دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی آقای عثمان نوروزی
تحت عنوان

پیش‌بینی خطی فرآیندهای $ARMA$ با واریانس نامتناهی

در تاریخ ۲۸ /۱۰ /۹۳ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر صفیه محمودی
۲– استاد مشاور	دکتر سروش علیمرادی
۳– استاد داور۱	دکتر ساره گلی
۴– استاد داور۲	دکتر زهرا صابری

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر فرید بهرامی

خدای را بسی شاکرم که از روی لطف و کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم کرده تا در سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چراکه پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند، دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر فراز و نشیب آموختند. از برادران و خواهران عزیز و مهربانم که همواره مشوقانی دلسوز برای من بوده اند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از استاد با کمالات و شایسته؛ سرکار خانم دکتر صفیه محمودی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از استاد صبور و فرهیخته، آقای دکتر سروش علیمرادی، که زحمت مشاوره این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان این پایان نامه به نتیجه ی مطلوب نمی رسید؛

از اساتید فرزانه و دلسوز؛ سرکار خانم دکتر ساره گلی و سرکار خانم دکتر زهرا صابری که زحمت بازخوانی و داوری رساله را متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در نهایت جا دارد از هم اتاقی ها و هم کلاسی های عزیزم که مرا در انجام این رساله یاری کردند تشکر نمایم و دست های دوستان عزیزم؛ آقایان علی ابوالحسنی، رحمان اکبری و اسماعیل بشکار را که در تک تک مراحل انجام پایان نامه یاری رساندن، به گرمی می فشارم.

عثمان نوروزی

دی ماه ۱۳۹۳

کلیه حقوق مادی مترتّب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلّق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

این اثر را با احترام و تواضع به پدرم،

اسطوره صبر و تلاش

و مادرم،

گنجینه عشق و ایثار

تقدیم می کنم.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

در این پایان‌نامه برای پیش‌بینی خطی فرآیندهای ARMA با واریانس نامتناهی دو روش مورد مطالعه قرار می‌گیرد. که در آن‌ها، برخلاف حالت کلاسیک، نوفه‌ها از توزیع نرمال پیروی نمی‌کنند و دارای توزیع α−پایدار هستند. در روش اول، با استفاده از روش حداقل پراکندگی که توسط براکول و کلاین معرفی شده است به پیش‌بینی مقادیر آینده پرداخته می‌شود. این روش دارای محدودیت‌هایی است که به آن اشاره خواهد شد.

در روش دوم، از نمایش انتگرالی فرآیندهای تصادفی α−پایدار استفاده شده است. در این روش با معرفی فضای هیلبرت جدید و با استفاده از معیار هم‌وردش پایدار، معادلات پیش‌بینی و قضیه‌ی تصویر سازی برای فرآیندهایی با واریانس متناهی تعمیم داده و بهترین پیش‌بینی خطی برای فرآیندهای α−پایدار معرفی می‌شود. در نهایت با استفاده از نرم افزار متلب این دو روش شبیه سازی و باهم مقایسه می‌شوند.

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

سری زمانی $\{x_t, t \in T_\circ\}$ ، دنباله‌ای مرتب شده از مشاهدات است و معمولاً بر حسب زمان، به ویژه در فواصل زمانی مساوی مرتب می‌شود. طبیعت ذاتی یک سری زمانی، وابسته یا همبسته بودن مشاهدات آن است. پس ترتیب مشاهدات اهمیت دارد و روش‌های آماری مبتنی بر فرض استقلال دیگر کاربردی ندارد و روش‌های دیگر مورد نیاز است. آنالیز سری‌های زمانی در زمینه‌های گوناگون کاربرد دارد. در کشاورزی، مقدار محصول و قیمت‌های سالانه غله، در بازرگانی و اقتصاد، قیمت‌های موجود در پایان روز و در مهندسی، علائم الکتریکی و ولتاژ را مشاهده می‌کنیم که نمونه‌هایی از سری‌های زمانی هستند. پیش‌بینی بر اساس سری‌های زمانی از موضوعاتی است که قدمت آن به شش دهه برمی‌گردد ولی در همین مدت کوتاه این رشته توانسته افق‌های جدیدی را در علم اقتصاد و سایر علوم بگشاید.
از آن‌جا که پیشگویی وقایع آینده در فرآیند تصمیم گیری نقش عمده‌ای ایفا می‌کند، پیش‌بینی کردن برای بسیاری از سازمان‌ها و نهادها حائز اهمیت است. دولت هر کشور جهت تنظیم سیاست‌های خود باید قادر به پیش‌بینی مواردی چون چگونگی آب و هوا، نرخ بیکاری، نرخ تورم و ... باشد. در بخش‌های بازاریابی جهت طرح و برنامه ریزی روش‌های فروش، باید پیش‌بینی‌های قابل اعتمادی از تقاضا صورت گیرد. جهت میزان تلاش و فعالیت‌های لازم، باید کل تقاضا برای محصول پیش‌بینی گردد و هم‌چنین به منظور انجام برنامه‌های مؤثر تبلیغاتی، تقاضای بازار مناطق مختلف و نیز تقاضای گروه‌های مختلف مصرف‌کننده، پیش‌بینی شود.
در مسایل مالی جهت برنامه‌ریزی و تأمین مالی سرمایه‌ی جدید، باید پیش‌بینی نرخ‌های بهره صورت گیرد. هم‌چنین برنامه‌ریزان مالی جهت تخمین جریان وجوه و نقدینگی که نزد بنگاه‌ها نگهداری می‌شود، نیاز به پیش‌بینی دریافتی‌ها و هزینه‌های بنگاه‌ها دارند.
در برنامه‌ریزی تولید، پیش‌بینی تقاضای محصول هر خط تولیدی امری ضروری است. این پیش‌بینی برای دوره‌های زمانی معین، مثلاً هفته یا ماه مشخص می‌شود، صورت می‌پذیرد. این پیش‌بینی‌ها، امکان ترسیم برنامه تولید و موجودی کالایی که باید نگهداری شود را به بنگاه می‌دهد. به منظور تخمین میزان خرید منابع مورد نیاز می‌توان پیش‌بینی تقاضا

برای تولید را به پیش‌بینی مواد اولیه لازم تعمیم داد. ترسیم خرید منابع مورد نیاز همچنین مستلزم پیش‌بینی منابع موجود و در دسترس و نیز قیمت‌ها می‌باشد.

پیش‌بینی‌کننده جهت پیش‌بینی وقایعی که در آینده رخ می‌دهد باید از اطلاعات به‌دست آمده در مورد وقایعی که در گذشته رخ داده استفاده کند، به این معنا که پیش‌بینی کننده باید به تجزیه و تحلیل داده‌ها و اطلاعات گذشته پرداخته و پیش‌بینی خود را بر اساس نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل فوق بنا کند و به طریق زیر اطلاعات گذشته را مورد استفاده قرار می‌دهد.

ابتدا به تجزیه و تحلیل اطلاعات گذشته می‌پردازد تا الگویی بدست آورد که قابل تعمیم به آینده باشد. این روش پایه در اغلب روش‌های پیش‌بینی مورد استفاده قرار می‌گیرد و بر این فرض بنا شده که الگوی بدست آمده تا آینده نیز ادامه خواهد داشت.

در سری‌های زمانی حالت کلاسیک، نوفه‌های سفید دارای توزیع نرمال هستند و یک رویکرد برای پیش‌بینی مقادیر آینده، حداقل کردن امید مربع خطاست. در چند دهه‌ی اخیر داده‌هایی مشاهده شده‌اند که توزیع‌های پایدار غیر گوسی به عنوان مدل‌های ممکن برای آن‌ها پیشنهاد می‌شود، از طرفی متغیرهای تصادفی پایدار دارای گشتاور دوم نامتناهی هستند و نمی‌توان از روش حداقل کردن امید مربع خطا مقادیر آینده را پیش‌بینی کرد و لازم است از روش‌های دیگری برای پیش‌بینی استفاده شود. در ادامه توزیع‌های پایدار را معرفی و برخی از خواص آن را بیان می‌کنیم.

توزیع‌های پایدار، کلاس بسیار وسیعی از توزیع‌ها را دربر می‌گیرند و به علت جرم موجود در دم تابع چگالی، این گروه از توزیع‌ها به توزیع دم سنگین معروف‌اند. جرم احتمال موجود در دم‌های بالایی و پایینی توزیع به عدد α ، مقداری بین صفر تا دو، وابسته است به طوری که هر چقدر α کمتر باشد جرم احتمال در دم‌ها بیشتر است. نظریه توزیع‌های پایدار در دهه‌های ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰ توسط پل لوی [۱] و الکساندر یائولویچ خینچین [۲] بیان شد. آثار ندنکو و کولموگرف [۸] و فلر [۵] از جمله آثار قدیمی هستند که به بررسی جزئیات این توزیع پرداخته‌اند و بعدها نیز زولوتاریو [۲۲] به بررسی این موضوع پرداخته است.

چنین مدل‌هایی انعطاف پذیری و تغییر پذیری بیشتری نسبت به توزیع‌های گوسی دارند. با وجود این‌که توزیع‌های گوسی به طور کامل به وسیله‌ی میانگین و کوواریانس خود مشخص می‌شوند، اما توزیع‌های پایدار غیر گوسی به پارامترهای بیشتری برای تشخیص نیاز دارند. توزیع گوسی همواره نسبت به میانگین متقارن است، اما توزیع‌های غیر گوسی پایدار می‌توانند درجه‌ای دلخواه از چولگی را اختیار کنند. چگالی احتمال متغیرهای تصادفی α -پایدار موجود و پیوسته است، اما بجز در چند مورد، بقیه فرم مشخص بسته‌ای ندارند. همین امر روش‌های معمول آماری از جمله روش‌های برآورد کردن پارامترها را در مورد این توزیع‌ها چه در حالت یک متغیره چه در حالت چندمتغیره تحت تأثیر قرار داده و بسیاری از آن‌ها را بی‌اعتبار ساخته است. تنها فرم بسته‌ی موجود در مورد این توزیع‌ها فرم تابع مشخصه‌ی آن‌ها است که البته توسط آماردانان مختلف به شیوه‌های متفاوتی پارامتربندی شده است. روش‌های مختلفی برای برآورد پارامترها ارائه شده است که از جمله می‌توان روش برآورد بر اساس تابع مشخصه توسط پائولسون

[۱] Paul levy

[۲] Aleksander Yakovlevich Khinchine

و همکاران [۱۶] در سال ۱۹۷۵، کوتروولیس [۱۲] در سال ۱۹۸۰ و روش برآورد از طریق محاسبه چندک‌ها در سال ۱۹۸۶ توسط مک کلاچ [۱۵] اشاره کرد.
هدف ما در این پایان‌نامه پیش‌بینی خطی فرآیندهای $ARMA$ با واریانس نامتناهی است. در حالتی که نوفه‌ی سفید دارای واریانس متناهی باشد پیش‌بینی به وسیله‌ی حداقل کردن امید مربع خطا به دست می‌آید. اما زمانی که فرآیندهای نوفه سفید دارای توزیع α-پایدار باشد (واریانس نامتناهی) دیگر نمی‌توان از روش حداقل کردن امید مربع خطا، مقادیر آینده را پیش‌بینی کرد به همین دلیل نیاز است از معیار دیگری استفاده کرد. در این پایان نامه از دو روش برای پیش‌بینی مقادیر آینده استفاده شده است. روش اول استفاده از حداقل پراکندگی و روش دوم استفاده از نمایش انتگرالی برای فرآیندهای تصادفی α-پایدار است.
ادامه این پایان نامه به صورت زیر تدوین شده است. در ادامه‌ی این فصل به بیان تعاریف و مفاهیم اولیه و بیان مختصری از تعاریف، قضایا و خواص توزیع‌های پایدار در حالت یک بعدی می‌پردازیم و در پایان پیش‌بینی سری‌های زمانی ایستا با واریانس متناهی را بیان می‌کنیم. در فصل دوم و سوم در مورد روش حداقل پراکندگی و روش استفاده از نمایش انتگرالی فرایندهای تصادفی α-پایدار بحث خواهیم کرد. در فصل چهارم با استفاده از شبیه سازی، نوفه‌ی سفید پایدار و نوفه‌ی سفید نرمال و همچنین دو روش پیش‌بینی حداقل پراکندگی و نمایش انتگرالی فرآیندهای پایدار را برای فرآیندهای $MA(۱)$ و $ARMA(۱,۱)$ باهم مقایسه می‌کنیم. در این فصل شبیه سازی با نرم افزار متلب انجام شده است.فصل پنجم نیز شامل برخی تعاریف اولیه، الگوریتم α-پایدار و پیاده سازی مقایسه‌ی دو روش پیش‌بینی برای فرآیندهای $MA(۱)$ و $ARMA(۱,۱)$ در نرم افزار متلب است. بنابراین مباحث اصلی این پایان نامه در فصل دوم، سوم و چهارم ارایه شده است.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

مطالب این بخش برگرفته از مراجع [۱، ۴، ۶، ۱۱، ۱۴، ۱۸–۲۰]، [۷] و [۱۷] است.
فرآیند تصادفی مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی است که در یک فضای احتمال تعریف شده‌اند و سری زمانی مشاهدات آن است. این فرآیند تصادفی را مدل مربوط به سری زمانی گویند، در این پایان‌نامه ممکن است به جای فرآیند تصادفی از مدل سری زمانی و یا حتی سری زمانی نام ببریم.
ساده‌ترین مدل برای یک سری زمانی فرآیند تصادفی است که در آن متغیرها مستقل و هم‌توزیع هستند و آن را با نماد $\{X_t\} \sim IID(\mu, \sigma^۲)$ نشان می‌دهند که μ میانگین و $\sigma^۲$ واریانس X_t است. به چنین فرآیندی، تصادفی محض می‌گوییم. در این مدل، هیچ ارتباط و وابستگی بین مشاهدات وجود ندارد. درنتیجه برای هر $h \geq ۱$ و $x_۱, \ldots, x_n$ داریم

$$P[X_{n+h} \leq x \mid X_۱ = x_۱, \ldots X_n = x_n] = P[X_{n+h} \leq x].$$

این امر نشان دهنده‌ی این است که آگاهی در مورد $X_1, \ldots X_n$ هیچ اطلاعی برای پیش‌بینی رفتار X_{n+h} به ما نمی‌دهد. در حقیقت فرآیند محض یک فرآیند غیرقابل توجه برای پیش‌بینی است ولی نقش مهمی در ساختن مدل‌های پیچیده‌تر دارد.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X_t سری زمانی با $EX_t^2 < \infty$ باشد. تابع میانگین X_t به صورت زیر است.

$$\mu_X(t) = E(X_t)$$

و تابع کوواریانس X_t نیز برای اعداد دلخواه r, t, s به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\gamma_X(r,t) = cov(X_r, X_s) = E[(X_r - \mu_X(r))(X_s - \mu_X(s))].$$

تعریف ۲.۲.۱ سری $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ را ایستای ضعیف می‌نامیم اگر $\mu_X(t)$ و $\gamma_X(t, t+h)$ برای هر h مستقل از t باشند.

تعریف ۳.۲.۱ سری زمانی $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ ایستای اکید است اگر برای هر h صحیح و $n > 0$ و $(X_1, \ldots, X_n)$ و $(X_{t+h}, \ldots, X_{n+h})$ توزیع توأم یکسانی داشته باشد.

واضح است که اگر $\{X_t\}$ ایستای اکید بوده و برای هر t، $EX_t^2 < \infty$ آن‌گاه $\{X_t\}$ ایستای ضعیف نیز می‌باشد. هر جا از ایستایی صحبت شود، منظور ایستایی ضعیف مطابق با تعریف است مگر به طور خاص بیان شود. اگر $\{X_t\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی ناهمبسته هرکدام با میانگین صفر و واریانس σ^2 باشد، واضح است که $\{X_t\}$ ایستاست. چنین دنباله‌ای را نوفه‌ی سفید با میانگین صفر و واریانس σ^2 می‌نامیم که با $\{X_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱ فرآیند $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ را فرآیند میانگین متحرک مرتبه‌ی q یا $MA(q)$ می‌نامند اگر داشته باشیم: $X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \ldots + \theta_q Z_{t-q}$ که $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ و $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ مقادیر ثابتی هستند. در اینجا اگر $\{Z_t\}$ تصادفی محض باشد، سری $MA(q)$ ایستای اکید خواهد بود.

تعریف ۵.۲.۱ فرآیند $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ را فرآیند اتورگرسیو مرتبه‌ی p یا $AR(p)$ گویند اگر فرآیند ایستایی باشد که در رابطه‌ی زیر صدق کند.

$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$ که $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ و $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ مقادیر ثابت‌اند.

کلاس مدل‌های سری‌های زمانی خطی که شامل کلاس مدل‌های اتورگرسیو میانگین متحرک($ARMA$) می‌شود، چارچوب وسیعی برای مطالعه و بررسی فرآیندهای ایستا فراهم می‌کند.

تعریف ۶.۲.۱ فرآیند $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ یک فرآیند خطی است اگر برای هر t صحیح داشته باشیم

که $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ و $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ و $\{\psi_j\}$ دنباله‌ای از اعداد ثابت است به‌طوری که داشته باشیم $\sum_{j=-\infty}^{\infty} | \psi_j | < \infty$.

تعریف ۷.۲.۱ فرآیند $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ یک فرآیند $ARMA(p, q)$ است، اگر $\{X_t\}$ ایستا بوده و برای هر t

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \ldots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \ldots + \theta_q Z_{t-q},$$

که $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ و معادلات $(1 - \phi_1 Z - \ldots - \phi_p Z^p) = 0$ و $(1 + \theta_1 Z + \ldots + \theta_q Z^q) = 0$ هیچ ریشه مشترکی نداشته باشند.

فرم خلاصه شده تعریف قبل را به صورت $\Phi(B) X_t = \Theta(B) Z_t$ می‌توان نوشت که $\Phi(.)$ و $\Theta(.)$ چندجمله‌ای هایی به فرم $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$ و $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q$ هستند و B عملگر شیفت پسرو می‌باشد.

تعریف ۸.۲.۱ فرآیند $ARMA(p, q)$، سببی(عِلّی) یا تابعی سببی از $\{Z_t\}$ است اگر ثابت‌های $\{\psi_j\}$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $\sum_{j=0}^{\infty} | \psi_j | < \infty$ و به ازای هر t، $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$. سببی بودن معادل این شرط است که $\Phi(Z) = 1 - \phi_1 Z - \ldots - \phi_p Z^p \neq 0$ برای هر $| Z | \leq 1$ برقرار باشد.

تعریف ۹.۲.۱ فرآیند $ARMA(p, q)$، معکوس پذیر نامیده می‌شود اگر ثابت‌های $\{\pi_j\}$ وجود داشته باشند که $\sum_{j=0}^{\infty} | \pi_j | < \infty$ و به ازای هر t، $Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$ باشد. معکوس پذیری معادل با این شرط است که برای هر $| Z | \leq 1$ داشته باشیم $\Theta(Z) = 1 + \theta_1 Z + \ldots + \theta_q Z^q \neq 0$.

۱.۲.۱ معرفی توزیع α-پایدار

تعریف ۱۰.۲.۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع دم‌سنگین از طرف راست است اگر $\alpha > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$P[X > x] \sim x^{-\alpha}, \; x \to \infty \,, \qquad (1.1)$$

که در آن رابطه‌ی $\sim$ به این صورت تعریف می‌شود که $f(x) \sim g(x), \; x \to \infty$ هرگاه $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. توجه کنید که وقتی $x \geq 0$، $\beta > \alpha$ آن‌گاه $E(X^\beta) = \infty$ و اگر $\beta < \alpha$، $E(X^\beta) < \infty$.

تعریف توزیع دم سنگین برای دم سمت چپ و دو طرفه به طور مشابه است. توزیع‌های t، F، پارتو و پایدار مثال‌هایی از توزیع دم سنگین هستند. در ادامه به معرفی توزیع پایدار می‌پردازیم.

تعریف ۱۱.۲.۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار است اگر برای هر عدد مثبت A و B، عدد مثبت C و عدد

حقیقی D وجود داشته باشند به قسمی که $AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D$، که X_1 و X_2 مشاهدات مستقلی از X بوده و $\stackrel{d}{=}$ هم‌توزیع بودن را نشان می‌دهد.

در صورتی که متغیر تصادفی X یک متغیر تباهیده باشد، همواره پایدار است. این حالت تباهیده چندان مورد علاقه نیست و همواره فرض می‌کنیم که X غیر تباهیده است.
متغیر تصادفی پایدار X، متقارن است اگر توزیع آن متقارن باشد به این معنی که X و $-X$ توزیع مشابه داشته باشند.

قضیه ۱۲.۲.۱ برای هر متغیر تصادفی پایدار X، عدد $\alpha \in (0, 2]$ وجود دارد به قسمی که C در تعریف قبل در رابطه‌ی $C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha$ صدق کند، که در این صورت متغیر تصادفی پایدار X با شاخص α، α-پایدار نامیده می‌شود.

مثال ۱۳.۲.۱ اگر X متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس ν^2، $X \sim N(\mu, \nu^2)$، باشد آنگاه X، پایدار با شاخص $\alpha = 2$ است زیرا

$$AX_1 + BX_2 \sim N((A+B)\mu, (A^2+B^2)\nu^2),$$

بدین معنی که تعریف (۱۱.۲.۱) با $C = (A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}$ و $D = (A+B-C)\mu$ برقرار است.

تعریف زیر با تعریف (۱۱.۲.۱) از توزیع پایدار معادل است.

تعریف ۱۴.۲.۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار است اگر پارامترهای $0 < \alpha \le 2$، $-1 \le \beta \le 1$، $\sigma \ge 0$ و $\mu \in \mathbb{R}$ به قسمی وجود داشته باشند که تابع مشخصه آن به فرم

$$E(\exp i\theta X) = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(\mathrm{sign}(\theta)))\tan\frac{\pi\alpha}{2} + i\mu\theta\} & \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma|\theta|(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\mathrm{sign}(\theta)))\ln|\theta| + i\mu\theta\} & \alpha = 1 \end{cases}$$

باشد که

$$\mathrm{sign}(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta > 0 \\ 0 & \theta = 0 \\ -1 & \theta < 0 \end{cases}$$

چون تابع مشخصه با چهار پارامتر مشخص می‌شود، توزیع‌های پایدار را به صورت $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ نمایش داده و می‌نویسیم $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$، به طوری که α شاخص پایداری توزیع، σ پارامتر مقیاس، βپارامتر چولگی و μ

پارامتر مکان می‌باشد. دو تعریف فوق معادل هم بوده و هر یک از دیگری نتیجه می‌شود.

نکته ۱۵.۲.۱ متغیر تصادفی $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ متقارن است اگر $\beta = ۰$ و $\mu = ۰$، و متقارن در اطراف μ است اگر $\beta = ۰$.

نکته ۱۶.۲.۱ توزیع $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ چوله به راست گفته می‌شود اگر $\beta > ۰$ و چوله به چپ گفته می‌شود اگر $\beta < ۰$. اگر $\beta = ۱$ این توزیع کاملاً چوله به راست یا مثبت است و اگر $\beta = -۱$ این توزیع کاملاً چوله به چپ یا منفی است.

چگالی‌های احتمال متغیرهای تصادفی α-پایدار وجود داشته و پیوسته می‌باشد. اما به جز چند مورد، فرم بسته مشخصی ندارد.

۲.۲.۱ برخی از خواص توزیع α-پایدار

گزاره ۱۷.۲.۱ فرض کنیم $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل با $i = ۱,۲$ ، $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$ باشند، در این صورت $X_۱ + X_۲ \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ که $\mu = \mu_۱ + \mu_۲$، $\beta = \frac{(\beta_۱\sigma_۱^\alpha + \beta_۲\sigma_۲^\alpha)}{(\sigma_۱^\alpha + \sigma_۲^\alpha)}$ و $\sigma = (\sigma_۱^\alpha + \sigma_۲^\alpha)^{\frac{۱}{\alpha}}$.

گزاره ۱۸.۲.۱ فرض کنیم $X \sim S_\alpha(\sigma, \alpha, \beta)$ و a یک ثابت حقیقی مقدار باشد، در این صورت خواهیم داشت $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$.

گزاره ۱۹.۲.۱ فرض کنیم $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ و a یک ثابت حقیقی غیر صفر باشد در این صورت اگر $\alpha \neq ۱$

$$aX \sim S_\alpha(|a|\sigma, \operatorname{sign}(a)\beta, a\mu)$$

و اگر $\alpha = ۱$

$$aX \sim S_\alpha(|a|\sigma, \operatorname{sign}(a)\beta, a\mu - \frac{۲}{\pi}a(\ln|a|)\sigma\beta).$$

گزاره ۲۰.۲.۱ اگر $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ با $۰ < \alpha < ۲$. آن‌گاه

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^\alpha p[X > \lambda] = c_\alpha \dfrac{۱ + \beta}{۲} \sigma^\alpha \\ \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^\alpha p[X < -\lambda] = c_\alpha \dfrac{۱ + \beta}{۲} \sigma^\alpha \end{cases}$$

که

$$c_\alpha = \left(\int_۰^\infty x^{-\alpha} \sin(x) dx\right)^{-۱} = \begin{cases} \dfrac{۱ - \alpha}{\Gamma(۲ - \alpha) \cdot \cos(\frac{\pi\alpha}{۲})} & \alpha \neq ۱ \\ \dfrac{۲}{\pi} & \alpha = ۱ \end{cases}$$

متغیرهای تصادفی α−پایدار با $\alpha > ۲$، دارای گشتاور دوم نامتناهی هستند. بنابراین بسیاری از تکنیک‌هایی که در حالت گوسی معتبر است برای آن‌ها کاربرد ندارد. هم‌چنین زمانی که $۱ \leq \alpha$ چون $E|X| = \infty$، عملاً استفاده از امید ریاضی غیر ممکن می‌باشد.

۳.۱ پیش‌بینی سری‌های زمانی ایستا با واریانس متناهی

در این قسمت به معرفی پیش‌بینی X_{n+h}، $(h > ۰)$ در یک سری ایستا با میانگین μ و تابع خودکواریانس $\gamma(.)$ معلوم برحسب $\{X_۱, \ldots, X_n\}$ می‌پردازیم. در واقع هدف پیدا کردن یک ترکیب خطی از $X_n, X_{n-۱}, \ldots, X_۲, X_۱, ۱$ برای پیش‌بینی X_{n+h} است، به‌طوری که حداقل میانگین مربع خطا را داشته باشد که در این صورت آن را بهترین برآوردگر خطی X_{n+h} می‌نامیم و با $P_n^{X_{n+h}}$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$P_n^{X_{n+h}} = a_۰ + a_۱ X_n + \cdots + a_n X_۱$$

و $a_۰$، …، a_n به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که

$$S(a_۰, \ldots, a_n) = E(X_{n+h} - a_۰ - a_۱ X_n \ldots - a_n X_۱)^۲ = E(X_{n+h} - a_۰ - \sum_{i=۱}^{n} a_i X_{n+۱-i})^۲,$$

را حداقل کند.

با توجه به این‌که $S(a_۰, \ldots, a_n)$ نسبت به هر یک از a_iها تابع درجه دوّم و نامنفی است پس مینیمم دارد و نقطه‌ی مینیمم، مشتق جزئی $S(a_۰, \ldots, a_n)$ را نسبت به هر a_i صفر می‌کند.

$$\frac{\partial S(a_۰, \ldots, a_n)}{\partial a_i} = ۰, \qquad i = ۰, ۱, \ldots, n.$$

با مشتق‌گیری و برابر صفر قراردادن مشتقات، $(n + ۱)$ رابطه زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} E[X_{n+h} - a_۰ - \sum_{i=۱}^{n} a_i X_{n+۱-i}] = ۰ \\ E[(X_{n+h} - a_۰ - \sum_{i=۱}^{n} a_i X_{n+۱-i}) X_{n+۱-j}] = ۰ \quad j = ۱, \ldots, n. \end{cases}$$

معادلات فوق را می‌توان به‌فرم زیر نوشت

$$a_۰ = \Gamma_n (۱ - \sum_{i=۱}^{n} a_i), \tag{۲.۱}$$

$$\Gamma_n a_n = \gamma_n(h), \tag{۳.۱}$$

به طوری که

$$\gamma_k(h) = (\gamma(h), \ldots, \gamma(n+h-1))',\ a_n = (a_1, \ldots, a_n)',$$

$$\Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^{n},$$

بنابراین اگر $a_0, \ldots, a_n$ در رابطه (۲.۱) و (۳.۱) صدق کنند، آنگاه

$$P_n^{X_{n+h}} = a_0 + a_1 X_n \ldots + a_n X_1.$$

میزان خطای پیش‌بینی برابر با $\epsilon_n = X_{n+h} - P_n^{Xn+h}$ است. که

$$E(\epsilon_n) = E(X_{n+h}) - E(P_n^{X_{n+h}}) = 0,$$

و میانگین مربع خطای پیش‌بینی برابر است با،

$$\begin{aligned} E(X_{n+h} - P_n^{X_{n+h}})^2 &= E(X_{n+h} - \hat{X}_{n+h})^2 = E(X_{n+h}^2) + E(\hat{X}_{n+h}^2) - 2EX_{n+h}\hat{X}_{n+h} \\ &= \gamma(0) + E[\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i X_{n+1-i}]^2 - 2E\sum_{i=1}^{n} a_i X_{n+1-i} X_{n+h} \\ &= \gamma(0) + \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \gamma(i-j) - 2\sum_{i=1}^{n} a_i \gamma(i) \\ &= \gamma(0) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \gamma(j) a_j - 2a'\gamma_n = \gamma(0) + a_n'\gamma_n - 2a_n'\gamma_n = \gamma(0) - a_n'\gamma_n(h). \end{aligned}$$

می‌توان ثابت کرد معادلات (۲.۱) و (۳.۱) تنها یک جواب منحصر به‌فرد دارند.
در واقع $P_n^{X_{n+h}}$ تصویر X_{n+h} در فضای تولید شده توسط تمام ترکیبات خطی $1, X_1, \ldots, X_n$ است. می‌دانیم تصویر یک بردار، برداری است که داخل فضای مورد نظر قرار دارد و خطای تصویر بر آن فضا عمود است. در مورد مسئله پیش‌بینی نیز $P_n^{X_{n+h}}$ تمام این خواص را دارد و عمود بودن خطا بر فضا نیز معادل است با اینکه

$$E[(X_{n+h} - P_n^{X_{n+h}})X_j] = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

در واقع دوخاصیت زیر خواص اصلی $P_n^{X_{n+h}}$ هستند و تنها ترکیب خطی از $1, X_1, \ldots, X_n$ با این دو خاصیت بردار منحصر به‌فرد $P_n^{X_{n+h}}$ است. این دوخاصیت عبارتند از

$$E(X_{n+h} - P_n^{X_{n+h}}) = \circ \qquad (۴.۱)$$

$$E[(X_{n+h} - P_n^{X_{n+h}})X_j] = \circ, \qquad j = ۱, \ldots, n. \qquad (۵.۱)$$

که همان خواص به‌دست آمده از مشتق‌گیری هستند. بنابراین با توجه به منحصر به‌فرد بودن $P_n^{X_{n+h}}$ در صورتی که ترکیبی خطی را به‌گونه‌ای معرفی کنیم که در دورابطهٔ (۴.۱) و (۵.۱) صدق کنند آن ترکیب خطی بهترین ترکیب خطی برآوردکننده‌ی X_{n+h} است.

۴.۱ پیش‌بینی یک سری ایستا برحسب مقادیر گذشته دور

در بخش قبل دیدیم در صورتی‌که $X_۱, \ldots, X_n$ را داشته باشیم و بخواهیم X_{n+h} را پیش‌بینی کنیم $P_n^{X_{n+h}}$ را چگونه بدست می‌آوریم. حال اگر $X_m, \ldots, X_\circ, X_۱, \ldots, X_n$ را داشته باشیم، X_{n+h} را می‌توان با همان روش برآورد کرد. این برآورد یا پیش‌بینی را با $\tilde{P}_n^{X_{n+h}}$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $E(X_t) = \circ$ طبیعی است باید $\tilde{P}_n^{X_{n+h}}$ به‌گونه‌ای باشد که در شرط زیر صدق کند.

$$E[(X_{n+h} - \tilde{P}_n^{X_{n+h}})X_{n+۱-i}] = \circ, \quad i = ۱, ۲, \ldots \qquad (۶.۱)$$

بنابراین باید $\tilde{P}_n^{X_{n+h}}$ را برای $i \leq n$ به‌صورت ترکیب خطی از X_i بنویسیم که در شرط(۶.۱) صدق کند. در نتیجه

$$\tilde{P}_n^{X_{n+h}} = \sum_{j=۱}^{\infty} \alpha_j X_{n+۱-j},$$

به طوری‌که

$$E\Big[(X_{n+h} - \sum_{j=۱}^{\infty} \alpha_j X_{n+۱-j})X_{n+۱-i}\Big] = \circ, \quad i = ۱, ۲, \ldots$$

یا

$$\gamma(h + i - ۱) = \sum_{j=۱}^{\infty} \alpha_j \gamma(i - j) \quad i = ۱, ۲, \ldots$$

فصل ۲

حداقل پراکندگی برای پیش‌بینی فرآیندهای $ARMA$ با واریانس نامتناهی

۱.۲ مقدمه

در سال ۱۹۸۵، براکول و کلاین [۳] روش حداقل پراکندگی را برای پیش‌بینی خطی فرآیندهایی با واریانس نامتناهی ارائه داده‌اند. در این روش برای پیش‌بینی یک فرآیند با واریانس نامتناهی، پیش‌بینی خطی پیشنهاد داده‌اند که پراکندگی توزیع خطا را حداقل می‌کند. هرگاه فرآیند شامل نوفه‌هایی از توزیع α-پایدار متقارن باشد، این پیش‌بینی کننده پارامتر مقیاس توزیع خطا را حداقل می‌کند. در حالت کلی اگر فرآیند شامل نوفه‌هایی باشد که دم‌های آن به طور منظم تغییر می‌کنند، پیش‌بینی کننده، اندازه احتمالات دم خطا را حداقل می‌کند.

براکول و کلاین [۳] بهترین پیش‌بینی خطی $X_{n+۱}$ را بر اساس $X_۱, \dots, X_n$ برای فرآیندهای $ARMA(۱,۱)$ و $AR(p)$، هنگامی که نوفه‌ها واریانس نامتناهی دارند به‌دست آورده‌اند.

در این فصل به معرفی روش حداقل پراکندگی در پیش‌بینی فرآیندهای تصادفی با واریانس نامتناهی بر اساس مطالب مربوط به مقاله‌ی براکول و کلاین [۳] می‌پردازیم که در آن هدف، پیش‌بینی $X_{n+۱}, X_{n+۲}, \dots$ بر اساس مقادیر مشاهده شده‌ی متغیرهای تصادفی $X_n, \dots, X_۱$ است. می‌دانیم پیش‌بینی خطی متغیر تصادفی Y نسبت به X باید فرمی به صورت $\hat{Y} = \mathbf{a}\mathbf{X}_n'$ داشته باشد که $\mathbf{a} = (a_۱, \dots, a_n)'$ و $\mathbf{X}_n = (X_۱, X_۲, \dots, X_n)'$. اگر نوفه‌ها در فرآیند $ARMA(p,q)$ با واریانس متناهی باشند، پیش‌بینی کننده بر اساس حداقل کردن میانگین مربع خطا، یعنی $E(Y - \hat{Y})^۲$ به‌دست می‌آید. جهت انتخاب پیش‌بینی کننده برای فرآیندهایی که واریانس نامتناهی دارند، معیارهای متفاوتی ارائه شده است. یکی از روش‌های پیشنهاد شده، حداقل کردن امید قدر مطلق خطا و تکنیک شبه طیفی است که کامبانیس و سلطانی [۲] معرفی کرده‌اند.

روش دیگر، استفاده از معیار حداقل پراکندگی است که توسط استاک [۲۱] جهت استفاده از فیلتر کالمن مطرح شد. معیارها و روش‌های دیگری نیز برای پیش‌بینی وجود دارند، اما این روش‌ها دارای محدودیت‌هایی هستند. از جمله‌ی