بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه الزهرا (س)

گروه فیزیک

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک ذرات بنیادی

۱۳۸۲ /۷/ ۲۰

عنـوان

مروری بر گرانش کوانتومی از دیدگاه نظریه میدانهای کوانتومی

استاد راهنما

دکتر کامران کاویانی

استاد مشاور

دکتر احمد شریعتی

نگارش

معصومه درگاهی

شهریور ۱۳۸۲

شماره ۲۱۷۰/...
تاریخ ۸۲/۶/۲۵
پیوست ...

جمهوری اسلامی ایران
دانشگاه الزهرا

بسمه تعالی

بموجب نامه شماره ۶۰۷۲/ت مورخ ۸۲/۶/۱۲ جلسه دفاع از پایان‌نامه خانم معصومه درگاهی دانشجوی رشته فیزیک دانشکده علوم پایه شماره دانشجویی ۷۹۲۸۴۰۰۲ در روز ۱۳۸۲/۶/۲۵ مورخ ... تحت عنوان ... مروری بر گرانش کوانتمی از دیدگاه نظریه میدانهای کوانتمی ... در محل آمفی‌تئاتر شماره ۱ برگزار گردید.

ابتدا خانم معصومه درگاهی در مورد موضوع و نتایج پایان‌نامه صحبت نمودند و سپس به سؤالات اعضاء حاضر در جلسه پاسخ دادند. هیئت داوران طی جلسه‌ای که همزمان تشکیل گردید پس از مشورت نمره دانشجو را هجده و نیم و با امتیاز عالی تعیین و مورد قبول قرار گرفت.

هیئت داوران

۱. استاد راهنما

۲. استاد مشاور احمد شریفی

۳. داور

۴. داور

نام و نام خانوادگی مدیر گروه ... امضاء

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده ... امضاء
یا نماینده دانشکده در شورای تحصیلات تکمیلی دانشگاه

تقدیر و تشکر

ستایش می کنم خداوند را برای تکمیل نعمتهای او و تسلیم بودن در برابر بزرگی او و ایمن ماندن از نافرمانی او

از استاد محترم جناب آقای دکتر کامران کاویانی که نظارت و سرپرستی این پایان نامه را بر عهده داشته اند کمال تشکر و قدردانی را دارم

کمال تشکر و سپاس را از اساتید گرامی آقایان دکتر شریعتی، دکتر خرمی، دکتر شفیع خانی و دکتر میرزایی که راهنمایی داوری و نظارت جلسه دفاعیه را بر عهده داشته اند دارم.

چکیده

نظـریه میدانهای کوانتومی در فضای مینکوفسکی از الحاق نظریه‌های مکانیک کوانتومی و نسـبیت خـاص بدست می‌آید و یک نظریه سازگار می‌باشد. هنگامی که در مورد گرانش کوانتومـی صـحبت مـی‌کنـیم باید مکانیک کوانتومی را در چارچوب نسبیت عام انیشتین بررسی کنیم که دارای مشکلاتی می‌باشد.

تاکـنون فیـزیکدانان تلاشـهای زیـادی برای الحاق نظریه‌های مکانیک کوانتومی و نسـبیت عـام انجام داده‌اند ولی هیچ‌یک از آنها این مسئله را کاملاً حل نکرده‌اند. یکی از راه‌حلهای این موضوع نظریه میدانهای کوانتومی در فضای خمیده می‌باشد.

در ایـن مطالعـات مـا سعی داریم، گرانش را از دیدگاه نظریه میدانهای کوانتومی بررسـی کنـیم و مشـکلاتی را که در این راه وجود دارد مانند تعیین حالتهای کوانتومی و مفهوم ذره و... را مورد بحث قرار دهیم و همچنین بازبهنجارش تانسور انرژی ـ مومنتم را نیز در فضاهای خمیده بررسی می‌کنیم.

فهرست

فصل اول

نظریه میدانهای کوانتومی در فضای مینکوفسکی

۱-۱. مقدمه

همانگونه که می‌دانیم در پی تناقضی که مکانیک کوانتومی با نسبیت خاص داشت، تلاشهایی برای سازگارکردن مکانیک کوانتومی با نسبیت صورت گرفت و منجر به نظریه‌ای به نام نظریهٔ میدانهای کوانتومی شد.

در این فصل ما خلاصه‌ای از میدانهای کوانتومی را در فضای مینکوفسکی بیان می‌کنیم و در فصل‌های بعد آن را به فضای خمیده تعمیم می‌دهیم.

۲-۱. میدان اسکالر و کوانتش آن

وقتی می‌گوئیم که یک میدان اسکالر در فضا (منظور فضا ـ زمان n بعدی مینکوفسکی) وجود دارد یعنی به هر نقطه از فضا یک عدد می‌توانیم نسبت دهیم و منظور ما این است که همهٔ ناظرهای لخت این اعداد را یکسان ببینند. ما این میدان را با $\phi\,(t\,,x)$ نشان می‌دهیم و این میدان در معادله زیر صدق می‌کند.

$$(\Box + m^2)\phi(t,x) = 0 \qquad (1)$$

که $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ و $\eta^{\mu\nu}$ متریک فضای مینکوفسکی است و m جرم کوانتای میدان می‌باشد. دانسیته لاگرانژی میدان ϕ به صورت زیر است:

$$L(x) = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha},\phi_{,\beta} - m^2\phi^2) \qquad (2)$$

که منظور از x همان $(t\ ,\ x)$ می‌باشد

با در نظر گرفتن کنش،

$$S = \int L(x)d^n x \qquad (3)$$

واکسترمم کردن آن یعنی $\delta S = 0$ می‌توان به معادله (۱) رسید.

جوابهای معادله (۱) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$U_k(t,x) \alpha e^{ik.x - i\omega t} \qquad (4)$$

که

$$-\infty \prec k_i \prec \infty \quad \text{و} \quad i = 1,2,\dots\ ,\ n\text{-}1 \quad k \equiv |k| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad \omega \equiv (k^2 + m^2)^{1/2}$$

مدهای (٤) را مدهای فرکانس مثبت نسبت به t می‌گویند که ویژه توابع عملگر $\frac{\partial}{\partial t}$ می‌باشند:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_k(t,x) = -i\omega u_k(t,x) \qquad \omega \succ 0 \qquad (5)$$

حاصلضرب اسکالر دو میدان ϕ_1 و ϕ_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\phi_1,\phi_2) = -i\int\{\phi_1(x)\partial_t\phi_2^*(x) - [\partial_t\phi_1(x)]\phi_2^*(x)\}d^{n-1}x = -i\int_t \phi_1(x)\overleftrightarrow{\partial_t}\phi_2^*(x)\ d^{n-1}x \qquad (6)$$

با توجه به تعریف (٦) مدهای u_k متعامد هستند:

$$(U_k, U_{k'}) = 0 \qquad k \neq k' \qquad (7)$$

در صورتیکه مدها را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$U_k(t,x) = \left[2\omega(2\pi)^{n-1}\right]^{-\frac{1}{2}} e^{ik.x - i\omega t} \qquad (8)$$

آنگاه U_kها توابع نرمالیزه هستند و ضرب اسکالر آنها به صورت زیر در می‌آید:

$$(U_k, U_{k'}) = \delta^{n-1}(k-k') \tag{۹}$$

همانطور که در مکانیک کوانتوم به x یک عملگر $\hat{x}$ نسبت دادیم و به مومنتم P یک عملگر $\hat{P}$ را نسبت دادیم که جابجاگر آنها به صورت $[\hat{x}, \hat{P}] = i$ و $[\hat{x}, \hat{x}] = [\hat{P}, \hat{P}] = 0$ بود، در اینجا نیز به میدان ϕ یک عملگر $\hat{\phi}$ نسبت می‌دهیم و مشابه مکانیک کوانتوم مومنتم مزدوج π را به صورت $\pi = \dfrac{\partial L}{\partial(\partial_t \phi)}$ تعریف می‌کنیم و روابط جابجاگری آنها را مشابه مکانیک کوانتومی به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} &[\phi(t,x), \phi(t,x')] = 0 \\ &[\pi(t,x), \pi(t,x')] = 0 \\ &[\phi(t,x), \pi(t,x')] = i\delta^{n-1}(x-x') \end{aligned} \tag{۱۰}$$

با این کار میدان ϕ را کوانتیده کرده‌ایم.

مدهای U_k و مزدوج مختلط آنها پایه‌های کامل هستند بنابراین می‌توان میدان ϕ را برحسب این پایه‌های کامل بسط داد.

$$\phi(t,x) = \sum_k \left[a_k U_k(t,x) + a_k^\dagger U_k^*(t,x)\right] \tag{۱۱}$$

که در عبارت فوق a_k و $a_k^\dagger$ عملگر هستند. با توجه به روابط جابجاگری برای ϕ و π می‌توان روابط جابجاگری برای a_k ها و $a_k^\dagger$ ها را بدست آورد.

$$\left.\begin{aligned} &[a_k, a_{k'}] = 0 \\ &[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \\ &[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \end{aligned}\right\} \tag{۱۲}$$

حال که ϕ یک عملگر شده است، یعنی روی یک فضای برداری اثر می‌کند. می‌توانیم تمام حالتهای این فضای‌برداری را از روی برداری به نام بردار خلأ $|0\rangle$ ، یا حالت بدون ذره، بدست آوریم. بردار ، $|0\rangle$

این خاصیت را دارد که اگر عملگر نابودکننده، a_k روی آن اثر کند حاصل صفر می‌شود.

$$a_k|0\rangle = 0 \qquad \forall k \tag{۱۳}$$

حالتهای دیگر با اثر عملگر $a_k^\dagger$ ، یا عملگر خلق، روی $|0\rangle$ بدست می‌آیند.

حالت تک ذره‌ای:

$$|1_k\rangle = a_k^\dagger|0\rangle \tag{۱۴}$$

حالت چند ذره‌ای:

$$|1_{k_1}, 1_{k_2}, \ldots 1_{k_j}\rangle = a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger \ldots a_{k_j}^\dagger|0\rangle \tag{۱۵}$$

۳-۱- انرژی خلأ

در این بخش می‌خواهیم مقدار انرژی خلأ را بدست آوریم بـرای اینکـار اول عملگـر هـامیلتونی را بدست می‌آوریم.

تانسور انرژی ـ مومنتم برای میدان اسکالر به صورت زیر می‌باشد:

$$T_{\alpha\beta} = \phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\lambda\delta}\phi_{,\lambda}\phi_{,\delta} + \frac{1}{2}m^2\phi^2\eta_{\alpha\beta} \tag{۱۶}$$

مؤلفه T_{tt} آن بیانگر دانسیته هامیلتونی است:

$$T_{tt} = \frac{1}{2}\left[(\partial_t\phi)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(\partial_i\phi)^2 + m^2\phi^2\right] \tag{۱۷}$$

و دانسیته مومنتم به صورت T_{ti} می‌باشد:

$$T_{ti} = \partial_t\phi\partial_i\phi \qquad i = 1, \ldots, n-1 \tag{۱۸}$$

در نتیجه عملگرهای هامیلتونی و مومنتم به صورت زیر خواهند شد:

$$H \equiv \int_t T_{tt} d^{n-1}x = \frac{1}{2}\sum_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger)\omega \tag{۱۹}$$

$$P_i \equiv \int_t T_{ti} d^{n-1}x = \sum_k a_k^\dagger a_k k_i \tag{۲۰}$$

عملگر دیگری به نام عملگر تعداد، N، که تعداد ذرات را نشان می‌دهد به صورت زیر تعریف می‌شود که این عملگر با عملگرهای H و P_i جابجا می‌شود.

$$\left.\begin{array}{l} N_k \equiv a_k^{\dagger} a_k \\ N = \sum_k N_k \\ \left[N, H\right] = \left[N, P_i\right] = 0 \end{array}\right\} \qquad (۲۱)$$

حال به محاسبه انرژی و مومنتم خلأ می‌پردازیم. برای این کار باید مقدار متوسط عملگرهای H و P را حساب کنیم،

$$\langle 0|P|0\rangle = 0 \qquad (۲۲)$$

یعنی مومنتم خلأ صفر است و چون هیچ ذره‌ای در خلأ نیست انتظار داریم که انرژی آن نیز صفر باشد.

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2}\sum_k \omega \langle 0|\left(a_k^{\dagger} a_k + a_k a_k^{\dagger}\right)|0\rangle = \langle 0|0\rangle \sum_k \frac{1}{2}\omega = \sum_k \frac{1}{2}\omega \qquad (۲۳)$$

شرط نرمالیزاسیون $\langle 0|0\rangle = 1$ را بکار برده‌ایم.

واضح است که انرژی خلأ صفر نیست بلکه به علت وجود جمع بی‌نهایت شده است. این بی‌نهایت را نمی‌توان به صورت تجربی اندازه‌گیری کرد، می‌توان آن را به عنوان انرژی زمینهٔ خلأ تعبیر کرد. برای حذف این بی‌نهایت می‌توان روشی را به نام «منظم شده نرمال»[1] بکار برد. که بنابه تعریف «منظم‌شده نرمال» یعنی دوباره مرتب کردن عملگرها به صورتی که تمام عملگرهای فنا در سمت راست قرار گیرند. این تعریف معادل این است که انرژی پایه خلأ را صفر قرار دهیم.

[1]. Normal Ordering

علامتی که برای «منظم شده نرمال» بکار می‌بریم : : می‌باشد یعنی،

$$: a_k a_k^\dagger := a_k^\dagger a_k \quad (۲٤)$$

با اعمال این روش برای هامیلتونی داریم:

$$: H := \sum_k a_k^\dagger a_k \omega \quad (۲۵)$$

$$\langle 0 | : H : | 0 \rangle = 0 \quad (۲٦)$$

به این ترتیب واگرایی موجود در انرژی خلأ از بین می‌رود.

۴-۱. توابع گرین

مقدار متوسط خلأ، جابجاگر و پاد جابجاگر دومیدان به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$iG(x,x') = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle \quad (۲۷)$$

$$G^{(1)}(x,x') = \langle 0 | \{\phi(x), \phi(x')\} | 0 \rangle \quad (۲۸)$$

که G را تابع پائولی ـ جردن[2] یا تابع شوینجر[3] گویند و $G^{(1)}$ را تابع هادامارد[4] می‌گویند.

این توابع را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left.\begin{aligned} iG(x,x') &= G^+(x,x') - G^-(x,x') \\ G^{(1)}(x,x') &= G^+(x,x') + G^-(x,x') \end{aligned}\right\} \quad (۲۹)$$

[2].Pauli-Jordan

[3]. Schwinger

[4]. Hadamard

که $G^{\pm}$ توابع ویتمن[5] نام دارند که با روابط زیر مشخص می‌شوند.

$$\left.\begin{aligned} G^{+}(x,x') &= \langle \circ|\phi(x)\phi(x')|\circ\rangle \\ G^{-}(x,x') &= \langle \circ|\phi(x')\phi(x)|\circ\rangle \end{aligned}\right\} \tag{۳۰}$$

انتشارگر فایمن نیز به صورت «مرتب‌شده زمانی»[6] میدانها تعریف می‌شود:

$$iG(x,x') = \langle \circ|T(\phi(x)\phi(x'))|\circ\rangle = \theta(t-t')G^{+}(x,x') + \theta(t'-t)G^{-}(x,x') \tag{۳۱}$$

که θ تابع پله می‌باشد:

$$\theta(t) = \begin{cases} ۱ & t>0 \\ ۰ & t<0 \end{cases}$$

با توجه به معادله (۱) واضح است که G و $G^{\pm}$ و $G^{(1)}$ معادله‌ای مشابه معادله زیر را برآورده می‌کنند:

$$(\square_x + m^۲)G(x,x') = \circ \tag{۳۲}$$

و معادله‌ای که G_F در آن صدق می‌کند،

$$(\square_x + m^۲)G_F(x,x') = -\delta^n(x-x') \tag{۳۳}$$

نمایش انتگرالی نیز برای توابع گرین می‌توان در نظر گرفت که به صورت زیر می‌باشد:

$$G(x,x') = (۲\pi)^{-n}\int \frac{\exp[ik.(x-x') - ik^\circ(t-t')]}{(k^\circ)^۲ - |k|^۲ - m^۲}\, d^n k \tag{۳٤}$$

که قطب انتگرال در $k^\circ = \pm\sqrt{|k|^۲ + m^۲}$ می‌باشد.

---

[5]. wightman

[6]. Time - order