دانشگاه صنعت آب وبرق(شهید عباسپور)

دانشکده مهندسی برق

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته برق- قدرت

عنوان:

"تخمین *on-line* پارامترهای ژنراتور سنکرون با در نظر گرفتن مدل *AVR* به کمک آزمایش اختلال در تحریک"

تحقیق و تدوین:

فرزاد دهقانی

استاتید راهنما:

دکتر محمدرضا نقاشان

دکتر علیرضا یزدی‌زاده

زمستان ۱۳۸۷

فهرست مطالب:

فصل اول

مقدمه..... ۱

فصل دوم

روش‌های شناسایی سیستم‌ها و تخمین پارامترهای آنها..... ۵

۲-۱: تعاریف اولیه..... ۶

۲-۲: نکات مهم در انجام آزمایش جهت شناسایی سیستم..... ۱۰

۲-۳: تقسیم‌بندی روش‌های مختلف شناسایی سیستم و تخمین پارامتر..... ۱۱

۲-۴: روش‌های شناسایی یکباره..... ۱۲

۲-۴-۱: روش حداقل مربعات..... ۱۳

۲-۴-۲: روش حداقل مربعات وزن داده شده..... ۱۸

۲-۴-۳: روش تخمین بیز..... ۱۸

۲-۴-۴: روش تخمین حداکثر شباهت..... ۲۰

۲-۵: روش‌های شناسایی تکراری..... ۲۱

۲-۶: روش‌های شناسایی بازگشتی..... ۲۵

۲-۶-۱: روش حداقل مربعات بازگشتی..... ۲۶

۲-۶-۲: تخمین اولیه در روش‌های بازگشتی..... ۲۷

۲-۷: روش‌های شناسایی هوشمند..... ۲۷

۲-۷-۱: روش شبکه‌های عصبی مصنوعی..... ۲۸

۲-۷-۲: روش الگوریتم ژنتیک..... ۲۹

۲-۸: شناسایی در حوزه فرکانس..... ۳۰

فصل سوم

مدل‌سازی ژنراتور سنکرون و *AVR*..... ۳۲

۳-۱: مدل‌سازی ژنراتور سنکرون..... ۳۳

۳-۲: مدل دومحوری پارک..... ۳۳

۳-۳: توصیف فضای حالت قسمت الکتریکی ژنراتور سنکرون..... ۳۵

۳-۳-۱: توصیف فضای حالت قسمت الکتریکی ژنراتور
با استفاده از شار پیوندی سیم‌پیچ‌ها بعنوان متغیرهای حالت..... ۳۶
۳-۳-۲: توصیف فضای حالت قسمت الکتریکی ژنراتور با استفاده از جریان سیم‌پیچ‌ها بعنوان متغیرهای حالت.... ۳۷
۳-۴: توصیف فضای حالت قسمت مکانیکی ژنراتور سنکرون..... ۳۸
۳-۵) مدل‌سازی *AVR*..... ۳۸
۳-۶: شبیه‌سازی مدل ژنراتور در محیط نرم‌افزار *MATLAB*..... ۴۰

فصل چهارم
پیاده‌سازی روش *PEM* برای تخمین پارامترهای ژنراتور سنکرون و *AVR*..... ۴۳
۴-۱: معرفی ژنراتور و *AVR* مورد مطالعه..... ۴۴
۴-۲: انجام آزمایش و تهیه اطلاعات لازم جهت تخمین پارامترهای سیستم..... ۴۵
۴-۳: تخمین پارامترهای سیستم ژنراتور-*AVR* با استفاده از سیگنال‌های بدون نویز..... ۴۹
۴-۳-۱: تخمین پارامترهای قسمت الکتریکی ژنراتور..... ۵۰
۴-۳-۲: تخمین پارامترهای قسمت مکانیکی ژنراتور..... ۵۳
۴-۳-۳: تخمین پارامترهای *AVR*..... ۵۴
۴-۳-۴: تخمین پارامترهای ژنراتور..... ۵۵
۴-۳-۵: تخمین پارامترهای سیستم ژنراتور-*AVR*..... ۵۷
۴-۴: تخمین پارامترهای سیستم مورد مطالعه با استفاده از سیگنال‌های دارای نویز..... ۵۸
۴-۴-۱: سیگنال‌های حاوی نویز سفید..... ۵۸
۴-۴-۲: سیگنال‌های حاوی نویز رنگی..... ۶۴
۴-۵: مقایسه مقادیر تخمین زده شده برای پارامترهای سیستم
با استفاده از سیگنال‌های بدون نویز و سیگنال‌های نویزدار..... ۷۰

فصل پنجم
ارزیابی و اعتباردهی مدل‌های تخمین زده شده..... ۷۵
۵-۱: تهیه اطلاعات سیگنال‌های آزمایشی برای ارزیابی مدل‌ها..... ۷۶
۵-۲: ارزیابی مدل‌های تخمین زده شده با استفاده از نتایج آزمایش اتصال کوتاه..... ۷۷
۵-۳: ارزیابی مدل‌های تخمین زده شده با استفاده از
نتایج آزمایش اختلال در توان مکانیکی ورودی ژنراتور..... ۷۹

فصل ششم
نتیجه‌گیری و پیشنهادات.....۸۴

پیوست اول.....۸۶
پیوست دوم.....۸۷
پیوست سوم.....۸۸

مراجع.....۸۹

چکیده:

هدف از انجام این پروژه ارائه روشی برای اندازه‌گیری روی خط تمامی پارامترهای ژنراتور سنکرون می‌باشد. این پارامترها، شامل پارامترهای دینامیکی و گذرای ژنراتور سنکرون می‌باشند. در این پایان-نامه، برای ایجاد اختلال دینامیکی در ژنراتور، به جای اینکه *AVR* را از مدار خارج کرده و به صورت دستی در ولتاژ تحریک ایجاد اختلال کرد، تغییر در سیگنال مرجع *AVR*، اعمال می‌شود و تخمین پارامترها، برای سیستم به هم پیوسته و درتقابل ژنراتور و *AVR*، تؤاماً صورت می‌گیرد. سیستم ژنراتور و *AVR*، به پنج زیرسیستم تقسیم می‌شود و پارامترهای هر زیرسیستم با توجه به ورودی‌ها و خروجی‌های آن، تخمین زده می‌شوند. برای تخمین پارامترها از روش کلاسیک *PEM* استفاده می‌شود. به منظور اینکه مدل‌سازی انجام شده در پروژه، با شرایط یک آزمایش واقعی مطابقت داشته باشد سیگنال‌های ورودی و خروجی سیستم مورد مطالعه با نویز نیز در نظر گرفته می‌شوند و پارامترها با استفاده از سیگنال‌های حاوی نویز سفید و نویز رنگی نیز تخمین زده می‌شوند. در نهایت با اعمال سیگنال‌های مربوط به دو آزمایش اتصال کوتاه بر روی پایانه ژنراتور و آزمایش اختلال در توان مکانیکی ژنراتور، اعتبار مدل‌های تخمین زده شده در پایان‌نامه ارزیابی می‌شود.

فصل اول
مقدمه

ژنراتورهای سنکرون، منابع عمدهٔ تامین انرژی الکتریکی در سیستم‌های قدرت می‌باشند. حالات بهره-برداری از سیستم‌های قدرت به هم پیوسته، تحت تاثیر پدیده‌های برنامه‌ریزی شده‌ای همانند توزیع اقتصادی بار، تغییر توپولوژی سیستم، تعمیرات، نگهداری و...، همچنین پدیده‌های ناخواسته‌ای همانند صاعقه، قطع و وصل بارها، قطع خطوط انتقال، خروج واحدهای تولیدی و... دائماً در حال تغییر می-باشد. این تغییر دائمی در حالت سیستم قدرت سبب بروز حالات گذرا و دینامیک در خطوط انتقال، ترانسفورماتورها و نهایتاً تغییر در ژنراتورها می‌گردد. در نتیجه برای تعیین حاشیه بهره‌برداری پایدار و ایمن، همچنین میزان قابلیت اطمینان سیستم، لازم است دینامیک سیستم قدرت به همراه تمامی اجزای آن مدل شود. یکی از مهمترین این اجزا، ژنراتورهای سنکرون می‌باشند که از محدوده عملکرد دینامیکی وسیعی برخوردار بوده و لازم است در بررسی‌های دینامیکی از دقیق‌ترین مدل‌های آن استفاده شود. تاکنون روش‌های مختلفی جهت مدل‌سازی و تعیین پارامترهای ژنراتور سنکرون مورد استفاده قرار گرفته است که به تدریج با پیشرفت علم و تکنولوژی کاملتر شده و توانسته‌اند با دقت بیشتری رفتار ژنراتور سنکرون را مدل‌سازی نمایند. اساس روش‌های مطالعه رفتار ژنراتورهای سنکرون در اواخر قرن نوزدهم میلادی ریشه دارد[۱]. مفاهیم کلیدی تبدیل متغیرهای استاتور به قالب مرجع استاتور با سرعت سنکرون توسط بلوندل و پارک مطرح شدند که تا امروز نیز اساس مطالعات ماشین-های سنکرون می‌باشند. برخی از این مفاهیم مطرح شده از آن زمان تا سه دهه اخیر دست نخورده باقی مانده بودند. با ظهور رایانه‌های دیجیتال در این زمینه نیز تحولی اساسی شکل گرفت و مطالعات مبسوط‌تری جهت مدل‌سازی و تعیین پارامترهای ژنراتور سنکرون صورت پذیرفت. به دنبال مطرح شدن تئوری ولتاژ ثابت پشت راکتانس توسط کراری در سال ۱۹۲۳، در سال ۱۹۲۸ پارک و روبرتسون، راکتانس‌ها و ثابت‌های زمانی محور طولی و عرضی را تعریف کردند و به دنبال آن مفاهیم رژیم‌های کندگذر و تندگذر را در رابطه با شارها، ولتاژها و جریان‌ها مطرح ساختند که این حالتها در هنگام وقوع تغییرات ناگهانی در پارامترهای الکتریکی به وقوع می‌پیوستند[۱]. با توجه به ایده‌های فوق و این فرض که با در نظر گرفتن راکتانس‌های پراکندگی سیم‌بندی‌های استاتور، میدان و بدنه روتور می‌توان یک راکتانس متقابل بین روتور و استاتور تعریف نمود، موضوع اصلی مدار معادل محور مستقیم (محور d) مطرح شد. در سال ۱۹۲۹، پارک مفاهیم محورهای d و q را به عنوان بسط تبدیلات $dq0$ که خود آن را عنوان کرده بود، مطرح ساخت. در سال ۱۹۳۱، کیلگور مقاله‌ای مبسوط راجع به فاکتورهای مؤثر در محاسبه راکتانس‌های ماشین سنکرون ارائه داد[۱]. این مقاله براساس ویژگی‌های

فیزیکی و هندسی استاتور و روتور بنا شده بود. شروین رایت در همان سال روش‌های تعیین مشخصات انواع ژنراتورهای سنکرون و مقادیر گذرا را از طریق آزمایش فرمول‌بندی کرد. این کار اساس تصویب اولین روش آزمایش ژنراتور سنکرون توسط کمیته فرعی ماشین‌های سنکرون *AIEE* در سال ۱۹۴۵ گردید[۴]. در اوایل دهه ۱۹۶۰ همزمان با افزایش کاربرد تکنیک‌های محاسباتی در تحلیل سیستم‌های قدرت، پیشرفت‌های صورت گرفته در زمینه آنالیز سیستم‌های قدرت منجر به تواناتر شدن مهندسان در تجزیه و تحلیل پایداری سیستم‌های قدرت بزرگ گردید. به دنبال این امر نیاز به مدل‌سازی دقیق‌تر ماشین‌های سنکرون بیشتر احساس شده و مسأله مدل‌سازی سیم‌پیچ‌های میراکننده ماشین نیز مورد بررسی قرار گرفت. تا آن زمان مشخصات ماشین را با استفاده ازآزمایش‌های اتصال کوتاه بدست می‌آوردند و مدل‌های معرفی شده نیز بر این اساس استوار بودند. عموماً آزمایش‌های اتصال کوتاه بسیار گرانقیمت می‌باشند و امکان وارد آمدن آسیب به ژنراتور طی این آزمایشات وجود دارد. مشکل دیگر این بود که هیچگونه روش مناسبی برای تعیین پارامترهای محور q وجود نداشت و با این آزمایشات تنها پارامترهای محور d در دسترس بودند در صورتی که مقادیر محور q دارای تأثیر بسزایی بر روی عملکرد ماشین می‌باشند.

در سال ۱۹۷۲، تابع تبدیل امپدانس‌های کاربردی جهت تطبیق مقادیر اندازه‌گیری شده مطرح گردید که در سال ۱۹۷۳ توسط داندنو و کندور بصورت کاملاً مشخص ارائه شد[۲]. با توجه به ضعف‌های ذکر شده برای روش آزمایش اتصال کوتاه، همزمان با این تحقیقات، افرادی سعی کردند تا روش‌های اصلاح شده‌ای را به منظور تعیین دقیقتر پارامترهای ژنراتور سنکرون با استفاده از آزمایش اتصال کوتاه ارائه دهند[۵و۶]. مهمترین ویژگی روش‌های پیشنهادی استفاده از اندازه‌گیری‌های جریان روتور در طی آزمایش اتصال کوتاه جهت تعیین دقیقتر مشخصه‌های مدار تحریک است. ولی همچنان نقاط ضعف عمدهٔ این روشها یعنی عدم توانایی تعیین پارامترهای محور عرضی و وارد شدن شوک شدید به ماشین باقی بود. در سال ۱۹۷۷ استفاده از آزمایش باربَرداری به عنوان روشی جهت تعیین پارامترهای ژنراتور سنکرون مطرح شد[۷و۸]. این آزمایش از این نظر که عکس‌العمل‌های زمانی متغیرهای ماشین به دنبال بروز اغتشاشی ناگهانی در تعیین مشخصه‌های آن به کار می‌رود، شبیه آزمایش‌های اتصال کوتاه می‌باشد. در مقابل روش‌های فوق‌الذکر، روش‌های دیگری مطرح شدند که می‌توانند مجموعه‌ای کامل از پارامترهای ژنراتور را مشخص نمایند. روش تخمین پارامترهای ژنراتور سنکرون بر اساس آزمایشات پاسخ فرکانسی ماشین در حالت ایستا از جمله این روش‌ها می‌باشد که قادر به تخمین کامل پارامترهای ژنراتور سنکرون می‌باشد و به عنوان روش استاندارد *IEEE* ارائه شده است[۲].

تمامی روش‌های ذکر شده زمانی که ماشین خارج از سرویس است می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. در سالهای اخیر، روش‌های شناسایی مبتنی بر اندازه‌گیری‌های روی خط[1] برای غلبه بر ضعف‌های

[1]- *On Line*

روش‌های کلاسیک، مورد توجه قرار گرفته است[۹ تا ۱۲]. این روش‌ها را می‌توان به دو دسته تقسیم نمود. در دسته اول[۹ و ۱۰]، با معلوم فرض کردن ساختار ژنراتور سنکرون، پارامترهای مدل با استفاده از اندازه‌گیری‌های روی خط تخمین زده می‌شوند. در دسته دوم[۱۱و۱۲]، به مدل‌سازی جعبه سیاه ژنراتور سنکرون با استفاده از داده‌های ورودی و خروجی می‌پردازند. در مدل‌سازی جعبه سیاه، ساختار سیستم نامعلوم است و نگاشت بین ورودی و خروجی بایستی از طریق مجموعه داده‌های اندازه‌گیری شده تعیین شود. ارجحیت روش‌های روی خط این است که ژنراتور از مدار خارج نمی‌شود و به تولید انرژی ادامه می‌دهد. علاوه بر این اگر مقادیر ارائه شده توسط کارخانه سازنده برای پارامترها در دسترس باشند، این مقادیر در شرایط کار ژنراتور به خاطر عواملی از قبیل اشباع، دما، پیری و... تغییر می‌کنند، که این موضوع ضرورت تخمین روی خط پارامترها را بیشتر نشان می‌دهد. در این روش‌ها از این واقعیت که شکل موج کمیات خروجی ژنراتور(از قبیل ولتاژ، جریان، توان و...) تابع مقادیر پارامترهای ژنراتور در شرایط اختلال می‌باشد، استفاده می‌شود. معمولاً اختلال با تغییر در ولتاژ تحریک ژنراتور ایجاد می‌شود. در مقالاتی که تا به امروز در این زمینه ارائه شده‌اند مدل سیستم تحریک و *AVR*[۲] ژنراتور در نظر گرفته نشده است و صرفاً تغییر در ولتاژ سیم‌پیچ تحریک، به عنوان ورودی معادلات پارک، در نظر گرفته شده است. در واقع ژنراتور به عنوان یک سیستم مستقل از *AVR* با ورودی‌ها و خروجی‌های مختص خود در نظر گرفته شده است. و برای ایجاد شرایط دینامیکی در ژنراتور در ولتاژ سیم‌پیچ تحریک بطور مستقیم اختلال ایجاد می‌شود. با توجه به اینکه ایجاد اختلال مستقیم در ولتاژ سیم‌پیچ تحریک، مستلزم خارج شدن سیستم *AVR* از مدار می‌باشد. اختلال موردنظر در این پروژه تغییر در نقطه مرجع[۳] است که از لحاظ بهره‌برداری در دسترس می‌باشد و مجموعه ژنراتور و *AVR* به عنوان یک سیستم واحد در نظر گرفته می‌شوند. در این پروژه از مقادیر پارامترهای ژنراتور نیروگاه شهید رجایی استفاده می‌شود. در ادامه پایان‌نامه در فصل دوم به بررسی روش‌های مختلف شناسایی سیستم پرداخته می‌شود. روش‌های شناسایی سیستم شامل روش‌های کلاسیک و نوین می‌باشند. روش‌های کلاسیک مشتمل بر سه روش یکباره، تکراری و بازگشتی می‌باشند. روش *PEM*، روشی تکراری می‌باشد که در این پروژه به منظور تخمین پارامترهای سیستم مورد مطالعه بکارگرفته شده است که در فصل دو به تفصیل شرح داده می‌شود. روش‌های هوشمند به عنوان نمونه‌ای از روش‌های نوین در ادامه فصل دوم شرح داده می‌شوند. در فصل سوم معادلات حالت توصیفگر رفتار دینامیکی ژنراتور و *AVR* بدست می‌آیند. معادلات پارک، دینامیک ژنراتور را توصیف می‌کنند. در فصل چهارم، با استفاده از روش *PEM* پارامترهای سیستم مورد مطالعه تخمین زده می‌شوند. سیستم مورد مطالعه به پنج زیر سیستم تقسیم می‌شود. پارامترهای هر زیرسیستم به طور مجزا تخمین زده می‌-

[2]- *Auto Voltage Regulator*
[3]- *Set Point*

شوند. سیگنال‌های ورودی و خروجی سیستم موردمطالعه جهت تخمین پارامترها، به دو صورت بدون نویز و دارای نویز در نظر گرفته شدند. سیگنال‌های نویزدار به دو شکل دارای نویز سفید و دارای نویز رنگی بدست آمدند. در فصل پنجم، اعتبار و میزان دقت تخمین پارامترها ارزیابی می‌شود. برای ارزیابی هر مدل تخمین زده شده (در بردارنده مجموعه پارامترهای تخمین زده شده)، خروجی‌های هر مدل با خروجی‌های سیستم واقعی به ازای ورودی‌های آزمایش اتصال کوتاه در پایانه ژنراتور و آزمایش اختلال در توان مکانیکی ژنراتور مقایسه شدند که میزان شباهت خروجی‌ها، بیانگر اعتبار هر مدل می‌باشد. در فصل ششم به بیان نتیجه‌گیری و پیشنهادات پرداخته می‌شود.

فصل دوم

روش‌های شناسایی سیستم‌ها و تخمین پارامترهای آنها

مقدمه: در این فصل بعد از ارائه تعاریف اولیه، در مورد روش‌های گوناگون شناسایی بحث می‌شود. روش‌های کلاسیک شناسایی به سه دسته یکباره، تکراری و بازگشتی تقسیم می‌شوند. به روش‌های یکباره و تکراری روش‌های خاموش و به روش بازگشتی روش روشن نیز گفته می‌شود. در روش‌های خاموش بعد از یک بار انجام آزمایش، اطلاعات جمع‌آوری شده و سیستم خاموش می‌شود و سپس به تحلیل داده‌ها پرداخته می‌شود. در صورتی که در روش روشن، در طول انجام آزمایش، تحلیل بر روی داده‌ها نیز صورت می‌گیرد و سیستم همچنان روشن است. در انتهای فصل، در مورد روش‌های شناسایی نوینی مانند روش‌های هوشمند نیز توضیح داده می‌شود.

۲-۱) تعاریف اولیه

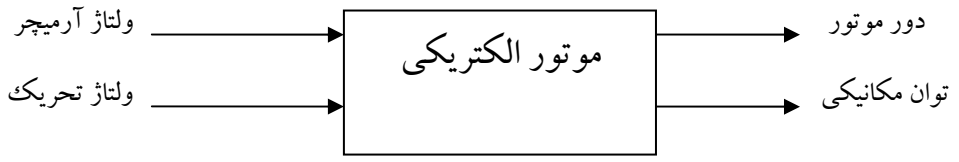
در این بخش تعاریف پایه و اولیه مرتبط با مفهوم شناسایی سیستم و تخمین پارامترهای یک سیستم ارائه می‌گردد.

سیگنال: تابعی است بر حسب زمان که رفتار یک پدیده فیزیکی را نشان می‌دهد. از آنجا که زمان در حال سپری شدن است، می توان زمان خاصی را بعنوان مبدا زمان در نظر گرفته و یک پدیده فیزیکی را بر حسب زمان رسم کرد آنگاه یک سیگنال بدست می‌آید.

نویز سفید: نویز سفید سیگنالی است که مقدار آن در هر لحظه با لحظه دیگر هیچ ربطی یا همبستگی ندارد و تابع خودهمبستگی آن در حوزه زمان ضریبی از تابع ضربه می‌باشد. نویز سفید درواقع وجود خارجی ندارد یعنی اینکه سیگنالی وجود ندارد که بین مقادیر آن در لحظه‌های مختلف همبستگی وجود نداشته باشد.

نویز رنگی: هر نویزی که نویز سفید نباشد، نویز رنگی می‌باشد.

سیستم: یک مجموعه یا فرآیندی است که روی یک یا چند سیگنال به عنوان ورودی عمل نموده و یک یا چند سیگنال دیگر، به عنوان خروجی ایجاد می‌کند. سیگنال‌ها، رابطه علی و معلولی دارند یا به عبارت دیگر، تغییر یک سیگنال، باعث تغییر سیگنال‌های دیگر می‌شود. شکل (۲-۱) یک موتور الکتریکی دو ورودی- دو خروجی را نشان می‌دهد. باید دقت شود که دور موتور بطور مستقیم دست کاربر نیست که بتواند آنرا تغییر دهد، بلکه فقط ولتاژ آرمیچر یا ولتاژ تحریک در اختیار کاربر است و با آنها می‌توان، دور موتور را تغییر داد.



شکل ۲-۱: موتور الکتریکی به عنوان یک سیستم چند ورودی- چند خروجی

حال که تعریف سیگنال و سیستم مشخص شد، به تعریف انواع مدل‌سازی پرداخته می‌شود. مهمترین انواع مدل‌ها عبارتند از:

الف- سیستم‌های کوچک شده از واقعیت (مدل‌های مینیاتوری): اگر بتوان مشابه آنچه که در سیستم اصلی وجود دارد (مثلا یک نیروگاه)، سیستمی در یک اندازه بسیار کوچکتر (مثلا یک آزمایشگاه) ساخت، آن سیستم را کوچک شده می‌نامند.

ب- مدل‌های ذهنی و زبانی: همه افراد از محیط اطراف، در ذهن خود مدل‌های دارند. مثلا می‌دانند که اگر شیر آب را باز کنند، آب از آن خارج می‌شود.

ج- مدل‌های ریاضی: به رابطه ریاضی بین ورودی سیستم و خروجی سیستم گویند. (که هدف اصلی در بحث شناسایی سیستم می‌باشد).

تقسیم‌بندی مدل‌سازی ریاضی: مدل‌سازی یعنی بدست آوردن یک رابطه بین ورودی و خروجی سیستم بطوری که اگر یک سیگنال شبیه سیگنال ورودی سیستم به مدل شبیه‌سازی شده اعمال گردد، خروجی‌های سیستم اصلی و مدل تقریباً یکسان باشند. در بحث شناسایی سیستم‌ها ابتدا یک ساختار خاص مثلا تابع تبدیل با پارامترهای ناشناخته تعریف می‌شود و سپس هدف این است که با اعمال یک ورودی به سیستم و ضبط و نمونه‌گیری اطلاعات ورودی و خروجی، بتوان پارامترهای ناشناخته مدل را محاسبه کرد. تقسیم‌بندی مدل‌سازی ریاضی به قرار زیر است:

الف) مدل‌سازی جعبه سفید (مدل‌سازی تحلیلی)

ب) مدل‌سازی جعبه سیاه (مدل‌سازی آمایشگاهی)

ج) مدل‌سازی جعبه خاکستری (مدل‌سازی ترکیبی)

حال به شرح بیشتر تقسیم‌بندی فوق پرداخته می‌شود:

مدل‌سازی جعبه سفید (تحلیلی): در این نوع مدل‌سازی با استفاده از قوانین فیزیک، ارتباط ورودی و خروجی بدست می‌آید. در مدل‌سازی تحلیلی، قوانین حاکم بر دینامیک سیستم شناخته شده است. به عنوان مثال وقتی در یک مدار الکتریکی که معادلات حلقه و گره نوشته می‌شود و یا وقتی که برای یک سیستم مکانیکی قانون دوم نیوتن در بدست آوردن روابط متغیرها استفاده می‌گردد، مدل‌سازی تحلیلی انجام شده است. اما آنچه در مدل‌سازی تحلیلی معمولاً مشکل‌ساز است، تعیین پارامترهاست. بدلیل اینکه پارامترهای سیستم‌های مختلف بسیار متنوع هستند، برای تعیین پارامتر در مدل‌سازی تحلیلی روش مشخصی وجود ندارد. بسته به نوع پارامتر و سیستم تحت مطالعه روش‌های مختلفی تعریف می‌گردند. برای انجام مدل‌سازی تحلیلی یک راه این است که با سیگنال ورودی، وارد سیستم شده و با

سیگنال خروجی، از سیستم، خارج شد، و بررسی شود که در این مسیر از چه پروسه‌ها و مراحلی عبور شده است و قوانین فیزیکی حاکم بر آنها چیست. به این روش مدل‌سازی تحلیلی گویند و روابط نوشته شده در این مسیر، مدل، نامیده می‌شود. با این مدل، می توان سیستم را در رایانه شبیه‌سازی کرده و منحنی تغییرات سیگنال خروجی را بر حسب ورودی بدست آورد. در مدل‌سازی تحلیلی با تخمین پارامترهای مدل، سیستم شناسایی می‌شود.

مدل‌سازی جعبه سیاه (آزمایشگاهی): اصل و اساس شناسایی سیستم، مربوط به این نوع، مدل‌سازی می‌باشد. در این روش دیگر لازم نیست که مقادیر تک‌تک پارامترها، از طریق آزمایش بدست آورده شود و قوانین فیزیکی حاکم بر آنها، مشخص گردد. در مدل‌سازی آزمایشگاهیِ یک سیستم، به دانش عملکرد آن احتیاج نیست. در این روش با نمونه‌برداری از سیگنال ورودی و خروجی بوسیله نمونه-بردار، مقادیر عددی آنها در اختیار رایانه قرار می‌گیرد، لذا در نهایت یک سری اعداد به دست می‌آید؛ که ماهیت آنها اهمیتی ندارد و به آنها فقط به چشم اعداد معمولی نگریسته می‌شود. لذا یک سری اعداد به دست می‌آید که حاصل نمونه‌گیری از ورودی و خروجی در هر چند ثانیه یکبار، می‌باشد. این اعداد، تماماً در رایانه، ذخیره می‌شوند. بعد از ذخیره شدن اعداد، یک مدل به آنها اعمال می‌شود (هنر در شناسایی سیستم در ارائه بهترین مدل است). اینکه این اعداد چه واحدی دارند یا چه معنای فیزیکی دارند، اصلاً به این روش، مربوط نمی‌شود.

در شناسایی سیستم به روش مدل‌سازی جعبه سیاه، کار اصلی این است که یک مدل ریاضی یا معادله دیفرانسیل بین دو بردار ورودی و خروجی که متشکل از یک سری اعداد هستند بدست آورد. به طوری که اگر یک ورودی دیگر به سیستم اعمال شود، بتوان خروجی را توسط مدل ریاضی بدست آمده تخمین زد؛ بطوری که خروجی تخمین زده شده از طریق مدل ریاضی بسیار نزدیک به خروجی واقعی باشد(خروجی بدست آمده به هیچ وجه ۱۰۰٪ منطبق به خروجی واقعی نیست). در بحث شناسایی سیستم، صحبت از فرآیند های تصادفی می‌شود، چون هنگام نمونه‌برداری، نویز وجود دارد و میزان نویز نیز متفاوت است، لذا خطای اندازه‌گیری از سیگنال ورودی و خروجی وجود دارد بنابراین، مدل بدست آمده از مقادیر نمونه‌برداری شده، هیچگاه ۱۰۰٪ منطبق بر سیستم نیست. دراین نوع مدل-سازی، بحث ارزیابی مدل نیز مطرح می‌شود که آیا این مدل خوب است یا بد و چه معیاری برای خوب بودن یا بد بودن آن وجود دارد که بعداً راجع به آن به تفصیل صحبت خواهد شد.

مدل‌سازی ترکیبی: در این نوع مدل‌سازی از قوانین فیزیکی استفاده می‌شود و ساختار بدست آورده می‌شود؛ ولی به جای بدست آوردن مقادیر تک‌تک پارامترها از طریق آزمایش، از سیگنال‌های ورودی و خروجی نمونه‌برداری کرده و بردار ورودی و خروجی که همان اعداد بدست آمده هستند را بدست آورده و از طریق این دو بردار، سعی می‌شود مقادیر پارامترها را تخمین زد. لذا مدل‌سازی ترکیبی به دو بخش زیر تقسیم‌بندی می‌شود:

۱- ساختار با مدل‌سازی تحلیلی بدست می‌آید.

۲- پارامترهای ساختار با نمونه‌برداری از ورودی و خروجی بدست می‌آیند.

در این پایان‌نامه از این نوع مدل‌سازی استفاده می‌شود.

در ادامه تقسیم بندی انواع سیستم‌ها و مدل‌ها از جهات مختلف بررسی می‌شود.

سیستم پیوسته- سیستم گسسته: سیستمی پیوسته است که ورودی و خروجی آن سیگنال‌های پیوسته باشند و سیستمی گسسته است که سیگنال ورودی و سیگنال خروجی آن، هر دو ، گسسته است. سیگنال پیوسته سیگنالی است که به ازای تمام مقادیر زمان تعریف شده است و مقدار دارد. سیگنال گسسته، سیگنالی است که به ازای مقادیر خاص زمانی، تعریف شده است و زمان(k یا KT)، فقط شامل اعداد صحیح می‌باشد. به عنوان مثال نرخ تورم از جمله سیگنال‌های ذاتاً گسسته است. سیستم‌های اقتصادی، سیستم‌های گسسته هستند. سیگنال‌های که در شناسایی سیستم‌ها بکار می‌روند، گسسته هستند و از گسسته‌سازی سیگنال‌های آنالوگ بدست می‌آیند. پروسه کار بدینگونه است که در ورودی و خروجی سیستم، یک سری سنسور قرار داده می‌شود، سپس توسط دستگاه نمونه‌بردار، اطلاعات نمونه-برداری شده، به رایانه اعمال می‌شوند.رایانه دیجیتال، تمامی سیگنال ها را فقط گسسته می‌بیند و سیگنال پیوسته برای آن تعریف نشده و ناشناخته می‌باشد.

سیستم بدون حافظه(استاتیکی)- *سیستم حافظه‌دار(دینامیکی)*: چنانچه در سیستمی رابطه ورودی و خروجی آن به طور لحظه‌ای باشد؛ به عبارت دیگر خروجی در لحظه t فقط به مقدار ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد. سیستم‌های استاتیکی با رابطه زیر توصیف می‌شوند.

$$y_t = f(u_t) \qquad (۱-۲)$$

y_t، خروجی سیستم در لحظه t و u_t، ورودی سیستم در لحظه t می‌باشند. از آنجا که در اکثر سیستم‌ها عناصر ذخیره‌کننده انرژی (مثل سلف و خازن در مدارهای الکتریکی) وجود دارند لذا رابطه ورودی و خروجی به صورت لحظه‌ای نمی‌باشد به عنوان مثال اگر به ورودی یک تغییر پله‌ای اعمال شود خروجی به صورت پله‌ای تغییر نمی‌کند، لذا سیستم‌ها عموماً حافظه‌دار (دینامیکی) هستند. سیستم دینامیکی، سیستمی حافظه‌دار است که خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه و لحظه‌های قبل وابسته می‌باشد. در سیستم دینامیکی، عموماً عنصر ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد مثل خازن و سلف. خازن و سلف در مدار باعث می‌شود که خروجی به سرعت، تحت تاثیر ورودی قرار نگیرد. یک سیستم دینامیکی گسسته با رابطه ذیل توصیف می‌شود.

$$y_t = f[u_t, u_{t-1}, \ldots] \qquad (۲-۲)$$

سیستم تک ورودی-تک خروجی و چند ورودی-چند خروجی: همانطور که از اسامی اشاره شده پیداست، چنانچه سیستمی فقط یک ورودی و یک خروجی داشته باشد آنرا *SISO* و در غیر اینصورت

MIMO می‌نامند. سیستم‌های قدرت عموماً *MIMO* هستند ولی در مطالعات دینامیکی سیستم‌های قدرت عموماً آنرا به چند سیستم *SISO* تبدیل می‌کنند و از تداخل‌ها صرفنظر می‌شود.

سیستم تغییر پذیر با زمان (*TV*) سیستم تغییر ناپذیر با زمان (*TI*): اگر در یک سیستم، با انتقال ورودی به اندازه t_0، خروجی نیز بهمان اندازه t_0، انتقال پیدا کند آن را تغییر ناپذیر با زمان نامند. به تعبیر فیزیکی، چنانچه اندازه عناصر سیستم (مثل مقدار مقاومت، اینرسی،...) در طول زمان ثابت باقی بماند سیستم *TI* می‌باشد.

سیستم خطی، سیستم غیرخطی: فرض کنید پاسخ سیستم به ازاء ورودی $x_1(t)$، $y_1(t)$ باشد و به ازاء $x_2(t)$، $y_2(t)$ خروجی باشد حال چنانچه ترکیبی خطی از ورودی‌ای قبلی یعنی $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ (a,b دلخواه) را به سیستم اعمال شود، اگر خروجی $y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$ باشد سیستم خطی است؛ در غیر اینصورت سیستم غیرخطی می باشد.

سیستم علّی و غیرعلّی: در سیستم علّی، خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه و لحظه‌های قبل وابسته است.

سیستمهای یقینی و تصادفی: سیستم یقینی، سیستمی است که به ازای اعمال یک ورودی خاص، همواره یک خروجی یکسان، بدست می‌دهد. ولی در عمل چنین نیست و سیستم متاثر از نویزهای داخلی و خارجی و دمای محیط و ... قرار می‌گیرد و سیگنال خروجی سیستم، با اعمال یک ورودی یکسان در هر بار از انجام آزمایش با دفعه‌های قبلی، اندکی تفاوت دارد و ۱۰۰٪ منطبق نیست و مقداری نویز روی منحنی، سوار است. وقتی نویز و خطاهای اندازه‌گیری و ... وارد اطلاعات شود، سیستم یک سیستم تصادفی می‌شود. عملاً تمامی سیستم‌ها، تصادفی هستند ولی گاهی اوقات برای ساده‌سازیِ محاسبات، فرض می‌شود سیستم یقینی است.

سیستم پایدار و ناپایدار: اگر سیستم به ازای ورودی‌های محدود، دارای خروجی‌های محدود باشد سیستم، پایدار خواهد بود ولی اگر حتی به ازای یک ورودی محدود، خروجی، نامحدود شود، سیستم ناپایدار خواهد بود.

سیستم فشرده و گسترده: سیستم فشرده، سیستمی که با معادلات دیفرانسیل معمولی، مدل می‌شود، سیستم فشرده نامیده می‌شود. سیستمی که با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مدل می‌شود (مثل معادلات موج و حرارت)، سیستم گسترده نامیده می‌شود.

۲-۲) نکات مهم در انجام آزمایش جهت شناسایی سیستم

برای انجام آزمایش جهت شناسایی یک سیستم، باید به نکات مهم زیر توجه شود:

نوع دستگاه جمع‌آوری اطلاعات: دستگاه جمع‌آوری اطلاعات باید پاسخگوی نیاز آزمایش از نظر تعداد ورودی، خروجی و فرکانس نمونه‌برداریِ موردنظر باشد.

تعیین فرکانس نمونه‌برداری: تعیین فرکانس نمونه‌برداری برای یک سیستم خاص از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. یک انتخاب اولیه می‌تواند یک دهم کوچکترین ثابت زمانی سیستم باشد. باید به این نکته مهم توجه نمود که لزوماً فرکانس نمونه‌برداری بالا به تخمین بهتر نمی‌انجامد. از طرف دیگر محدودیت دستگاه جمع‌آوری اطلاعات در دسترس ممکن است انتخاب دیگری را وادار نماید.

تعداد و نوع متغیرهایی مورد اندازه‌گیری: بایستی تعداد متغیرهایی که در حین انجام آزمایش اندازه‌گیری می‌شوند، مشخص شود. گاهی محدودیت‌های دستگاه جمع‌آوری اطلاعات، تعداد آنها را محدود می‌کند (معمولاً برای یک دستگاه جمع‌آوری اطلاعات، تعداد سیگنال در فرکانس نمونه‌برداری مقداری ثابت است).

از طرف دیگر سوال اصلی این است که به چه شکل این متغیر تعریف شده، قابل اندازه‌گیری است. گاهی یک متغیر در نمایش بلوکی تعریف می‌شود ولی اندازه‌گیری مستقیم آن غیرممکن و یا بسیار مشکل است. اگر متغیر موردنظر در دسترس و قابل اندازه‌گیری باشد، در بسیاری از موارد باید به ساخت مدار واسطه اقدام نمود. در واقع مدار واسطه سیگنال موردنظر (که مثلاً می‌تواند یک سیگنال متناوب باشد) را به سیگنال قابل قبول برای دستگاه جمع‌آوری اطلاعات (مثلا یک سیگنال جریان مستقیم صفر تا پنج ولت) تبدیل می‌نماید.

انتخاب ورودی: اینکه در حین آزمایش چه ورودی باید به سیستم اعمال شود، بسیار مهم است. از نظر کسی که فقط به شناسایی فکر می‌کند تغییرات بسیار شدید در ورودی (مثلا اعمال سیگنال مربعی متناوب) ایده‌آل است ولی در اکثر سیستم‌های فیزیکی اعمال چنین سیگنال ورودی مجاز نیست و ممکن است به سیستم صدمه بزند. بایستی سیگنال ورودی با این هدف انتخاب شود که حداکثر تحریک ممکن را به سیستم اعمال نماید (یعنی سیستم را به تغییرات شدید وا دارد) در عین حال هیچ صدمه‌ای به سیستم وارد نشود. شدت تغییرات ورودی باید با دقت و تایید کارشناسان واحد انتخاب گردد.

تعریف اولیه انجام آزمایش: روش انجام آزمایش یعنی قدم‌های مختلفی که باید در مراحل مختلف آزمایش انجام شود. این کار باید با دقت و تأیید کارشناسان واحد انتخاب گردد. بعد از انجام آزمایش و جمع‌آوری اطلاعات موردنیاز، در قسمت بعد به روش‌های مختلف شناسایی سیستم یعنی تعیین پارامترهای تابع تبدیل با استفاده از اطلاعات ورودی و خروجی پرداخته می‌شود.

۲-۳) تقسیم‌بندی روش‌های مختلف شناسایی سیستم و تخمین پارامتر

بطور کلی، روش‌های شناسایی سیستم به سه دسته زیر تقسیم می‌شوند.

۱- روش‌های یکباره

۲- روش‌های تکراری

۳- روش‌های بازگشتی

۱- **روش‌های یکباره**: در این دسته از روش‌های شناسایی، روش کار بدین گونه است که یک بار بر روی سیستم ناشناخته آزمایش نموده و از ورودی و خروجی سیستم، نمونه‌برداری می‌شود، سپس سیستم را خاموش کرده و از اطلاعات بدست آمده، یکبار و فقط یکبار بصورت برداری و ماتریس در روابط شناسایی، استفاده می‌گردد.

۲- **روش‌های تکراری**: در این روش‌ها، از تمامی اطلاعات و روابط، چندین بار استفاده می‌شود. یک بار نمونه‌برداری کرده و با استفاده از روابط، مقدار پارامترها تخمین زده می‌شوند، سپس مجدد از تمام اطلاعات استفاده شده و با استفاده از تخمین قبلی، مقدار تخمین جدید بهتر یا بهینه‌تر می‌شود و این روال ادامه می‌یابد و در هر مرحله، با استفاده از تخمین قبلی، تخمین جدید بهبود می‌یابد.

۳- **روش‌های بازگشتی**: در این روش، با استفاه از اطلاعات گرفته شده از ورودی و خروجی سیستم نامشخص تا لحظه N، یک تخمین از پارامترهای مجهول ساختار سیستم زده می‌شود ($\hat{\theta}_N$)، سپس با استفاده از اطلاعات جدید در لحظه $N+1$، تخمین بهتری زده می‌شود ($\hat{\theta}_{N+1}$). در واقع در این روش برخلاف دو روش قبلی، در حین تخمینِ پارامترها و شناسایی سیستم بر تعداد نمونه‌های ورودی و خروجی افزوده می‌شود؛ در صورتی که در دو روش پیشین فقط یکبار و بطور کامل نمونه‌برداری از سیگنال‌های ورودی و خروجی صورت می‌گرفت. به عنوان مثال اگر قرار است برای شناسایی یک سیستم، در نهایت تعداد ۱۰۰۰ نمونه از سیگنال‌های ورودی و خروجی تهیه شود؛ بعد از تهیه ۹۹۰ نمونه نیز پارامترهای سیستم تخمین زده می‌شوند و با افزایش نمونه ۹۹۱ اُم، تخمین قبلی اصلاح و بهبود می‌یابد و این روند تا نمونه ۱۰۰۰ اُم ادامه می‌یابد.

ساده‌ترینِ روش‌های شناسایی سیستم، روش‌های یکباره هستند ولی همانطور که در ادامه فصل نشان داده می‌شود شرط استفاده از این روش‌های ساده و سریع این است که سیگنال خطای باقیمانده e_t، نویز سفید باشد لذا ابتدا سعی می‌شود از روش‌های پیچیده و طولانیِ تکراری و بازگشتی استفاده نشود. در واقع ابتدا روش‌های سریع و ساده یکباره اعمال می‌شوند، سپس مدل بدست آمده ارزیابی می‌شود، اگر نتایج موردنظر قابل قبول بود که شناسایی به اتمام می‌رسد؛ در غیر این صورت از روش‌های پیچیده و طولانی بازگشتی و تکراری استفاده می‌شود.

به روش‌های یکباره و تکراری، روش‌های خاموش می‌گویند، چون یک بار که سیستم روشن می‌شود و نمونه‌برداری انجام می‌گیرید، سیستم خاموش شده و تمام محاسبات برای انجام تخمین پارامترها، در هنگام خاموش بودن سیستم، انجام می‌شود. به روش بازگشتی، آماده به کار نیز گفته می‌شود، چون سیستم روشن است و به دفعات از ورودی و خروجی سیستم، نمونه‌برداری و تخمین قبلی بهتر می‌شود.

۲-٤) روش‌های شناسایی یکباره

همانطور که گفته شد در روش‌های یکباره، بعد از یک بار نمونه‌گیری از سیگنال‌های ورودی و خروجی، فقط با یک بار محاسبه، مقادیر پارامترهای مجهول بدست می‌آیند. روش‌های یکباره، ساده-ترین و اصلی‌ترین روش‌های شناسایی می‌باشند. درادامه چهار روش مهم از روش‌های یکباره شرح داده می‌شود.

۲-٤-۱) روش حداقل مربعات

در روش حداقل مربعات این واقعیت در نظر گرفته می‌شود که هرگونه اندازه‌گیری از اطلاعات همراه با خطا و نویز می‌باشد. از طرفی معمولاً هر نوع ساختار در نظر گرفته شده برای مدل‌سازی با واقعیت سیستم اختلاف دارد. مثلاً ممکن است برای یک سیستم غیرخطی یک مدل خطی در نظر گرفته شده باشد. تحت این شرایط پارامترهای مدل در نظر گرفته شده، هر چه باشند، یک خطا در هر لحظه e_t بین خروجی اندازه‌گیری شده با خروجی مدل در نظر گرفته شده وجود دارد. در روش حداقل مربعات هدف این است که پارامترها طوری تخمین زده شوند که مجموع مربعات خطا $\sum e_t^2$ حداقل گردد. برای انجام روش حداقل مربعات قدم‌های زیر باید برداشته شود:

مرحله اول- انجام آزمایش روی سیستم و جمع‌آوری اطلاعات: ابتدا یک ورودی معلوم به سیستم، اعمال کرده و خروجی ضبط می‌شود بدین صورت که با یک دستگاه نمونه‌بردار از لحظه اعمال ورودی به سیستم، خروجی سیستم همگام با ورودی نمونه‌برداری شده و در رایانه ذخیره می‌گردد. در این آزمایش زمان نمونه‌برداری ثابت است. هر t_s ثانیه، یک مقدار از سیگنال ورودی و خروجی سیستم نمونه‌برداری شده و در رایانه دیجیتال ذخیره می‌شود. لذا بردار اطلاعات معلوم، حاوی مقادیر نمونه-برداری شده از سیگنال ورودی و خروجی می‌باشد. تعداد مقادیر نمونه‌برداری شده، از طریق زمان کلی انجام آزمایش و فرکانس نمونه‌برداری با استفاده از رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$N = T.f_s \qquad (۳-۲)$$

N: تعداد نمونه‌ها گرفته شده از سیگنال ورودی یا خروجی

T: زمان انجام آزمایش یا کل زمان نمونه‌برداری

f_s: فرکانس نمونه‌برداری

مرحله دوم- تعریف ساختار و بدست آوردن معادله رگرسیون خطی: در روش حداقل مربعات خطی نیاز به ساختاری مشابه ساختار زیر خواهد بود:

$$y_t = \underline{u}_t^T.\underline{\theta} + e_t \qquad (۴-۲)$$

در رابطه (۲-۴)، $\underline{\theta}$، بردار پارامترهای مجهول، $\underline{u}_t$، بردار اطلاعات معلوم(متشکل از نمونه‌های سیگنال-های ورودی و خروجی)، y_t، خروجی سیستم در لحظه t و e_t، مقدار خطا در لحظه t می‌باشند. به عنوان مثال، فرض می‌شود تابع تبدیل یک سیستم گسسته به صورت زیر باشد:

$$G(z) = \frac{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{1-m} + ... + b_1 z^{-1} + b_0}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{1-n} + ... + a_1 z^{-1} + a_0} = \frac{Y(z)}{X(z)} \qquad (۵-۲)$$

در ادامه نحوه بدست آوردن معادله رگرسیون خطی، با استفاده از رابطه (۲-۵)، شرح داده می‌شود. برای اینکه سیستم دارای جواب یکتا باشد باید یا b_0 یا a_0، برابر یک فرض شود. با طرفین- وسطین تابع تبدیل و اعمال تبدیل معکوس z، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_t = -a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} - \ldots - a_n y_{t-n} + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \ldots + b_m x_{t-m} \qquad (۶-۲)$$

در معادله (۲-۶)، y_t تا y_{t-n} و x_t تا x_{t-m}، مقادیر معلوم و a_1 تا a_n و b_0 تا b_n، مقادیر مجهول می‌باشند. لذا می‌توان y_t را به شکل برداری به صورت معادله خطی (۲-۴) نوشت که بردار پارامترهای مجهول و بردار متغیرهای معلوم در آن بصورت زیر می‌باشد:

$$\underline{u}_t^{\,T} = [-y_{t-1}, -y_{t-2}, \ldots, y_{t-n}, x_t, x_{t-1}, \ldots, x_{t-m}] \qquad (۷-۲)$$

$$\underline{\theta} = [a_1, a_2, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m] \qquad (۸-۲)$$

رابطه (۲-۷)، مقادیر معلوم نمونه‌برداری شده از ورودی وخروجی را نشان می‌دهد و رابطه (۲-۸)، مقادیر پارامترهای مجهول را نشان می‌دهد.

مرحله سوم- محاسبه $\hat{\theta}$ (بهترین θ) به نحوی که $S = \sum_{t=1}^{N} e_t^2$ حداقل شود: e_t، در واقع، خطای بین سیستم واقعی و مدل شبیه‌سازی شده می‌باشد. چون مقدار e_t، می‌تواند منفی یا مثبت باشد لذا مربع e_t یا e_t^2، در نظر گرفته می‌شود و سپس همه خطاها در تمام لحظه‌های نمونه‌برداری با هم جمع می‌شوند. در روش حداقل مربعات، هدف یافتن $\hat{\theta}$، در مدل شبیه‌سازی شده می‌باشد به صورتی که مقدار خطای S، به حداقل برسد. خطای e_t، ناشی از دوعامل زیر می‌باشد:

۱- خطای اندازه‌گیری: با توجه به اینکه کلیه حسگرها، دارای خطا می‌باشند، وقتی که سیگنال خروجی اندازه‌گیری شود، اندازه‌گیری همراه با نویز خواهد بود. هیچ حسگری بدون نویز وجود ندارد صرفاً باید نویز را کاهش داد.

۲- خطای تعریف ساختار: این نوع خطا وقتی بوجود می‌آید که به عنوان مثال یک سیستم غیرخطی را با یک سیستم خطی، تقریب زد.

برای یافتن $\hat{\theta}$ به قسمی که مقدار خطای S را حداقل سازد، معادله رگرسیون خطی برای تک‌تک زمان‌های نمونه‌برداری نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} y_1 = \underline{u}_1^{\,T}.\underline{\theta} + e_1 \\ y_2 = \underline{u}_2^{\,T}.\underline{\theta} + e_2 \\ \vdots \\ y_N = \underline{u}_N^{\,T}.\underline{\theta} + e_N \end{cases} \qquad (۹-۲)$$

حال می‌توان معادلات (۲-۹) را بفرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{\underline{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u}_1^{\,T} \\ \underline{u}_2^{\,T} \\ \vdots \\ \underline{u}_N^{\,T} \end{bmatrix}}_{U} \times \underline{\theta} + \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}}_{\underline{e}} \qquad (۱۰-۲)$$

باید دقت شود که در رابطه (۲-۱۰)، $\underline{y}$، $\underline{\theta}$ و $\underline{e}$ بردار هستند ولی U، یک ماتریس می‌باشد. فرم فوق را بصورت خلاصه به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\underline{y} = U \times \underline{\theta} + \underline{e} \qquad (۱۱-۲)$$

تعداد مجهولات با درایه‌های بردار $\underline{\theta}$ برابر است. چون a_0=۱ فرض شده است، لذا از a_1 تا a_n در واقع n عدد مجهول وجود دارد و از b_0 تا b_n در واقع m+۱ عدد مجهول وجود دارد که تعداد مجهول‌ها نهایتاً $p=n+m+1$ می‌شود. درایه‌های ماتریس U، همگی مقادیر نمونه‌برداری شده از ورودی و خروجی سیستم می‌باشند. با توجه به نمونه‌های گرفته شده از ورودی و خروجی سیستم، ماتریس U بدست می‌آید. لذا ماتریس U معلوم خواهد بود. در نتیجه در معادله رگرسیون خطی بردار $\underline{y}$ و ماتریس U معلوم است و $\underline{\theta}$ مجهول خواهد بود. می‌توان رابطه $S = \sum_{t=1}^{N} e_t^2$ را بصورت زیر بطور برداری نوشت:

$$S = \underline{e}^T.\underline{e} = [\underline{y} - U \times \underline{\theta}]^T.[\underline{y} - U \times \underline{\theta}] \qquad (۱۲-۲)$$

$$S = \underline{y}^T.\underline{y} - \underline{\theta}^T.U^T.\underline{y} - \underline{y}^T.U.\underline{\theta} + \underline{\theta}^T.U^T.U.\underline{\theta} \qquad (۱۳-۲)$$

در رابطه (۲-۱۳)، عبارات $\underline{y}^T.\underline{y}$ و $\underline{\theta}^T.U^T.U.\underline{\theta}$ و $\underline{y}^T.U.\underline{\theta}$ و $\underline{\theta}^T.U^T.\underline{y}$ اسکالر هستند. حال برای محاسبه $\underline{\hat{\theta}}$ یا بهترین $\underline{\theta}$، کافی است که از S، نسبت به $\underline{\theta}$ مشتق گرفته و مساوی با صفر قرار داد.

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -2\underline{y}^T.U + 2U^T.U.\underline{\theta} \qquad (۱۴-۲)$$

هدف محاسبه $\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0$ می‌باشد، لذا رابطه زیر بدست می‌آید:

$$-2\underline{y}^T.U + 2U^T.U.\underline{\theta} = 0 \Rightarrow U^T.U.\underline{\theta} = U^T.\underline{y} \qquad (۱۵-۲)$$

با معلوم بودن ماتریس U و بردار $\underline{y}$ می توان بهترین $\underline{\theta}$ یا $\underline{\hat{\theta}}$ را بدست آورد[۱۴]:

$$\hat{\theta} = (U^T.U)^{-1}.U^T.\underline{y} \qquad (۱۶-۲)$$

در ادامه چند نکته جانبی در مورد روش حداقل مربعات، شرح داده می‌شود. ماتریس U^TU، یک ماتریس $p \times p$ و مستقل از N (تعداد مقادیر نمونه‌برداری شده) می‌باشد. U^TU، یک ماتریس متقارن و مثبت (نیمه) معین می‌باشد[۱۴]. مثبت معین بودن U^TU از اهمیت فوق‌العاده‌ای در روش حداقل مربعات برخوردار است. اگر ماتریسی، مثبت معین باشد، معکوس‌پذیر هم هست و در نتیجه نگرانی راجع به محاسبه معکوس آن، وجود نخواهد داشت. می‌توان ثابت کرد که $\hat{\theta}$، S را حداقل می‌کند. برای این منظور مشتق دوم S نسبت به θ محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} = 2U^T.U \qquad (۱۷-۲)$$

از آنجا که U^TU، یک ماتریس مثبت معین است لذا $\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \geq 0$ می‌شود (تقعر به سمت بالا)، که این به مفهوم حداقل شدن S می‌باشد.