دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
دانشکده علوم - گروه ریاضی

رساله دکترا

ریاضی محض - آنالیز تابعی

موضوع:

تعمیم برخی قضایای نقطه ثابت برای توابع چندمقداری

نگارش:

فاطمه لعل دولت آباد

استاد راهنما:

دکتر کوروش نوروزی

شهریور ۱۳۹۱

به نام خدا

تقدیم به

ساحت مقدس امام سوم شیعیان و یاران بزرگوارش

تشکر و قدردانی

خداوند مهربان را شاکرم که هر چه هست، لطف اوست.

ابتدا مراتب سپاس و قدردانی خود را نسبت به استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر کوروش نوروزی که در تمام مراحل کار از تشویق‌ها و راهنمایی‌های ایشان برخوردار بوده‌ام، ابراز می‌دارم. بی‌شک دست‌یابی به نتایج این تحقیق، بدون همفکری‌ها و نقطه نظرات ایشان امکان‌پذیر نبوده است.

از اساتید محترم سرکار خانم دکتر ملیحه حسینی و جناب آقایان دکتر هاشم پروانه مسیحا، دکتر سید منصور واعظ پور و دکتر عبدالرحمن رازانی که قبول زحمت فرموده و داوری این رساله را پذیرفتند، کمال تقدیر و تشکر را دارم.

از تمامی دوستان خوبم که در موفقیت من سهیم بوده‌اند صمیمانه سپاسگذاری می‌کنم و برای همه این عزیزان آرزوی موفقیت دارم.

همراهی‌ها، حمایت‌ها و شکیبایی خانواده عزیزم در طی مراحل تحصیل ستودنی است و شایان تشکر خاص اینجانب است.

چکیده

در این رساله، برخی قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های چندمقداری و تک‌مقداری روی فضاهای متریک برداری‌مقدار، فضاهای مدولار و فضاهای مدولار احتمالاتی ارائه می‌شود. برخی از این نتایج، قضیه‌های نقطه ثابت اسد-کرک، زمفیرسکیو، کانن، چاترجیا و چرچ را تعمیم می‌دهند. همچنین این قضایا را در حل معادلات انتگرالی به‌کار می‌بندیم. سپس تعمیم قضیه کرستی روی فضای متریک برداری‌مقدار با شرایط ضعیف‌تری نسبت به نتایج قبلی بیان می‌شود. نشان می‌دهیم که شرط منظم بودن مخروط، شرطی اساسی در صورت برداری‌مقدار قضیه کرستی روی فضاهای متریک برداری‌مقدار است و فقدان این شرط در برخی نتایج قبلی، درستی آن‌ها را مخدوش می‌سازد. پس از آن نتایجی در زمینه نقطه ثابت نگاشت‌های چندمقداری و تک‌مقداری انقباضی و ناگسترشی روی فضای مدولار ثابت می‌شوند. در پایان، نقطه ثابت نگاشت‌های تک‌مقداری روی فضای مدولار احتمالاتی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: نقطه ثابت، نگاشت‌های چندمقداری، انقباض، فضای متریک برداری مقدار، فضای مدولار، فضای مدولار احتمالاتی.

فهرست مطالب

فهرست علائم

مقدمه

نظریه‌ی نقطه ثابت در شاخه‌های مختلفی چون زیست‌شناسی، شیمی، اقتصاد، مهندسی و فیزیک دارای کاربردهای متعددی است (برای مثال، می‌توان به مراجع [۱۴، ۱۶، ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۳۰، ۵۰] اشاره نمود). از این‌رو، عده زیادی از محققان به مطالعه در این زمینه علاقه‌مند شده و مقالات فراوانی در این راستا منتشر کرده‌اند. به دلیل کاربردهای وسیع نقطه ثابت، حدود ۲۵ سال نظریه نقطه ثابت متریک موضوع تحقیق ریاضیدانان بوده است گرچه در برخی جنبه‌ها تحقیقات جامعی صورت گرفته، اما هنوز تحقیق و پژوهش در این نظریه به قوت خود باقی است.

اصل انقباضی باناخ، در سال ۱۹۲۲ مطرح شد. این اصل پایه نظریه نقطه ثابت متریک را بنا نهاد (برای مثال، [۱۱، ۳۷، ۶۲]). اهمیت قضیه نقطه ثابت باناخ سبب گردید که افراد زیادی در صدد برآیند تا این قضیه را تعمیم دهند. از جمله این محققین، کرستی[۱] است [۱۵]. از آنجا که در قضیه کرستی نیاز به پیوستگی نگاشت نیست این قضیه کاربردهای زیادی پیدا کرد [۳۲].

نگاشت چندمقداری[۲] نگاشتی است که هر نقطه را به یک مجموعه نظیر می‌کند. جالب است بدانیم که نگاشت چندمقداری نخستین بار توسط برگ[۳] مطرح شد [۱۲]. به دلیل کاربردهای وسیع نگاشت‌های چندمقداری در نظریه کنترل، زیست ریاضی، اقتصاد ریاضی و نظریه بازی، محققین بسیاری به بررسی خواص نگاشت‌های چندمقداری تعریف شده روی فضاهای متفاوت پرداخته‌اند (برای مثال به [۱۰، ۱۶] مراجعه شود).

منظور از نقطه ثابت نگاشت چندمقداری f، نقطه x متعلق به دامنه f می‌باشد که $x \in f(x)$. نادلر[۴] برای نخستین بار به مطالعه نقاط ثابت نگاشت‌های چندمقداری روی فضاهای متریک پرداخت [۶۱]. پس از آن ریچ[۵]، خان[۶]، پای[۷]، فیشر[۸] و محققین بسیار دیگری به مطالعه نقطه ثابت نگاشت‌های چندمقداری پرداختند (به [۲۹، ۴۳، ۴۴، ۶۴، ۶۷] مراجعه شود).

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا قضایای نقطه ثابت نگاشت‌های چندمقداری تعمیم واقعی از قضایای نقطه

---

[۱] Caristi
[۲] Correspondence
[۳] Berge
[۴] Nadler
[۵] Reich
[۶] Khan
[۷] Pai
[۸] Fisher

ثابت نگاشت‌های تک‌مقداری هستند یا خیر؟ از [۳۶، ۴۵] می‌توان دریافت که پاسخ این سؤال مثبت است.

هدف اصلی ما در این رساله بررسی وجود نقطه ثابت نگاشت‌های چندمقداری و تک‌مقداری روی فضاهای متریک برداری‌مقدار، فضاهای مدولار و فضاهای مدولار احتمالاتی است. این رساله در سه فصل به شرح زیر تنظیم گردیده است.

فصل اول دربردارنده نتایج اصلی این رساله در مورد نقطه ثابت نگاشت‌های چندمقداری تعریف شده روی فضاهای متریک برداری‌مقدار می‌باشد. این فصل شامل سه بخش است:

در بخش اول مفاهیم و قضایای مقدماتی مورد نیاز در بخش‌های بعد، ارائه می‌شود.

در بخش دوم برخی قضایای معروف نقطه ثابت برای نگاشت‌های تک‌مقداری را معرفی می‌کنیم. سپس با اثبات قضایایی برای غیر خودنگاشت‌های چندمقداری با انقباض‌های خاص، تمام قضایای ذکر شده را تعمیم می‌دهیم. همچنین در پایان این بخش کاربردهایی از نتایج به‌دست آمده را در حل معادلات انتگرالی بیان می‌کنیم [۴].

در بخش سوم به دنبال پاسخ‌گویی به این سؤال کلی هستیم که با اعمال چه شرطی بر قضیه کرستی می‌توان این قضیه را به فضای متریک برداری مقدار تعمیم دهیم؟ از این‌رو ابتدا به نقد و بررسی نتایج به‌دست آمده در [۳، ۶، ۲۷] می‌پردازیم. اثبات ارائه شده در [۲۷] را با ارائه مثال نقضی رد می‌کنیم و بیان خواهیم کرد که با مفروضات ضعیف‌تر می‌توان این قضیه را با روشی دیگر اثبات کرد. پس از آن تعمیم ارائه شده در [۳] را با مثالی، نقض می‌کنیم. در انتها، با افزودن شرط منظم بودن مخروط[۱] بر قضیه کرستی، اثبات جدیدی را برای این قضیه روی فضای متریک برداری‌مقدار ارائه می‌دهیم که تمام نتایج قبلی را تصحیح و تعمیم می‌دهد [۵۶].

در فصل دوم پس از عنوان مقدماتی از فضای مدولار، قضیه نادلر را به فضای مدولار تعمیم می‌دهیم [۵۴]. سپس به کمک انتگرال، انقباضی را برای نگاشت‌های تعریف شده روی فضای مدولار ارائه می‌دهیم که در واقع تعمیمی از انقباض ارائه شده توسط هان‌بالی[۲] [۳۳] برای چنین نگاشت‌هایی است و به اثبات وجود نقطه ثابت نگاشت‌های دارای این انقباض می‌پردازیم [۵۲]. در بخش آخر این فصل، فضاهای مدولاری که دارای ساختار یکنواخت هستند معرفی می‌شوند و قضایایی را برای نگاشت‌های تعریف شده روی فضاهای با ساختار یکنواخت

[۱] Cone
[۲] Hanebaly

ثابت می‌کنیم [۵۳].

در فصل سوم مقدماتی را در زمینه فضای مدولار احتمالاتی ارائه می‌دهیم سپس قضیه نقطه ثابت باناخ را روی فضای مدولار احتمالاتی تعمیم می‌دهیم [۵۵]. در بخش آخر نتایجی را در زمینه نقطه ثابت نگاشت‌های μ-اساسی[۱] روی فضای مدولار احتمالاتی ارائه می‌دهیم [۵۱].

مقالات زیر مستخرج از این رساله می‌باشند:

1. R. P. Agarwal , F. Lael, K. Nourouzi, D. O'Regan, Fixed points of correspondences in vector valued metric spaces and applications in integral equations, J. Nonlinear Convex Anal., 2012 (accepted).
2. F. Lael, K. Nourouzi, The role of regularity to reach the vector valued version of Caristi's fixed point theorem, arXiv.
3. F. Lael, K. Nourouzi, On the Fixed Points of Correspondences in Modular Spaces, ISRN Geometry, vol. 2011, Article ID 530254, 7 pages, doi:10.5402/2011/530254.
4. F. Lael, K. Nourouzi, Fixed points of mappings defined on probabilistic modular spaces, BMAA, ISSN: 1821-1291, vol. 4, 3 (2012), 23-28.
5. F. Lael, K. Nourouzi, Fixed points of multivalued mappings on uniform spaces, Extended Abstracts of the 19th Mathematical Seminar on Analysis and its applications, 19-20 February 2011, University of Mazandaran, Babolsar-Iran.
6. F. Lael, K. Nourouzi, Fixed points of mappings on probabilistic modular spaces, 17-20 August 2009, Sharif University of Technology, Tehran-Iran.
7. F. Lael, K. Nourouzi, Some fixed point theorems of mappings defined on modular

[۱] essential

spaces, The 23rd International Conference of Jangjeon mathematical society, 8-10 February 2010, Shahid chamran University, Ahvaz-Iran.

فصل ۱

قضایای نقطه ثابت نگاشت‌های چندمقداری روی فضای متریک برداری‌مقدار

تعمیم‌های بسیاری از فضای متریک وجود دارد. به عنوان مثال می‌توان به فضای منگر[۱] ، فضای متریک فازی[۲] ، فضای متریک تعمیم یافته[۳] ، فضای متریک مجرد[۴] یا فضای κ-متریک ، فضای متریک مستطیلی[۵] و فضای متریک مستطیلی مخروطی اشاره کرد.

در سال ۲۰۰۷، هانگ[۶] و ژانگ[۷] مفهوم فضاهای متریک مخروطی را معرفی کردند [۳۴] ناآگاه از اینکه این فضاها تحت عنوان فضاهای κ-متریک در اواسط قرن بیستم معرفی شده بودند. در این تعریف متریک، مجموعه‌ی اعداد حقیقی با فضای باناخی که دارای ترتیب جزئی است، جایگزین می‌شود. حال آنکه هانگ و ژانگ همگرایی دنباله را به کمک نقطه‌ی درونی مخروط تعریف کرده‌اند و این دیدگاه به محققان کمک کرد تا مخروط‌های غیرنرمال را نیز مورد بررسی قرار دهند. گرچه ایشان قضیه نقطه ثابت باناخ را برای فضای متریک مخروطی با مخروط نرمال مورد بررسی قرار داده‌اند.

پس از آن مقالات زیادی بر این فضاها با مخروط نرمال منتشر شد که اکثر آن‌ها تعمیم قضایای نقطه ثابت شناخته شده‌ای مانند زمفیرسکیو[۸]، کانن[۹]، جانگ[۱۰] و رودز[۱۱] از فضاهای متریک معمولی به فضاهای متریک مخروطی بودند.

---

[۱] Menger
[۲] Fuzzy
[۳] Generalized
[۴] abstract
[۵] rectangular
[۶] Huang
[۷] Zhang
[۸] Zamfirescu
[۹] Kannan
[۱۰] Jungck
[۱۱] Rhoades

این فصل به سه بخش تقسیم می‌شود، در بخش اول، مفاهیم مورد نیاز جهت ارائه‌ی قضایای نقطه ثابت روی فضای متریک برداری‌مقدار بیان می‌شود. در بخش دوم، برخی قضایای مهم نقطه ثابت را برای غیر خودنگاشت‌های چندمقداری تعمیم می‌دهیم، با این فرض که فضاهای متریک برداری‌مقدار با مخروط‌های غیرنرمال هستند. در بخش سوم، قضیه کرستی را به فضاهای متریک برداری‌مقدار با مخروط نرمال تعمیم می‌دهیم.

۱.۱ فضای متریک برداری‌مقدار

در این بخش، مفاهیم مقدماتی و کارهای تحقیقاتی انجام شده طی سالهای اخیر، در زمینه اثبات وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌های تعریف شده روی فضاهای متریک برداری‌مقدار معرفی می‌شوند.

جهت یادآوری با تعریف مجموعه‌ی جزئی مرتب شروع می‌کنیم.

منظور از مجموعه‌ی جزئی مرتب، مجموعه‌ی ناتهی X با ترتیب جزئی $\preceq$ است. یعنی $\preceq$ دارای خاصیت انعکاسی[۱]، تعدی [۲] و پادتقارن[۳] است. نماد $x \preceq y$ با $y \succeq x$ معادل است. همچنین $y \succ x$ به این معنی است که $y \succeq x$ و $x \neq y$.

زیرمجموعه‌ی $\mathcal{P}$ از فضای برداری $\mathcal{E}$ یک مخروط نامیده می‌شود هرگاه دارای خواص زیر باشد:

۱. به‌ازای هر $a \geq 0$، $a\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$،

۲. $\mathcal{P} + \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$،

۳. $\mathcal{P} \cap -\mathcal{P} = \{\theta\}$ که θ صفر فضای برداری است.

در سراسر این فصل فرض می‌کنیم که $\mathcal{P}$ یک مخروط است.

مخروط $\mathcal{P}$ یک ترتیب جزئی $\preceq$ بر $\mathcal{E}$ القا می‌کند به این‌صورت که $x \preceq y$ هرگاه $y - x \in \mathcal{P}$ وقتی که $\mathcal{P}$ یک مخروط در فضای نرمدار (باناخ) $\mathcal{E}$ است. رابطه‌ی $x \ll y$ هنگامی به کار می‌رود که $y - x \in \mathcal{P}$ و $y - x$ یک

[۱] reflexive
[۲] transitive
[۳] antisymmetric

نقطه درونی از مخروط $\mathcal{P}$ است (با نرم فضای نرمدار $\mathcal{E}$). درون $\mathcal{P}$ را با $\mathrm{int}\mathcal{P}$ نمایش می‌دهیم. ترتیب جزئی القا شده توسط مخروط $\mathcal{P}$ با ساختار جبری $\mathcal{E}$ سازگار است به این معنی که دارای دو خصوصیت زیر است:

۱. برای هر $z \in \mathcal{E}$، $x \succeq y$ نتیجه می‌دهد که $x + z \succeq y + z$،

۲. به‌ازای هر $a \geq 0$، $x \succeq y$ نتیجه می‌دهد که $ax \succeq ay$.

از سوی دیگر، اگر $\preceq$ یک ترتیب جزئی بر فضای برداری $\mathcal{E}$ باشد که با ساختار جبری فضای برداری سازگار است، آن‌گاه زیرمجموعه‌ی $\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{E} : x \succeq \theta\}$ از $\mathcal{E}$، یک مخروط است که اگر ترتیب جزئی القا شده توسط مخروط مذکور بر $\mathcal{E}$ را در نظر بگیریم، به همان ترتیب جزئی $\preceq$ که بر $\mathcal{E}$ فرض شده بود، خواهیم رسید.

در مثال بعدی، نمونه‌هایی از ترتیب جزئی القا شده توسط مخروط یک فضای برداری را می‌بینیم.

مثال ۱.۱.۱. [۳۹]

- رابطه‌ی بزرگتر-مساوی در $\mathbb{R}$ در واقع ترتیبی است که توسط مخروط $\mathbb{R}^+$ بر $\mathbb{R}$ القا می‌شود.
- فرض کنید $\mathcal{E}$ فضای برداری شامل تمام توابع حقیقی تعریف شده بر مجموعه‌ی ناتهی X است. این فضا دارای یک ترتیب جزئی نقطه‌ای به این‌صورت است که به‌ازای هر $f, g \in \mathcal{E}$،

$$f \preceq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x), \quad (x \in X).$$

در واقع این ترتیب جزئی توسط مخروط $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : f \succeq \theta\}$ نیز القا می‌شود. به‌ویژه، اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، آن‌گاه ترتیب جزئی بر فضای برداری متشکل از توابع پیوسته نیز به همین صورت تعریف می‌شود.

- نمونه دیگری از ترتیب جزئی که به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود، ترتیب جزئی بر فضای برداری ω متشکل از دنباله‌های حقیقی $\{\lambda_n\}$ است که توسط مخروط $\mathcal{P}$ شامل دنباله‌های با مؤلفه‌های $\lambda_n \geq 0$، القا می‌شود. زیرفضاهای زیر از ω نیز دارای همان ترتیب جزئی القایی از $\mathcal{P}$ هستند:

m: فضای دنباله‌های کراندار از اعداد حقیقی.

c: فضای دنباله‌های همگرا از اعداد حقیقی.

$c_\circ$: فضای دنباله‌های همگرا به صفر.

ℓ^p: فضای تمام دنباله‌های $\{\lambda_n\}$ که $\sum_n |\lambda_n|^p < \infty$ با $p > \circ$.

مخروط‌ها به دو دسته‌ی نرمال[۱] و غیرنرمال[۲] تقسیم می‌شوند. هر مخروطی که نرمال نباشد، غیرنرمال نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱. [۲۲] مخروط $\mathcal{P}$ از فضای باناخ $(\mathcal{E}, \|.\|)$

۱. نرمال نامیده می‌شود هرگاه

$$\inf\{\|x+y\| : x, y \in \mathcal{P}, \|x\| = \|y\| = ۱\} > \circ.$$

۲. نیم‌یکنوا[۳] نامیده می‌شود هرگاه $K > \circ$ وجود داشته باشد که $\theta \preceq x \preceq y$ نتیجه دهد که $\|x\| \leq K\|y\|$.

۳. یکنوا نامیده می‌شود هرگاه $\theta \preceq x \preceq y$ نتیجه دهد که $\|x\| \leq \|y\|$.

در لم بعدی شرایطی به اثبات رسیده است که دانستن آن‌ها در اثبات قضایای نقطه ثابت روی فضای متریک مخروطی با مخروط نرمال بسیار کارساز است.

لم ۱.۱.۱. [۴۹] فرض کنید $\mathcal{P}$ یک مخروط از فضای باناخ $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ است. در این صورت شرایط زیر هم ارزند:

۱. $\mathcal{P}$ نرمال است.

۲. به‌ازای دنباله‌های $\{x_n\}$، $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$ در $\mathcal{E}$، اگر

$$x_n \preceq y_n \preceq z_n$$

و

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = x,$$

آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

[۱] normal
[۲] nonnormal
[۳] semi-monotone

۳. $\mathcal{P}$ نیم‌یکنوا است.

۴. $\|\cdot\|_1$ معادل نرم $\|\cdot\|$ وجود دارد که مخروط $\mathcal{P}$ با $\|\cdot\|_1$ یکنواست.

بنابر لم قبل، تعریف نرمال بودن مخروط معادل با تعریف نیم‌یکنوا بودن مخروط است. از آنجا که کار کردن با تعریف نیم‌یکنوا ساده‌تر است، معمولاً از آن به‌عنوان تعریف مخروط نرمال استفاده می‌شود.

گرچه لم ۲.۱.۱، در سال ۱۹۴۰ به اثبات رسیده است اما محققانی که بر مخروط نرمال، پس از سال ۲۰۰۷ به تحقیق پرداخته‌اند، از این لم استفاده‌ای نکرده‌اند. حال آنکه به کمک این لم می‌توان بسیاری از قضایای ثابت شده را با روشی کوتاه‌تر مجدداً به اثبات رساند.

مثال ۲.۱.۱. [۳۹] فضای باناخ $\mathcal{E} = C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ متشکل از تمام توابع پیوسته حقیقی بر $[0,1]$ با نرم $\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ و مخروط $\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{E} : x(t) \geq 0\}$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که این مخروط غیرنرمال است. ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای $x_n(t) = \frac{t^n}{n}$ و $y_n(t) = \frac{1}{n}$، داریم

$$\theta \preceq x_n \preceq y_n$$

و همچنین $\lim_{n\to\infty} y_n = \theta$. اما

$$\|x_n\| = \max_{t\in[0,1]} |\frac{t^n}{n}| + \max_{t\in[0,1]} |t^{n-1}| = \frac{1}{n} + 1 > 1.$$

از این‌رو دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگرا به صفر نیست پس بنابر لم ۱.۱.۱، $\mathcal{P}$ غیرنرمال است.

به روش دیگر، فرض کنید $x(t) = t^n$ و $y(t) = 1$. در این‌صورت $\theta \preceq x(t) \preceq y(t)$. اما اگر $M > 0$ای وجود داشته باشد به طوری که $\|x(t)\| \leq M\|y(t)\|$، آن‌گاه $M \geq n + 1$. که این با بی‌کران بودن اعداد طبیعی تناقض دارد.

در قضایایی که مخروط غیرنرمال است معمولاً فرض بر این است که مخروط دارای درون ناتهی است. اما در قضایایی که مخروط نرمال است، مخروط با درون تهی در نظر گرفته می‌شود. فضاهای باناخ مهمی وجود دارند که دارای مخروط‌هایی نرمال با درون تهی هستند. به‌عنوان مثال c_0، ℓ^p و L^p که $p > 0$. در مثال ۲.۱.۱، فضای مهمی که دارای مخروط غیرنرمال با درون ناتهی است، معرفی شده است.

حال فضای متریک برداری‌مقدار را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۱. [۶] فرض کنید X یک مجموعه ناتهی است. نگاشت $d : X \times X \to \mathcal{P}$ متریک برداری‌مقدار روی X نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱. به‌ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = \theta$ اگر و تنها اگر $x = y$،

۲. به‌ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$،

۳. به‌ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x, y) \preceq d(x, z) + d(y, z)$.

در صورتی که d یک متریک برداری‌مقدار روی X باشد (X, d) را یک فضای متریک برداری‌مقدار می‌نامیم.

تعریف فضای متریک برداری‌مقدار در [۶] با فضای متریک مخروطی ارائه شده توسط هانگ و ژانگ در [۳۴] یکی است چون در متریک هر دو فضا، مجموعه‌ی اعداد حقیقی با یک مخروط از فضای باناخ جایگزین می‌شود. از این‌رو، در ادامه‌ی این فصل به‌جای فضای ''متریک مخروطی'' از عبارت فضای متریک برداری‌مقدار استفاده می‌کنیم.

به آسانی می‌توان دریافت که مفهوم فضای متریک برداری‌مقدار وسیع‌تر از فضای متریک است، به عبارت صریح‌تر هر فضای متریک یک فضای متریک برداری‌مقدار با مخروط $\mathcal{P} = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ است.

مثال ۳.۱.۱. [۳۹]

- فرض کنید $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ و $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad y \geq 0\}$. همچنین فرض کنید متریک برداری‌مقدار d روی $\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|) \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$

که α عدد ثابت نامنفی است. در این‌صورت (X, d) یک فضای متریک برداری‌مقدار با مخروط نرمال $\mathcal{P}$ است.

- $C^1_{\mathbb{R}}[0, 1]$ با مخروط و نرم تعریف شده در مثال ۲.۱.۱ را در نظر بگیرید. فضای $C^1_{\mathbb{R}}[0, 1]$ با متریک القایی از نرم، نمونه‌ای از فضای متریک برداری‌مقدار با مخروط غیرنرمال است.

تعریف ۳.۱.۱. [۳۴] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک برداری‌مقدار است. دنباله‌ی $\{x_n\}$ از X را

۱. همگرا به $x \in X$ گویند هرگاه برای هر $c \gg \theta$ عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد که برای هر $n > N$، $d(x_n, x) \ll c$. در این‌صورت می‌نویسیم $x_n \to x$.

۲. کوشی گویند هرگاه برای هر $c \gg \theta$ عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد که برای هر $n, m > N$،

$$d(x_n, x_m) \ll c.$$

اگر هر دنباله‌ی کوشی از X به نقطه‌ای از X همگرا باشد، آن‌گاه X را فضای کامل گویند. زیرمجموعه‌ی $C \subset X$ بسته نامیده می‌شود هرگاه شامل حد تمام دنباله‌های در C باشد.

بستار C با $\overline{C}$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت مجموعه‌ی تمام نقاطی از X که حد دنباله‌های در C هستند، تعریف می‌شود.

قابل ذکر است که اگر $\mathcal{P}$ یک مخروط نرمال با درون ناتهی باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{x_n\}$ کوشی است اگر و تنها اگر $\|d(x_n, x_m)\| \to \circ$، وقتی $n, m \to \infty$. همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}$ به $x \in X$ نیز معادل است با $\|d(x_n, x)\| \to \circ$، وقتی $n \to \infty$.

سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان فضای متریک برداری‌مقدار را به یک متریک معمولی مجهز کرد که مفاهیم توپولوژیکی آن‌ها با هم مرتبط باشند؟ جهت پاسخ به این سؤال برخی نتایج به‌دست آمده در [۸، ۲۶، ۳۹، ۴۱] را مدنظر قرار می‌دهیم.

ساده‌ترین راه جهت به‌دست آوردن متریک معمولی از یک متریک برداری‌مقدار با مخروط نرمال (با ثابت نرمال ۱) این است که متریک $D(x, y) = \|d(x, y)\|$ را تعریف کنیم. به سادگی می‌توان بررسی کرد که فضاهای (X, d) و (X, D) دارای دنباله‌های کوشی و همگرای یکسانی هستند. به کمک متریک D می‌توان بسیاری از مفروضات قضایایی که بر فضای متریک برداری‌مقدار اثبات شده‌اند را به شرایطی در فضای متریک معمولی برگرداند و با استفاده از قضایای متناظر آن‌ها در فضای متریک معمولی به حکم مورد نظر رسید.

در ادامه، تنها برخی از قضایایی را که می‌توان به کمک متریک D به قضایای متناظر در فضای متریک معمولی برگرداند، ارائه می‌دهیم. در تمام این قضایا فرض بر این است که فضای متریک برداری‌مقدار با مخروط نرمال است.

در سراسر این رساله، فرض می‌کنیم که f یک نگاشت چندمقداری و T یک نگاشت تک‌مقداری است.

قضیه ۱.۱.۱. [۳۹] فرض کنید (X, d) فضای متریک برداری‌مقدار کامل است. همچنین نگاشت $T : X \to X$ به‌گونه‌ای است که به‌ازای اعداد a, b, c که $a \in [0, 1)$ و $b, c \in [0, \frac{1}{2})$، برای هر $x, y \in X$، حداقل در یکی از شرایط زیر صدق کند:

۱. $d(T(x), T(y)) \preceq ad(x, y)$،

۲. $d(T(x), T(y)) \preceq b(d(x, T(x)) + d(y, T(y)))$،

۳. $d(T(x), T(y)) \preceq c(d(x, T(y)) + d(y, T(x)))$.

در این‌صورت T یک نقطه‌ی ثابت دارد.

قضیه ۲.۱.۱. [۳۹] فرض کنید (X, d) فضای متریک برداری‌مقدار کامل است. همچنین نگاشت $T : X \to X$ به‌گونه‌ای است که به‌ازای عدد ثابت $a \in [0, 1)$، برای هر $x, y \in X$،

$$d(T(x), T(y)) \preceq au,$$

که $u \in \{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y)), d(x, T(y)), d(y, T(x))\}$. در این‌صورت T یک نقطه‌ی ثابت دارد.

قضیه ۳.۱.۱. [۳۹] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک برداری‌مقدار کامل است. همچنین نگاشت $T : X \to X$ به‌گونه‌ای است که به‌ازای اعداد نامنفی a, b, c که $a + b + c < 1$،

$$d(T(x), T(y)) \preceq ad(x, T(x)) + bd(y, T(y)) + cd(x, y).$$

در این‌صورت T دارای نقطه ثابت است.

در تمام قضایایی که ذکر کردیم، متریک برداری‌مقدار d به متریک D تبدیل می‌شود و رابطه‌ی ترتیب جزئی $\preceq$ تولید شده توسط مخروط $\mathcal{P}$ به ترتیب بزرگتر-مساوی $\leq$ در مجموعه‌ی $[0, +\infty)$ تبدیل می‌شود. بنابراین فضای متریک برداری‌مقدار (X, d) به فضای متریک (X, D) تبدیل می‌شود.

ذکر این مطلب جالب توجه است که در حالت کلی همه‌ی قضایای نقطه ثابت بر فضای متریک برداری‌مقدار با مخروط نرمال را نمی‌توان به قضایای متریک معمولی تبدیل کرد. به عنوان مثال قضیه کرستی در فضای

متریک برداری‌مقدار با مخروط نرمال، یکی از نمونه‌هایی است که نمی‌توان به صورت متریک متناظرش برگرداند. بنابراین راه برای تحقیق در زمینه‌ی فضای متریک برداری‌مقدار با مخروط نرمال هنوز بسته نشده است و همچنان کارهای تحقیقاتی در این زمینه صورت می‌گیرد [۶، ۶۳]. در بخش دوم این فصل، صورتی از قضیه کرستی بر فضای متریک برداری‌مقدار با مخروط نرمال را به اثبات رسانده‌ایم.

حال روش‌های به‌دست آوردن یک متریک معمولی از یک متریک برداری‌مقدار با مخروط غیرنرمال را ذکر می‌کنیم.

جهت به‌دست آوردن یک متریک معمولی از یک متریک برداری‌مقدار d بر X که بتوان به کمک آن قضایای نقطه ثابت بر فضای متریک برداری‌مقدار را به فضای متریک معمولی برگرداند، متریک d_ξ این‌چنین تعریف شده است: $d_\xi = \xi_e \circ d$، به‌گونه‌ای که $\xi_e : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_e(x) = \inf\{r \in \mathbb{R} : x \preceq re\},$$

که $e \in int\mathcal{P}$. در [۴۱] نشان داده شده است که متریک d_ξ، برخی خواص فضای (X, d) را به ارث می‌برد. این خواص عبارتند از همگرایی دنباله، کوشی بودن دنباله و همچنین کامل بودن فضا.

در [۸]، متریک جالب دیگری را از روی متریک برداری‌مقدار d تعریف می‌کنند. در ادامه به بیان مقدمات لازم جهت تعریف این متریک می‌پردازیم. فرض کنید $\mathcal{E}$ یک فضای باناخ و $\mathcal{P}$ مخروط با درون ناتهی است. مجموعه‌ی محدب B از $\mathcal{P}$ را پایه‌ی $\mathcal{P}$ گویند هرگاه $\theta \notin \overline{B}$ و $\mathcal{P} = \cap_{t \geq \circ} tB$. همچنین فرض کنید $\mathcal{E}^*$ فضای دوگان توپولوژیکی $\mathcal{E}$ است. قرار دهید

$$\mathcal{P}^* = \{\phi \in \mathcal{E}^* : \phi(x) \geq \circ, x \in \mathcal{P}\}.$$

این مجموعه را دوگان $\mathcal{P}$ نامیم.

لم ۱.۱.۲. [۸] فضای دوگان $\mathcal{P}^*$ که دارای پایه‌ی به‌طور ضعیف فشرده‌ی $\mathcal{B}^*$ است که دارای شرایط زیر است:

۱. به‌ازای هر $\phi \in \mathcal{B}^*$، $x \in \mathcal{P} \iff \phi(x) \geq \circ$.

۲. به‌ازای هر $\phi \in \mathcal{B}^*$، $x \in int\mathcal{P} \iff \phi(x) > \circ$.