بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

گرایش (جبر)

عنوان :

گروههای فازی پوچ توان

از:

مریم نوبر

استاد راهنما:

دکتر منصور هاشمی

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

مقدس ترین واژه ها در لغت نامه دلم

مادر مهربانم که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت آن می دانم .

پدر ، مهربانی مشفق ، بردبار و حامی

همسرم که نشانه لطف الهی در زندگی من است .

تقدیر و تشکر...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بیکران خود ، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، آقای دکتر منصور هاشمی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از محضر اساتید بزرگوار و ارجمند آقای دکتر حبیب اللّه انصاری و آقای دکتر احمد عباسی بدلیل زحمتشان در داوری این پایان نامه کمال تشکر و سپاس را دارم.

در پایان والاترین سپاس را به محضر خداوندگاران مهر و مهربانی ، پدر و مادر عزیزم که همواره مرا یاری کردند و همسر عزیزم و خانواده محترم ایشان که مشوقم بودند و مرا درک کردند، ابراز می دارم.

فهرست مطالب

چکیده:

گروههای فازی پوچ توان

مریم نوبر

در این رساله، هدف ما بررسی گروههای فازی پوچ توان است. برای این منظور، ابتدا جابجاگر، دو زیرمجموعه‌ی فازی از یک گروه را تعریف می‌کنیم و خواص آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس با استفاده از سری مرکزی کاهشی در یک زیرگروه فازی، به بررسی زیرگروههای نرمال و گروههای فازی پوچ توان می‌پردازیم.

کلمات کلیدی:
گروه فازی پذیرفتنی، گروه فازی جابجاگر، تکیه‌گاه، رأس، گروه فازی پوچ توان، (p, q) - زیرگروهها، زیرگروههای فازی نرمال

Abstract:

Nilpotent Fuzzy Groups

Maryam Nobar

In this thesis, our aim is study " Nilpotent Fuzzy Groups " . To achieve this, we define the commutator of two fuzzy subsets of a group and study its properties. Using descending central chain of a fuzzy subgroups , we study normal fuzzy subgroups and nilpotent fuzzy group .

Key words:
Admissible fuzzy group , Commutator fuzzy group, Support , Tip , Nilpotent fuzzy group , (p , q) - sub groups , Normal fuzzy subgroups .

مقدمه

همانطور که می‌دانید براساس مبانی و اصول علم ، همه چیز با یک قاعده ثابت می‌شود که به موجب این قاعده آن چیز یا درست یا غلط است. گر چه ممکن بود در مورد درستی یا نادرستی چیزی تردید داشته باشند لیکن در مورد یک چیز هیچ تردید نداشتند و آن اینکه هر پدیده‌ای یا درست است یا نادرست. در این زمینه مثالهای فراوانی را می‌توان ارائه داد: مثلاً هر کسی می‌تواند بگوید که اتمها ارتعاش می کنند یا نمی کنند، یا اینکه علف سبز است و قرمز نیست و خیلی چیزهای دیگر. به عبارت دیگر در یک پاسخ دلخواه نظیر سبز بودن یا قرمز بودن علف که مشخص کننده جواب صحیح یا غلط است حالت میانه‌ای مطرح نیست. اما این مثالها را که در آنها برای هر مسأله‌ای تنها یک جواب آری یا نه صادق است، نباید به همه چیز تعمیم داد. اشتباه علم، تعمیم این موضوع به تمام پدیده‌ها بود. در منطق و ریاضیات نیز همین استدلال حاکم بوده است هر چیزی یا درست است یا غلط، بر این اساس، موضوعات منطقی و ریاضی نیز کلاً درست هستند یا کلاً نادرست، سفید یا سیاه، یک یا صفر.

ریاضیات فازی یک فرا مجموعه از منطق بولی است که بر مفهوم درستی نسبی، دلالت می کند. منطق کلاسیک هر چیزی را براساس یک سیستم دوتایی نشان می‌دهد (درست یا غلط ،۰ یا ۱، سیاه یا سفید) ولی منطق فازی درستی هر چیزی را با یک عدد که مقدار آن بین صفر و یک است نشان می‌دهد. مثلاً اگر رنگ سیاه را عدد صفر و رنگ سفید را عدد ۱ نشان دهیم، آنگاه رنگ خاکستری عددی نزدیک به صفر خواهد بود. در سال ۱۹۶۵ دکتر لطفی‌زاده نظریه سیستمهای فازی را معرفی کرد. در فضایی که دانشمندان علوم مهندسی به دنبال روش ریاضی برای شکست دادن مسایل دشوارتر بودند، نظریه فازی به گونه‌ای دیگر از مدلسازی، اقدام کرد.

در ۱۹۷۴، ابراهیم ممدانی از دانشگاه لندن،برای نخستین بار از منطق فازی در کنترل یک موتور بخار ساده استفاده کرد. اولین کاربرد صنعتی منطق فازی، ۶ سال بعد صورت گرفت. در ۱۹۸۰ اسمیت از دانمارک برای نخستین بار از منطق فازی برای کنترل کوره سیمان استفاده کرد. در دهه ۱۹۸۰ موسسه « فوجی الکتریک » منطق فازی را برای کنترل فرایند تصفیه آب بکار گرفت. متعاقب آن، شرکت « هیتاچی » یک سیستم کنترل خودکار قطار را بر مبنای منطق فازی توسعه داد.

فازی در کارخانه‌های بزرگ نظیر ذوب آهن، صنایع خودرو سازی، شیشه سازی، تصفیه آب، واحدهای تولید انرژی و در واحدهای تولیدی کوچک نظیر کارخانه‌های ساخت ماشین لباسشویی و در وسائل الکترونیکی مانند ویدئو و ... کاربردهای گوناگونی پیدا کرده است.

کاربرد منطق فازی در صنایع خودروسازی مربوط به تنظیم و کنترل ترمزهای ABS، سیستم ترمز لغزش و گیربکس اتوماتیک برای خودروها (در کارخانه نیسان)، گیربکس اتوماتیک برای خودروها (در شرکت سوبارو)، تشخیص عیب در فرایند تولید، محاوره بین ماشین و انسان، کنترل کیفیت و ... بوده است.

این پایان نامه شامل ۳ فصل می‌باشد. در فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی موردنیاز است. فصل دوم شامل چهار بخش است که در بخش اول جابجاگرهای گروههای فازی، در بخش دوم سری مرکزی کاهشی، در بخش سوم گروههای فازی پوچ توان و در بخش آخر این فصل زیرگروههای فازی گروههای پوچ توان و خاصیتهای آنها را بررسی می کنیم. فصل سوم به بررسی t - نرمها و تراز زیرمجموعه‌های فازی اختصاص دارد.

فصل ۱

پیش نیاز

در این فصل به بررسی مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های بعد می‌پردازیم.

۱ - ۱ شبکه‌های توزیع پذیر

تعریف ۱ - ۱ - ۱ . مجموعه ناتهی L که دو عمل دو تایی $\vee$ (الحاق) و $\wedge$ (تماس) روی آن تعریف شده‌اند را در نظر می‌گیریم. در این صورت L را همراه با اعمال $\vee$ و $\wedge$ (می‌نویسیم $(L, \wedge, \vee)$) یک شبکه گوییم ، هر گاه به ازای هر $a, b, c \in L$ داشته باشیم:

(الف) $(L, \wedge, \vee)$ تعویض پذیر باشد. یعنی $a \vee b = b \vee a$ و $a \wedge b = b \wedge a$.

(ب) $(L, \wedge, \vee)$ شرکتپذیر باشد. یعنی

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

(ج) قوانین جذبی در $(L, \wedge, \vee)$ برقرار باشد. یعنی $a \vee (a \wedge b) = a$ و $a \wedge (a \vee b) = a$.

در این صورت شبکه L را با $(L, \wedge, \vee)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱ - ۱ - ۲ . گوییم شبکه L دارای کران پایین ۰ است، هر گاه به ازای هر $x \in L$ داشته باشیم $0 \preceq x$.
همچنین گوییم شبکه L دارای کران بالای ۱ است، هرگاه $\forall x \in L, x \preceq 1$. سرانجام شبکه L را کراندار نامیم هرگاه دارای کران بالا و پایین باشد.

با توجه به تعریف در یک شبکه کراندار به ازای هر $a \in L$ داریم:

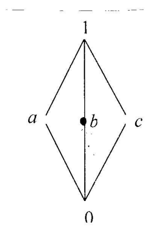
$$a \vee 1 = 1, a \wedge 1 = a, a \vee 0 = a, a \wedge 0 = 0$$

تعریف ۱ - ۱ - ۳ . شبکه L را توزیع پذیر گوییم، هرگاه به ازای هر $a, b, c \in L$ داشته باشیم:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

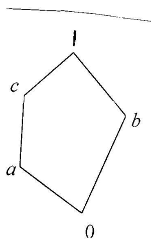
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

مثال ۱ - ۱ - ۴ . (۱)شبکه‌های زیر توزیع پذیر نیستند (دراین شبکه‌ها اعمال $\vee$ به معنی sup و $\wedge$ به معنی inf است.)



زیرا $(a\vee b)\wedge(a\vee c)=۱\wedge ۱=۱$ و $a\vee(b\wedge c)=a\vee ۰=a$

در این صورت $a\vee(b\wedge c)\neq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$



زیرا $a\vee(b\wedge c)=a\vee ۰=a$ و $(a\vee b)\wedge(a\vee c)=۱\wedge c=c$ یعنی توزیع پذیر نیست.

(۲) شبکه $(P(X),\cap,\cup)$ توزیع پذیر است زیرا در این شبکه اعمال $\vee$ به معنی $\cup$ و $\wedge$ به معنی $\cap$ است و خاصیت توزیع پذیری برای $\cup$ و $\cap$ برقرار است.

$$a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c),a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c)$$

تعریف ۱-۱-۵ . شبکه کراندار L را در نظر می‌گیریم و $a\in L$. در این صورت b را متمم a می‌نامیم هرگاه $a\vee b=۱$ و $a\wedge b=۰$. همچنین L را کامل می‌گوییم، هر گاه هر عضو L دارای متمم باشد.

تعریف ۱-۱-۶ . شبکه $(L,\wedge,\vee)$ و $\phi\neq M\subseteq L$ را در نظر می‌گیریم. گوییم M زیرشبکه L است هرگاه M همراه با تحدید اعمال $\wedge$ و $\vee$ یک شبکه باشد.

مثال ۱-۱-۷ . (۱) شبکه $(\mathbb{R},\leq)$ را در نظر بگیرید. (نماد $\leqslant$ به معنی کوچکتر یا مساوی است که اعمال $\vee$ به معنی max و $\wedge$ به معنی min است.) در این صورت $(\mathbb{Z},\leq)$ ، $(\mathbb{N},\leq)$ و $(X,\leq)$ که $X=\{۱,۲,...,n\}$ زیرشبکه آن است.

(۲) به ازای $n\in\mathbb{N}$ قرار دهید $D_n=\{k\in\mathbb{N},k\mid n\}$ (عمل | به معنی عاد کردن است.) دراین

صورت $(D_n, |)$ زیرشبکه $(\mathbb{N}, |)$ است ولی $(X, |)$ که $X = \{1, 2, ..., n\}$ زیرشبکه $(\mathbb{N}, |)$ نیست زیرا اگر n را برابر ۵ در نظر بگیریم آنگاه

$$5 \wedge 4 = 1, 5 \vee 4 = 20$$

که ۲۰ در X نیست در این صورت X خود یک شبکه نمی‌باشد بنابراین زیرشبکه نیست. (اعمال $\vee$ به معنی کوچکترین مضرب مشترک و $\wedge$ به معنی بزرگترین مقسوم علیه مشترک است.)

(۳) شبکه D_m زیرشبکه $(\mathbb{N}, \leq)$ نیست.

(۴) قرار می‌دهیم $X = \{1, 2, 3\}$ در این صورت $M = \{\Phi, \{1\}, \{2\}\}$ زیرشبکه $(P(X), \cap, \cup)$ نیست زیرا

$$\{1\} \wedge \{2\} = \Phi, \{1\} \vee \{2\} = \{1, 2\}$$

در اینجا اعمال $\vee$ به معنی $\cup$ و $\wedge$ به معنی $\cap$ است.

۱-۲ گروه جابجاگر

تعریف ۱-۲-۱ . در یک گروه G ، جابجاگر دو عضو a و b از G ، عضو $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ از G است. اگر $A, B \subseteq G$ آنگاه زیرگروه جابجاگر A و B ، که با نماد $[A, B]$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[A, B] = \{[a, b] \mid a \in A,\ b \in B\}$$

به آسانی ثابت می‌شود که

$$[a, b]^{-1} = [b, a] \qquad (1)$$

$$[ab, c] = [a, c]^b\ [b, c] \qquad (2)$$

که در آن x^y به معنی $y^{-1}xy$ است.

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)] \qquad (3)$$

که $a, b, c \in G$ و f درونریختی دلخواهی از G است.

همچنین $G' = [G, G]$ را گروه جابجاگر G نامیم.

۱-۳ زیرمجموعه‌های فازی

تعریف ۱-۳-۱ .فرض کنیم S یک مجموعه دلخواه باشد. در این صورت تابع $\lambda : S \to [0,1]$ را یک زیرمجموعه فازی S می‌نامیم .

اگر λ, μ زیرمجموعه‌های فازیS باشند تساوی $\mu = \lambda$ وشمول $\lambda \subseteq \mu$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

الف) λ را زیرمجموعه μ نامیم هرگاه به ازای هر $x \in X$ ، $\lambda(x) \leqslant \mu(x)$

ب) $\mu = \lambda$ هرگاه به ازای هر $x \in X$، $\lambda(x) = \mu(x)$

تعریف ۱-۳-۲ . مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های فازی X را مجموعه توانی فازی X می‌نامیم و به صورت $FP(X)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۳-۳ . فرض کنید $X = [0, 2000]$. زیرمجموعه فازی A از X که نشان دهنده‌ی ویژگی « نزدیک به ۱۰۰۰ » می‌باشد را می‌توان توسط تابع زیر تعریف کرد:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x}{1000} & x \leqslant 1000 \\ \frac{2000-x}{1000} & x > 1000 \end{cases}$$

در این مثال $\mu_A(200) = \mu_A(1800) = 0/2$. یعنی اعداد ۲۰۰ و ۱۸۰۰ هر دو با درجه‌ی ۰/۲، عضو مجموعه‌ی A هستند. به عبارت دیگر با درجه‌ی ۰/۲ ویژگی « نزدیک به ۱۰۰۰ » را دارا می‌باشند.

تعریف ۱-۳-۴ . متمم فازی μ' از $\mu \in FP(X)$ را چنان تعریف می‌کنیم که به ازای هر $x \in X$، $\mu'(x) = 1 - \mu(x)$.

تعریف ۱-۳-۵ . فرض می‌کنیم $Y \subseteq X$ و $a \in [0,1]$. $a_Y \in FP(X)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_Y(x) = \begin{cases} a & x \in Y \\ 0 & x \in X \setminus Y \end{cases}$$

در حالت خاص، اگر $Y = \{y\}$ آنگاه $a_{\{Y\}}$ را نقطه فازی می‌گوییم و گاهی با نماد y_a نشان می‌دهیم و χ_Y تابع مشخصه Y می‌باشد.

تعریف ۱-۳-۶ . فرض کنیم λ یک زیرمجموعه‌ی فازی باشد. در این صورت تکیه‌گاه λ که با $supp(\lambda)$ نشان می‌دهیم به صورت $\{x|x \in S, \lambda(x) > 0\}$ تعریف می‌شود.

واضح است که $supp(\lambda) \subseteq \lambda^{-1}(0,1]$.

تعریف ۱-۳-۷ . فرض کنیم $f : S \to T$ یک تابع و λ ، μ به ترتیب زیرمجموعه‌های فازی S و T باشند. در این صورت تصویر $f(\lambda)$ و تصویر معکوس $f^{-1}(\mu)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall y \in T; \quad f(\lambda)(y) = \begin{cases} sup\{\lambda(x); (x) = y\} & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

$$f^{-1}(\mu)(x) = \mu(f(x))$$

واضح است که $f(\lambda)$ زیرمجموعه‌ی فازی T و $f^{-1}(\mu)$ زیرمجموعه‌ی فازی S می‌باشد.

تعریف ۱-۳-۸ . فرض کنیم G یک گروه و λ و μ دو زیرمجموعه‌ی فازی G باشند، زیرمجموعه فازی $\lambda \circ \mu$ از G به صورت زیر تعریف می‌شود .

$$\lambda \circ \mu(x) = sup_{x=ab} min\{\lambda(a), \mu(b)\}, x \in G.$$

۱-۴ زیرگروههای فازی

تعریف ۱-۴-۱ . زیرمجموعه فازی λ از گروه G، را زیرگروه فازی G نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) $min\{\lambda(a), \lambda(b)\} \leqslant \lambda(ab)$

۲) $\lambda(a^{-1}) = \lambda(a)$

مجموعه همه زیرگروههای فازی G را با $F(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۴-۲ . فرض کنیم λ یک تابع کراندار باشد. در این صورت کوچکترین کران بالای λ را رأس λ نامیم.

بعنوان مثال اگر λ یک زیرگروه فازی G باشد آنگاه داریم

$$\forall x \in G \; ; \; \lambda(e) = \lambda(xx^{-1}) \geqslant min\{\lambda(x), \lambda(x^{-1})\} = \lambda(x)$$

بنابراین $\lambda(e)$ رأس λ است.

توجه ۱-۴-۳ . یک زیرگروه فازی λ از G آبلی است اگر

$$\forall x, y \in G, \lambda(x) > 0, \lambda(y) > 0, xy = yx$$

به طور معادل λ آبلی است اگر $supp(\lambda)$ نیز چنین باشد.

تعریف ۱-۴-۴ . برای هر $\lambda \in FP(G)$ ، کوچکترین زیرگروه فازی G شامل λ که با نماد $[\lambda]$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\lambda](x) = sup\, min\{\sigma(t_1), ..., \sigma(t_n)\} \quad , \quad x = t_1 t_2 ... t_n \in G$$

که

$$\sigma(y) = max\{\lambda(y), \lambda(y^{-1})\} \quad , \quad y \in G$$

زیرگروه فازی $[\lambda]$، زیرگروه فازی تولید شده به وسیله λ گفته می‌شود.

تعریف ۱-۴-۵ . فرض کنیم λ_i خانواده ای از مجموعه فازی باشد و $\lambda, \mu \in F(S)$ در این صورت $\lambda \cap \mu$ ، $\lambda \cup \mu$ ، $\cup_{i\in I}\lambda_i$ ، $\cap_{i\in I}\lambda_i$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱. $(\lambda \cap \mu)(x) = min\{\lambda(x), \mu(x)\}$

۲. $(\lambda \cup \mu)(x) = max\{\lambda(x), \mu(x)\}$

۳. $(\cup_{i\in I}\lambda_i)(x) = sup\{\lambda_i(x) : i \in I\}$

۴. $(\cap_{i\in I}\lambda_i)(x) = inf\{\lambda_i(x) : i \in I\}$

می‌توان نشان داد که $F(S)$، متشکل از تمام زیرمجموعه‌های فازی S، یک شبکه کامل توزیع پذیر است.

توجه ۱-۴-۶ . فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت مجموعه همه زیرگروههای فازی G با اعمال دوتایی اشتراک و اجتماع تشکیل یک زیر شبکه کامل می‌دهد که شامل زیرگروههای G (به عنوان زیر شبکه) می‌باشد.

گزاره ۱-۴-۷ . اگر $f : G \to K$ یک همریختی باشد و λ ، μ به ترتیب زیرگروههای فازی G و K باشند آنگاه $f(\lambda)$ و $f^{-1}(\mu)$ به ترتیب زیرگروههای فازی K و G هستند.

برهان. فرض می کنیم $u, v \in K$.

الف) اگر $u \notin f(G)$ یا $v \notin f(G)$. آنگاه

$$min\,(f(\lambda)(u), f(\lambda)(v)) = \circ \leqslant f(\lambda)(uv)$$

حال فرض می کنیم $u \notin f(G)$ آنگاه $u^{-1} \notin f(G)$ دراین صورت داریم

$$f(\lambda)(u) = \circ = f(\lambda)(u^{-1})$$

ب) فرض می کنیم به ازای $x, y \in G$ ، $u = f(x)\ ,\ v = f(y)$ آنگاه

$$f(\lambda)(uv) = sup\{\lambda(z) : z \in G\ ,\ f(z) = uv\}$$

$$\geqslant sup\{\lambda(xy) : x, y \in G\ ,\ f(x) = u,\ f(y) = v\}$$

(چون λ زیرگروه فازی G است در این صورت $\lambda(xy) \geqslant min\{\lambda(x), \lambda(y)\}$)

$$\geqslant sup\ min\{\lambda(x), \lambda(y) : x, y \in G\ ,\ f(x) = u,\ f(y) = v\}$$

$$= min\{sup\{\lambda(x) : x \in G\ , f(x) = u\}, sup\{\lambda(y) : y \in G\ , f(y) = v\}\}$$

و همچنین داریم

$$(f(\lambda))(u^{-1}) = sup\{\lambda(z) : z \in K\ ,\ f(z) = u^{-1}\}$$

$$= sup\{\lambda(z^{-1}) : z \in K\ ,\ f(z^{-1}) = u\} = (f(\lambda))(u).$$

از این رو $f(\lambda) \in F(K)$ در این صورت $f(\lambda)$ زیرگروه فازی K است .

برای اثبات زیرگروه بودن $f^{-1}(\mu)$؛ فرض می کنیم $x, y \in G$ بنابراین

$$f^{-1}(\mu)(xy) = \mu(f(xy)) = \mu(f(x))(f(y))$$

$$\geqslant min\{\mu(f(x))\ ,\ \mu(f(y))\}$$

$$= min\{f^{-1}(\mu)(x)\ ,\ f^{-1}(\mu)(y)\}.$$

در نتیجه داریم

$$f^{-1}(\mu)(x^{-1}) = \mu(f(x^{-1})) = \mu(f(x)^{-1}) = \mu(f(x)) = f^{-1}(\mu)(x)$$

بنابراین $f^{-1}(\mu) \in F(G)$ و $f^{-1}(\mu)$ زیرگروه فازی G است . $\square$

مثال ۱-۴-۸ . مجموعه $G=\{1,-1,i,-i\}$ با عمل ضرب یک گروه است. تابع μ روی G را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mu(x)=\begin{cases} 1 & x=1 \\ \frac{1}{2} & x=-1 \\ \frac{1}{3} & x=i \text{ یا } x=-i \end{cases}$$

به آسانی بررسی می‌شود که μ یک زیر گروه فازی روی G است.

مثال ۱-۴-۹ . فرض کنیم $G=(\mathbb{R},+)$ و μ به صورت زیر تعریف شود.

$$\mu(x)=\begin{cases} 1 & x=0 \\ 0/7 & x\in\mathbb{Q}-\{0\} \\ 0/3 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$$

آنگاه μ یک زیرگروه فازی روی G است.

مثال ۱-۴-۱۰ . فرض کنیم $G=(\mathbb{Z},+)$ و اینکه $H=\{1,-1\}$ یک گروه ضربی باشد. تابع $f:G\to H$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x \text{ زوج باشد} \\ -1 & x \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

آنگاه f یک همریختی است. حال μ روی G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu(x)=\begin{cases} 1 & x \text{ زوج باشد} \\ \frac{1}{2} & x \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

آنگاه μ یک زیرگروه فازی روی G است زیرا

۱) اگر x زوج و y فرد باشد در این صورت $x+y$ فرد است آنگاه

$$\mu(x)=1,\mu(y)=\frac{1}{2}\Rightarrow\mu(x+y)=\frac{1}{2}=\mu(x)\wedge\mu(y)=1\wedge\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۲) اگر x و y هر دو زوج باشند در این صورت $x+y$ زوج است آنگاه

$$\mu(x)=1,\mu(y)=1\Rightarrow\mu(x+y)=1=\mu(x)\wedge\mu(y)=1\wedge1=1$$

۳) اگر x و y هر دو فرد باشند در این صورت $x+y$ زوج است آنگاه

$$\mu(x) = \frac{1}{2}, \mu(y) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(x+y) = 1 > \mu(x) \wedge \mu(y) = \frac{1}{2}$$

دراین صورت $\mu(x+y) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y)$.

و داریم:

$$f(\mu)(1) = \vee\{\mu(x) | x \in f^{-1}(1)\}$$

$$= \vee\{\mu(x) | f(x) = 1\}$$

$$= 1$$

به طور مشابه $f(\mu)(-1) = \frac{1}{2}$ بنابراین $f(\mu)$ یک زیرگروه فازی H است .

مثال ۱-۴-۱۱ . در مثال بالا ν روی H را به صورت $\nu(1) = 1$ و $\nu(-1) = \frac{1}{2}$ تعریف می کنیم. نشان می‌دهیم که $f^{-1}(\nu)$ زیرگروه فازی G است.

حل. داریم:

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{زوج باشد } x \\ \frac{1}{2} & \text{فرد باشد } x \end{cases}$$

(۱) اگر x و y هردو زوج باشند آن گاه $x+y$ زوج است و $f^{-1}(\nu)(x+y) = 1$. زیرا

$$f^{-1}(\nu)(x) = 1 \quad , \quad f^{-1}(\nu)(y) = 1$$

$$f^{-1}(\nu)(x+y) = 1 = 1 \wedge 1 = f^{-1}(\nu)(x) \wedge f^{-1}(\nu)(y)$$

(۲) اگر x زوج و y فرد باشد آنگاه ، $x+y$ فرد است و $f^{-1}(\nu)(x+y) = \frac{1}{2}$. زیرا

$$f^{-1}(\nu)(x) = 1 \ , \quad f^{-1}(\nu)(y) = \frac{1}{2}$$

$$f^{-1}(\nu)(x+y) = \frac{1}{2} = f^{-1}(\nu)(x) \wedge f^{-1}(\nu)(y)$$

(۳) اگر x و y هر دو فرد باشند آنگاه $x+y$ زوج است و $f^{-1}(\nu)(x+y) = 1$. زیرا

$$f^{-1}(\nu)(x) = \frac{1}{2} \quad , \quad f^{-1}(\nu)(y) = \frac{1}{2}$$

$$f^{-1}(\nu)(x+y) > f^{-1}(\nu)(x) \wedge f^{-1}(\nu)(y)$$

در این صورت

$$\forall x, y \in G; \quad f^{-1}(\nu)(x+y) \geqslant f^{-1}(\nu)(x) \wedge f^{-1}(\nu)(y)$$

بنابراین $f^{-1}(\nu)$ زیرگروه فازی روی G است.

۱ - ۵ زیرگروههای فازی نرمال

تعریف ۱ - ۵ - ۱ . یک گردایه‌ی ناتهی از درونریختیهای G را یک حوزه عملگر روی G نامیم.

تعریف ۱ - ۵ - ۲ . فرض کنید D یک حوزه عملگر روی G باشد. زیرمجموعه‌ی فازی λ، نسبت به D پذیرفتنی نامیده می‌شود اگر به ازای هر $f \in D$ یکی از شرایط هم ارزی زیر برقرار باشد:

۱) $f(\lambda) \subseteq \lambda$

۲) $\lambda \subseteq f^{-1}(\lambda)$

قضیه ۱ - ۵ - ۳ . فرض کنیم D یک حوزه‌ی عملگر و λ, μ دو زیرمجموعه فازی D - پذیرفتنی باشند در این صورت $\lambda \circ \mu$ نیز D -پذیرفتنی است.

برهان. فرض کنیم $x \in G$ ، $f \in D$ و $x = ab \in G$. در این صورت داریم:

$$(\lambda \circ \mu)(x) = sup\ min_{x=ab}\ \{\lambda(a), \mu(b)\}$$

$$\leqslant sup\ min_{x=ab}\{\lambda(f(a)), \mu(f(b))\}$$

$$\leqslant sup\ min\ \{\lambda(c), \mu(d)\} = (\lambda \circ \mu)(f(x))$$

در نتیجه $\lambda \circ \mu \subseteq f^{-1}(\lambda \circ \mu)$ □

قضیه ۱ - ۵ - ۴ . فرض کنیم $\mu \in F(G)$ و D یک حوزه‌ی عملگر دلخواهی روی G باشد که شامل یکریختی همانی $i : G \to G$ است. در این صورت روابط زیر هم ارزند:

الف) μ زیرمجموعه فازی D - پذیرفتنی است.

ب) به ازای هر $x \in G$ ، $f \in D$ ، $\mu(x) \leqslant \mu(f((x)))$