد. هر چقدر β بزرگ‌تر باشد مسیرها با سرعت بیشتری به مبدأ نزدیک ($\alpha < 0$) و یا از مبدأ دور ($\alpha > 0$) می‌شوند.

نتیجه ۷.۲.۱. نقطه ثابت $(0, 0)$ از سیستم خطی $\dot{x} = Ax$،

- بطور مجانبی پایدار است هرگاه قسمت حقیقی مقادیر ویژه چندجمله‌ای مشخصه A، منفی باشند؛
- پایدار خنثی است هرگاه مقادیر ویژه، موهومی محض باشند؛
- ناپایدار است هرگاه قسمت حقیقی حداقل یکی از مقادیر ویژه چندجمله‌ای مشخصه A، مثبت باشند.



(ب) (آ)

شکل ۱.۸: تأثیر تبدیل خطی $x = Py$ روی تصویر فاز سیستم متعارف (۱.۵).

تصویر فاز هر سیستم خطی $\dot{x} = Ax$ با استفاده از تبدیل $x = Py$ از فرم متعارف آن یعنی $\dot{y} = Jy$ بدست می‌آید. به عنوان مثال، تصویر فاز سیستم متعارف

$$\dot{y}_1 = y_1,$$
$$\dot{y}_2 = -y_2, \tag{۱.۵}$$

در شکل ۱.۸(آ) نشان داده شده است. از تبدیل $x = Py$ می‌توان دریافت که متغییرهای y_1 و y_2، مختصات x نسبت به پایه $\{p_1, p_2\}$ بدست آمده از ستون‌های P هستند. x تابع پیوسته‌ای از y است بطوریکه هر نقطه از صفحه y_1y_2 بطور منحصربفرد در صفحه x_1x_2 نشان داده می‌شود و برعکس. به‌عبارتی، مسیرهای یک صفحه به روی مسیرهای صفحه دیگر نگاشته می‌شوند. همچنین، جهت مسیرها نیز حفظ می‌شوند. این خواص تبدیل خطی $x = Py$ موجب می‌شود که علی‌رغم گردش تصویر فاز، مبدأ هنوز یک نقطه زینی باشد. شکل ۱.۸(ب) با تبدیل خطی $x = Py$،

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

از سیستم (۱.۵) بدست آمده است.

تعریف ۱.۲.۸. دو سیستم از معادله‌های دیفرانسیل مرتبه اول را **هم‌ارز کیفی** گویند؛ هرگاه یک دوسویی پیوسته وجود داشته باشد که تصویر فاز یکی را به روی تصویر فاز دیگری بنگارد بطوریکه حافظ جهت مسیرها باشد.