بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام‌نور
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

مدولهای اول ضعیف شده

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی

توسط
عبدالرسول کرمی

استاد راهنما
دکتر احمد خاکساری

بهمن ۱۳۸۵

صورت جلسه دفاع از پایان‌نامه

پایان نامه تحت عنوان: **مدولهای اول ضعیف شده**

که توسط **عبدالرسول کرمی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است، مورد تأیید می‌باشد.

تاریخ دفاع: ۸۵/۱۱/۱۸ نمره: ۱۷/۵ درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱– دکتر احمد خاکساری	استاد راهنما	استادیار	خاکساری
۲– دکتر فریبا ارشاد	استاد ممتحن	استادیار	ارشاد
۳– دکتر نرگس عباسی	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

تقدیم به:

همسرم؛ یکتایی مهربانی، گذشت و فداکاری

و

پسرم؛ نوید

سپاسگزاری

من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق

بدون شک هر موفقیتی در عرصه زندگی انسان در گرو تلاش او مرهون حمایت‌های همه‌ی جانبه اطرافیان می‌باشد.

لذا در همین راستا بر خود واجب می‌دانم که مراتب سپاس و تشکر خود را از استاد گرامی جناب آقای دکتر احمد خاکساری که در همه مراحل این پایان‌نامه بنده را راهنمایی کرده‌اند، ابراز دارم و موفقیت خود را مدیون دقت نظر ایشان در انجام این پایان‌نامه می‌دانم.

فهرست علائم

$\in$	متعلق است به
$\notin$	متعلق نیست به
$\subseteq$	زیرمجموعه
$\subset$	زیرمجموعه محض
$\nsubseteq$	زیرمجموعه نیست
$A\backslash B$	تفاضل ۲ مجموعه
$\mathbb{Z}$	مجموعه اعداد صحیح
$\mathbb{Z}_n$	حلقه هم‌نهشتی‌ها به پیمانهٔ n
$I\Delta_r R$	I ایده‌آل راست R است.
$I\Delta_l R$	I ایده‌آل چپ R است.
$I\Delta R$	I ایده‌آل R است.
$\langle a\rangle$	زیرمدول (یا ایده‌آل) تولید شده توسط a
R/I	حلقهٔ خارج قسمتی
M/N	مدول خارج قسمت
$N\leq M$	N زیرمدول M است.
$(N:_R M)$	ایده‌آل حاصل تقسیم M بر N
$Ann_R(a)$	پوچساز عضو a
$Ann_R(M)$	پوچساز M
$T(M)$	زیرمدول بی‌تاب M

$\mathbf{0}_M$	عضو خنثی عمل عمل جمع مدول M
M_R	R_مدول راست
R^M	R_مدول چپ
$I\Delta_P R$	I ایده‌آل اول R است.
$I\Delta_m R$	I ایده‌آل ماکسیمال R است.
$RadI=\sqrt{I}$	رادیکال ایده‌آل I
$RadR$	رادیکال حلقه‌ی R
$J(R)$	رادیکال ژاکوبن R
$Z(R)$	مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R
A^C	متمم A
$A\oplus B$	مجموعه مستقیم A و B
$A+B$	مجموع A و B
$A\times B$	حاصل‌ضرب دکارتی A و B
$I\!N$	مجموعهٔ اعداد طبیعی
$\dim(R)$	بعد حلقهٔ R
z^+	مجموعه اعداد صحیح نامنفی
$I\!R$	مجموعه اعداد حقیقی
$\langle P^K\rangle$	ایده‌آل P به توان K
۱_R	عضو خنثی عمل ضرب حلقه R
$\langle a_۱,a_۲,...,a_n\rangle$	ایده‌آل تولید شده توسط $a_۱$ و $a_۲$ و $\cdots$ و a_n
$Rad_M(N)$	رادیکال N در M
(a,b)	زوج مرتب a و b

$\bigoplus_{i\in I} M_i$	مجموع مستقیم مدول‌های M_i
$Ass(\frac{M}{N})$	ایده‌آل‌های اول وابسته به $\frac{M}{N}$
$\varphi^{-1}(N)$	تصویر معکوس N
$\ker f$	هسته f
$f : A \longrightarrow B$	f تابعی از A به B
$End_D(V)$	حلقه
$Ann_l(M)$	پوچساز چپ M
$\simeq$	یکریخت
$S^{-1}R$	میدان کسرهای R

نام خانوادگی دانشجو: کرمی نام: عبدالرسول

عنوان پایان نامه: مدولهای اول ضعیف شده

استاد راهنما: آقای دکتر احمد خاکساری

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد رشته : ریاضی گرایش : محض (جبر)

دانشگاه : پیام نور—مرکز شیراز دانشکده: علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی : ۸۵/۱۱/۱۸ تعداد صفحه : ۵۶

چکیده:

کلید واژه‌ها: اول ضعیف، سازگار، اول ضعیف کامل، مدول‌های نوتری، پوچساز، ایده‌آل اول

فرض کنیم که R حلقه‌ای دلخواه و M یک Rـمدول چپ باشد. Rـمدول M را، مدول اول ضعیف شده می‌نامیم هر گاه پوچساز هر زیرمدول غیرصفر M، یک ایده‌آل اول حلقه R باشد.

همچنین زیرمدول محض P از M را زیرمدول اول ضعیف شده گوییم اگر برای هر r و s متعلق به R و زیرمدول K از M چنانچه $rRsK \subseteq P$ بتوان نتیجه گرفت که $rK \subseteq P$ یا $sK \subseteq P$.

در فصل ۱: حقایقی درباره مدول‌های اول ضعیف شده بیان کرده و مدول‌ها و حلقه‌های سازگار معرفی می‌شوند.

در فصل ۲: چندین شرط معادل برای یک مدول که به طور کامل (تقریباً کامل) مدول اول ضعیف شده است ارائه می‌شود و مطالعه مختصری از حلقه‌ها، بر هر مدول که شامل زیرمدول اول ضعیف شده باشد و سرانجام مطالبی مفید درباره مدول‌های اول ضعیف بیان کرده‌ایم.

فهرست

فصل ۱

مقدمه

۱ مقدمه

۱.۱ مقدمه

در این پایان‌نامه حلقه R یکدار و شرکت‌پذیر است.

تعریف ۱.۱.۱: اگر R یک حلقه باشد M را یک Rـمدول چپ گوییم هر گاه $(M,+)$ گروه آبلی باشد و تابعی چون $\begin{array}{l} \cdot : R\times M \longrightarrow M \\ (r,m) \dashrightarrow rm \end{array}$ باشد که خواص زیر را دارا باشد.

برای هر $a,b\in M$ و $r_1,r_2\in R$

۱) $r_1(a+b)=r_1a+r_1b$

۲) $(r_1+r_2)a=r_1a+r_2a$

۳) $r_1(r_2a)=(r_1r_2)a$

Rـمدول M را یکانی گوییم هر گاه برای هر $a\in M$ داشته باشیم $\mathbf{1}_R.a=a$.

اگر R حلقه تقسیم باشد آنگاه Rـمدول یکانی M یک فضای برداری است.

تعریف ۲.۱.۱: فرض کنید که M یک Rـمدول باشد و $\phi\neq N\subseteq M$. اگر به ازای هر دو عضو N مانند y و x و هر عضو R مانند r، $x+y\in N$ و $rx\in N$ باشد، آنگاه N زیرمدول M است و می‌نویسم $N\leq M$ به عبارت دیگر هر زیرمجموعهٔ غیرتهی از Rـمدول M مانند N، زیرمدول M است هر گاه N نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته باشد.

تعریف ۳.۱.۱: اگر R یک حلقه باشد و $\phi\neq I\subseteq R$ چنانچه

$$\forall x,y\in I \quad , \quad \forall r\in R \ : \ x-y\in I \quad , \quad rx\in I$$

آنگاه I ایده‌آل چپ حلقه R است و می‌نویسیم $I\triangle_l R$ و اگر $x-y\in I$ و $rx\in I$ آنگاه I ایده‌آل راست حلقه R است و می‌نویسیم $I\triangle_r R$. و اگر $I\triangle_l R$ و $I\triangle_r R$ باشد I ایده‌آل حلقهٔ R است و می‌نویسیم $I\triangle R$.

تعریف ۴.۱.۱: اگر M یک Rـمدول چپ و $N\leq M$ باشد، آنگاه $\frac{M}{N}$ یک Rـمدول می‌باشد که جمع آن به صورت $(m+N)+(m'+N)=(m+m')+N$ و ضرب اسکالر آن به صورت $r(m+N):=rm+N$ تعریف می‌شود که به آن خارج‌قسمتی می‌گوییم.

تعریف ۵.۱.۱: اگر M یک Rـمدول چپ باشد و $N\leq M$ آنگاه

$$(N:_R M)=\{r\in R|rM\subset N\}=\{r\in R|\forall m\in M: rm\in N\}$$

را ایده‌آل حاصل تقسیم M بر N گویند.

حالتهای خاص: الف) اگر M را زیرمدول خودش در نظر بگیریم یعنی $M\leq M$ آنگاه

$$(M:_R M)=\{r\in R|rM\subseteq M\}=\{r\in R|\forall m: rm\in M\}=R$$

ب) اگر $M\leq (0)$ آنگاه

$$Ann_R(M)=(\circ:_R M)=\{r\in R|rM\subseteq(\circ)\}=\{r\in R|\forall m\in M: rm=\circ\}$$

که در آن $Ann_R(M)$ پوچ‌ساز M گویند.

ج) اگر $a\in M$ آنگاه

$$Ann_R(a)=(\circ:a)=\{r\in R|ra=\circ\}$$

از (ب) و (ج) نتیجه می‌گیریم که $Ann_R(M)=\bigcap_{a\in M}Ann_R(a)$.

لم ۶.۱.۱:اگر M یک Rـمدول چپ باشد و $N\leq M$ آنگاه $(N:_R M)=Ann_R(\frac{M}{N})$.

اثبات: از طریق عضوگیری

$$\begin{aligned}
r\in Ann_R(\frac{M}{N}) &\iff r(\frac{M}{N})=N \iff \forall m\in M: r(\frac{m}{N})=N\\
&\iff \forall m\in M: rm+N=N \iff \forall m\in M: rm\in N\\
&\iff rM\subseteq N \iff r\in(N:M)
\end{aligned}$$

لذا $(N :_R M) = Ann_R(\frac{M}{N})$.

تعریف ۷.۱.۱: اگر M یک Rـمدول چپ باشد ترشن (تاب) M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T(M) = \{m \in M | \exists r \in R,\ s.t\ r \neq \circ,\ rm = \circ\}$$

نکته: اگر R یک حلقه یکدار باشد. موارد زیر را داریم (M یک Rـمدول چپ)

۱) $Ann_R(a) \triangle R, \forall a \in M$

۲) $Ann_R(M) \triangle R$

۳) $(N :_R M) \triangle R, \quad (\forall N \leq M)$

۴) $Ann(M) \subseteq Ann(a),\ \forall a \in M$

۵) $N_۱ \subseteq N_۲ \Longrightarrow (N_۱ : M) \subseteq (N_۲ : M), \forall N_۱, N_۲ \leq M$ (حالت خاص $(\mathbf{0} : M) \subseteq (N : M)$)

٦) $T(M) \leq M$

تعریف ۸.۱.۱: یک Rـمدول M را بدون تاب (ترشن فری) گوییم اگر $T(M) = \circ$ ترشن یا تابدار گوییم اگر $T(M) = M$.

نکته: هر مدول آزاد، روی یک دامنه صحیح یکدار دلخواه بدون تاب است.

برهان: به مرجع [۷] مراجعه کنید.

تعریف ۹.۱.۱: اگر M یک Rـمدول چپ باشد و $I \triangle R$ آنگاه

$$Ann_M(I) = (\circ :_M I) = \{m \in M | Im = \circ\} = \{m \in M | \forall a \in I : am = \circ\}$$

تعریف ۱۰.۱.۱: ایده‌آل P از حلقه R اول گوییم هر گاه $P \neq R$ و

$$\forall A \triangle R, B \triangle R, AB \subseteq P \Longrightarrow A \subseteq P \text{ یا } B \subseteq P$$

مثال ۱۱.۱.۱: ایده‌آل صفر در یک حوزه صحیح ایده‌آلی اول است.

مثال ۱۲.۱.۱: اگر $p \in Z$ عددی اول باشد آنگاه ایده‌آل $\langle p \rangle$ در Z اول است.

قضیه ۱.۱.۱۳: اگر R حلقه‌ای جابجایی یکدار باشد P ایده‌آل اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{P}$ حوزه صحیح باشد.

برهان: [۷] فصل ۳، قضیه ۲.۱۶.

تعریف ۱.۱.۱۴: ایده‌آل M از حلقهٔ R را ماکسیمال گوییم اگر $M \neq R$،

$$\forall I \triangle R, M \subseteq I \subseteq R \Longrightarrow I = M \text{ یا } I = R$$

مثال ۱.۱.۱۵: در حلقهٔ اعداد صحیح $\langle ۳ \rangle$ یک ایده‌آل ماکسیمال است.

مثال ۱.۱.۱۶: در حلقه $\mathbb{Z}$ ایده‌آل $\langle ۴ \rangle$ ایده‌آل ماکسیمال نیست، زیرا $\langle ۴ \rangle \subseteq \langle ۲ \rangle \subseteq \mathbb{Z}$ است ولی $\langle ۲ \rangle \neq \mathbb{Z}$ و $\langle ۴ \rangle \neq \langle ۲ \rangle$.

قضیه ۱.۱.۱۷: اگر R حلقه‌ای تعویض‌پذیر یکدار باشد هر ایده‌آل ماکسیمال R اول است.

برهان: [۷] فصل ۳، قضیه ۲.۱۹.

قضیه ۱.۱.۱۸: الف) اگر R حلقه جابجایی و یکدار باشد آنگاه ایده‌آل M در R ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{M}$ میدان باشد.

ب) اگر R حلقه‌ای جابجایی باشد ایده‌آل M در R ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{M}$ حلقه بخشی باشد.

برهان: [۷] فصل ۳، قضیه ۲.۲۰.

قضیه ۱.۱.۱۹: اگر R یک حلقه دلخواه و P یک ایده‌آل از R باشد که $P \neq R$ و

$$\forall a, b \in R, ab \in P \Longrightarrow a \in P \text{ یا } b \in P$$

آنگاه P ایده‌آل اول R است.

برهان: فرض کنید A و B ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند به طوری که $AB \subseteq P$ و $A \not\subseteq P$ باشد در این صورت عضوی از A مانند a هست به طوری که $a \notin P$ حال زیرمجموعه aB رادر نظر گرفته، داریم: $aB \subseteq AB \subseteq P$. لذا برای هر $b \in B$ داریم $ab \in P$ حال طبق فرض چون $a \notin P$ لذا $b \in P$ چون b دلخواه بود پس $B \subseteq P$.

قضیه ۲۰.۱.۱: مدول بدون تاب با تولید متناهی M روی دامنه ایده‌آل اصلی R آزاد است.

برهان: [۷] فصل ۴، قضیه ۵.۶.

قضیه ۲۱.۱.۱: ایده‌آل $P \neq R$ در حلقهٔ تعویض‌پذیر R اول است اگر و تنها اگر $R - P$ مجموعه‌ای ضربی باشد. (زیرمجموعه S از R را ضربی گوییم هر گاه $\circ \notin S$ و اگر $ab \in S$ باشد آنگاه $ab \in S$ می‌باشد.)

برهان: [۷] فصل ۸، قضیه ۱.۲.

تعریف ۲۲.۱.۱: اگر $I \triangle R$ و R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد آنگاه

$$\sqrt{I} = RadI = \bigcap_{I \subseteq P \triangle_{prim} R} P = \{x \in R | \exists n \in I\!N : x^n \in I\}$$

در نتیجه اگر $I = \circ$ باشد آنگاه

$$\sqrt{\circ} = \{x \in R | \exists n \in I\!N ; \ x^n \in I\}$$

تعریف ۲۳.۱.۱: اگر R یک حلقه جابجایی باشد رادیکال اول R به صورت $N(R) = RadR = \bigcap_{P \triangle_{prim} R} P$ تعریف می‌شود. یادآوری می کنیم که چون هر ایده‌آل ماکسیمال اول است پس رادیکال جیکوبسون R رادیکال اول R را در برمی‌گیرد یعنی $RadR \subseteq J(R)$.

تعریف ۲۴.۱.۱: ایده‌ال P در حلقه تعویض‌پذیر R را اولیه گوییم هر گاه به ازای هر a و b از حلقه R

$$ab \in P \Longrightarrow a \in P \text{ یا } \exists n \in I\!N, b^n \in P$$

مثال ۲۵.۱.۱: هر ایده‌آل اولی اولیه است.

توجه: ایده‌آل‌های اولیه لزوماً اول نیستند.

مثال ۲۶.۱.۱: در هر دامنه صحیح، ایده‌آل صفر اول است در نتیجه رادیکال صفر روی دامنه صحیح R مساوی صفر است.

$$\sqrt{\circ} = \bigcap_{\circ \subseteq P \triangle_{prim} R} P = \circ$$

مثال ۲۷.۱.۱: در $\mathbb{Z}$ رادیکال‌های مربوط به ایده‌آل $\langle ۴ \rangle$ و $\langle ۱۲ \rangle$ و $\langle ۳۲ \rangle$ عبارتند از $\sqrt{\langle ۴ \rangle} = \langle ۲ \rangle$.

$$\sqrt{\langle ۳۲ \rangle} = \bigcap_{\langle ۳۲ \rangle \subseteq P \triangle_{prim} R}^{P} = \langle ۲ \rangle$$

$$\sqrt{\langle ۱۲ \rangle} = \bigcap_{\langle ۱۲ \rangle \subseteq P \triangle_{prim} R} = \langle ۲ \rangle \cap \langle ۳ \rangle = \langle ٦ \rangle$$

مثال ۲۸.۱.۱: ایده‌آل اولیه ممکن است اول نباشد. اگر $P \in \mathbb{Z}$ اول باشد و $n \geq ۲$ آنگاه $\langle P^n \rangle$ یک ایده‌آل اولیه در $\mathbb{Z}$ است ولی ایده‌آل اول نیست.

توجه: به طور کلی توان nام یک ایده‌آل اول مانند P لزوماً اولیه نیست. (در حلقه $\mathbb{Z}$ هر ایده‌آل اولیه توانی از یک ایده‌آل اول است).

مثال ۲۹.۱.۱: ایده‌آل اولیه لزوماً توانی از یک ایده‌آل اول نیست.

اگر F میدان باشد چون $\frac{F[x,y]}{\langle x,y \rangle} \approx F$ پس $\langle x,y \rangle$ در $F[x,y]$ ماکسیمال است لذا ایده‌آل $\langle x,y \rangle$ اول است و داریم

$$\langle x,y \rangle^{۲} = \langle x^{۲}, xy, y^{۲} \rangle \subset \langle x^{۲}, y \rangle \subset \langle x,y \rangle$$

$\langle x^{۲}, y \rangle$ ایده‌آل اولیه است و $\langle x,y \rangle$ تنها ایده‌آل اول شامل $\langle x^{۲}, y \rangle$ است پس ایده‌آل $\langle x^{۲}, y \rangle$ اولیه است ولی توانی از یک ایده‌آل اول نیست.

مثال ۱.۱.۳۰: ایده‌آل $\langle ۴ \rangle$ در $\mathbb{Z}$ اولیه است ولی اول نیست زیرا

$$۲ \times ۲ = ۴ \in \langle ۴ \rangle \Longrightarrow ۲ \notin \langle ۴ \rangle, \quad ۲ \notin \langle ۴ \rangle$$

نکته: تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال اولیه هستند و توان‌های ماکسیمال نیز اولیه‌اند.

قضیه ۱.۱.۳۱: رادیکال هر ایده‌آل اولیه یک ایده‌آل اول است.

برهان: [۷] فصل ۸، قضیه ۹.۲.

تعریف ۱.۱.۳۲: اگر I ایده‌آلی اولیه باشد و $\sqrt{I} = P$ آنگاه I یک ایده‌آل P_اولیه گوییم.

مثال ۱.۱.۳۳: ایده‌آل $۴\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Z}$ اولیه است و داریم $\sqrt{۴\mathbb{Z}} = ۲\mathbb{Z}$ لذا $۴\mathbb{Z}$ یک ایده‌آل $۲\mathbb{Z}$_اولیه است.

قضیه ۱.۱.۳۴: اگر $Q_۱$ و $Q_۲$ و $\cdots$ و Q_n ایده‌آل‌های اولیه‌ای در حلقه تعویض‌پذیر R باشند و همهٔ آنها P_اولیه باشند یعنی $\forall ۱ \leq i \leq n : \sqrt{Q_i} = P$ آنگاه اشتراک آنها نیز P_اولیه است $\sqrt{\bigcap_{i=۱}^{n} Q_i} = P$.

برهان: [۷] فصل ۸، قضیه ۱۱.۲.

توجه: قضیه فوق برای تعداد نامتناهی درست نیست.

مثال ۱.۱.۳۵: در حلقه $\mathbb{Z}$ اگر ایده‌آل‌های $Q_i = \langle ۲^i \rangle$ را در نظر بگیریم

$$\forall i \quad \sqrt{Q_i} = \sqrt{\langle ۲^i \rangle} = \langle ۲ \rangle$$

پس Q_iها به ازای هر i همگی $\langle ۲ \rangle$_اولیه هستند.

ولی اشتراک آنها $\langle ۲ \rangle$_اولیه نیست.

$$\left.\begin{array}{l} \cap Q_i = \cap \langle ۲^i \rangle \\ \langle ۲ \rangle \supseteq \langle ۲^۲ \rangle \supseteq \langle ۲^۳ \rangle \supseteq \langle ۲^۴ \rangle \supseteq \dots \end{array}\right\} \Longrightarrow \sqrt{\cap Q_i} = \sqrt{(۰)} = ۰$$

۲.۱ زیرمدول‌های اول و اولیه

تعریف ۱.۲.۱: اگر M یک R_مدول چپ و N زیرمدول M باشد در این صورت N را یک زیرمدول اولیه از M گوییم هر گاه $M \neq N$ و برای هر $r \in R$ و $m \in M$ از $rm \in N$ نتیجه شود که $m \in N$ یا عدد طبیعی n موجود باشد به طوری که $r^nM \subseteq N$ به عبارت دیگر N یک زیرمدول اولیه M است هر گاه $N \neq M$ و

$$\forall r \in R, m \in M, rm \in N \Longrightarrow m \in N \text{ یا } r^n \in (N : M)$$

و چون $(N : M)$ ایده‌آل R است پس می‌توان به طور معادل تعریف کرد

$$\forall r \in R, m \in M, rm \in N \Longrightarrow m \in N \text{ یا } r \in \sqrt{(N : M)}$$

تعریف ۲.۲.۱: زیرمدول N از M را اول گوییم هر گاه برای هر $A \triangle R$ و $K \leq M$ اگر $AK \subseteq N$ نتیجه بگیریم $K \subseteq N$ یا $AM \subseteq N$ یا به عبارت دیگر:

اگر M یک R_مدول چپ باشد و $N \leq M$ باشد N را یک زیرمدول اول M گوییم اگر $M \neq N$ و برای هر $r \in R$ و هر $m \in M$ از $rm \in N$ نتیجه شود $m \in N$ یا $rM \subseteq N$.

نکته: زیرمدول N از M را یک زیرمدول اول گوییم اگر $M \neq N$ و

$$\forall r \in R, m \in M, rm \in N \Longrightarrow m \in N \text{ یا } r \in (N : M)$$

نکته: زیرمدول N از M را یک زیرمدول اول گوییم اگر $N \neq M$

$$\forall r \in R, m \in M, rm \in N \Longrightarrow m \in N \text{ یا } r \in Ann_R(\frac{M}{N})$$

تعریف ۳.۲.۱: زیرمدول P_اولیه

اگر N زیرمدول اولیه M باشد و $P = \sqrt{(N : M)}$ آنگاه P ایده‌آل اول R خواهد بود و N را یک زیرمدول P_اولیه می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱: M را یک مدول اولیه گوییم اگر زیرمدول (0) در آن اولیه باشد. برای هر زیرمدول N از R_مدول M، رادیکال N، اشتراک تمام زیرمدول‌های اول M است که شامل N هستند و آن را با $Rad_M(N)$ نمایش می‌دهیم و K $\bigcap_{N\subseteq K\leq M}$ $Rad_M(N) =$ (K اول). همچنین برای جلوگیری از ابهام، هر گاه که N مشمول هیچ زیرمدول اولی نباشد تعریف می‌کنیم $Rad_M(N) = M$.

تذکر ۵.۲.۱: حلقه R را به عنوان R_مدول در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم Q برای حلقه R ایده‌آل اولیه‌ای باشد آنگاه Q برای R_مدول R یک زیرمدول اولیه است.

قضیه ۶.۲.۱: اگر R حلقه‌ای جابجایی و یکدار باشد و N زیرمدول اولیه‌ای از R_مدول M باشد در این صورت $Q_N = (N : M) = \{r \in R | rM \subseteq N\}$ یک ایده‌آل اولیه از حلقه R است.

برهان: چون N زیرمدول اولیه‌ای از R_مدول M بنابراین $N \neq M$ و چون $N \leq M$ است پس $M \not\subseteq N$ پس $1_R M = M \not\subseteq N$ بنابراین $1_R \notin (N : M)$ پس $Q_N = (N : M) \neq R$ و شرط اول برقرار است.

حال اگر برای $r, s \in R$ داشته باشیم $rs \in (N : M)$ باید نتیجه بگیریم که $s \in (N : M)$ یا $r^n \in (N : M)$ در صورتی که $s \in (N : M)$ باشد حکم ثابت است حال فرض می‌کنیم که $s \notin (N : M)$ بنابراین داریم $sM \not\subseteq N$ در نتیجه عضو $m \in M$ هست به طوری که $sm \notin N$ از طرفی طبق فرض داریم

$$rs \in (N : M) \Longrightarrow rsM \subseteq N \Longrightarrow rsm \in N$$

پس چون $N \leq M$ اولیه است و $sm \notin N$ پس عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $r^n M \subseteq N$ لذا $r^n \in (N : M)$ پس حکم ثابت می‌شود.

بنابراین $(N : M)$ یک ایده‌آل اولیه در R است.

توجه: در برهان فوق برای اثبات اینکه $(N : M) \neq R$ است می‌توان از برهان خلف نیز استفاده کرد یعنی فرض کنیم که $(N : M) = R$ پس $1_R \in R = (N : M)$ پس $1_R M \subseteq N$ یعنی $M \subseteq N$ و از طرفی $N \leq M$ پس $N = M$ در حالی که N زیرمدول محض M بوده است.

واضح است که هر زیرمدول اول از یک R_مدول، یک زیرمدول اولیه است.