دانشگاه علامه طباطبایی

دانشکده اقتصاد

گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش ریاضیات مالی

موضوع

مدل هذلولوی تعمیم‌یافته برای قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی

پژوهشگر

ریحانه پوررمضان ابیانه

استاد راهنما

دکتر رضا پورطاهری

استاد مشاور

دکتر عبدالساده نیسی

تیر ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس:

بدیهی است انجام پژوهش و نگارش پایان‌نامه‌ی حاضر بدون همیاری و همکاری استادان محترم میسر نمی‌گردید، بنابراین در ابتدا از زحمات اساتید و بزرگانی که اینجانب را حمایت کرده‌اند، قدردانی می‌کنم و امید دارم همواره در سایه الهی بوده و در هر جای دنیا که باشند پیروز و سر بلند باشند.

از استاد بزرگوار و محترم جناب آقای دکتر پورطاهری که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را پذیرفته و اینجانب را با دقت فراوان در مراحل مختلف این پژوهش راهنمایی نمودند، کمال تشکر و سپاسگذاری را دارم. از استاد ارجمند و مدرس توانمند جناب آقای دکتر نیسی مشاور تحقیق و استاد گرامی و ارجمند جناب آقای دکتر بادامچی‌زاده که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشته‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تقدیم به:

پدر، مادر و همسرم

دسترنج آدمی جز به پدر و مادرش تعلق ندارد، ولی هیچ دسترنجی در شأن پدر ومادر نیست.

بسیار از این کوچه گذر خواهی کرد

در جست و جوی عطر سیب

سیبی که لغزید و غلتید

غلتید و رفت

رفت و در جوی آب دور شد

زمانه مرا می‌برد

و تو نمی‌دانی

به روزها چنگ می‌زنم

و تو نمی‌آیی

به ساعت‌ها، ثانیه‌ها

در دقیقه‌ها درنگ می‌کنم

و تو نمی‌آیی

بسیار گذر خواهی کرد

می‌دانم.

چکیده

در سال‌های اخیر، مدل‌های تصادفی واقعی‌تری برای حرکت‌های قیمت در بازارهای مالی ارائه شده که با جایگزینی فرایند براونی کلاسیک با فرایندهای لوی به دست آمده‌اند. در این میان اثبات شده که فرایندهای لوی هذلولوی تعمیم‌یافته برازش بسیار خوبی به داده‌های مشاهده شده بازار دارند. ابتدا تاریخچه مدل‌های پرشی و چند مفهوم مهم را مرور می‌کنیم. سپس توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته و فرایند لوی هذلولوی تعمیم‌یافته را معرفی می‌کنیم. مدل هذلولوی تعمیم‌یافته برای فرایند قیمت را با استفاده از فرایند لوی هذلولوی تعمیم‌یافته می‌سازیم، که این مدل ناکامل در حقیقت تعمیمی از مدل هذلولوی است که در سال ۱۹۹۵ توسط ابرلین و کلر معرفی شد. در اینجا با استفاده از تبدیل اشر فرمول قیمت گذاری اختیار برای مدل هذلولوی تعمیم‌یافته‌ی حاصل را استخراج می‌کنیم.

فهرست مطالب

۱ کلیات **۱**

۱.۱ مقدمه ۲

۲.۱ تاریخچه ۲

۳.۱ بیان مسئله ۵

۴.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه ۶

۱.۴.۱ فرایندهای لوی ۱۴

۲.۴.۱ تقسیم‌پذیر نامتناهی ۱۶

۳.۴.۱ اندازه و بعضی مفاهیم مربوط به آن ۱۷

۴.۴.۱ مفاهیم مالی ۱۹

۲ مدل هذلولوی تعمیم‌یافته برای قیمت‌گذاری دارایی **۲۱**

۱.۲ مقدمه ۲۲

۲.۲ توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته ۲۲

۳.۲ فرایند لوی هذلولوی تعمیم‌یافته ۳۳

۴.۲ نمایش لوی خینچین توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته ۳۵

۵.۲ مدل هذلولوی تعمیم‌یافته برای قیمت‌گذاری دارایی ۴۲

۳ مبانی قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی ۴۸

۱.۳ مقدمه ۴۹

۲.۳ قضایای اساسی قیمت‌گذاری دارایی ۴۹

۳.۳ شرایط کامل بودن مدل بازار ۵۳

۴.۳ قیمت اختیار ۵۶

۵.۳ بازه‌ی قیمت اختیار ۵۷

۴ قیمت‌گذاری اختیار اروپایی با استفاده از تبدیل اشر ۶۱

۱.۴ مقدمه ۶۲

۲.۴ معرفی تبدیل و اندازه اشر ۶۲

۳.۴ قیمت‌گذاری اختیار اروپایی ۶۹

پیشنهاد ۷۲

مراجع ۷۳

نمادها و علایم اختصاری ۸۱

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۳

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۸۹**

فصل ۱

کلیات

۱.۱ مقدمه

قیمت‌گذاری اوراق مشتقه از مباحث اساسی مطرح در ریاضیات مالی است و متخصصان زیادی در این زمینه فعالیت می‌کنند. یکی از حیطه‌های فعالیت آنان تعیین یا برازش مدل برای قیمت اختیارات است. بنابر تعریف ۱-۴-۱ که در ادامه بیان شده است، اختیار معامله بر روی دارایی تعریف می‌شود پس قیمت اختیار از قیمت آن دارایی خاص منتج می‌شود. پس لازمه‌ی قیمت‌گذاری اختیار، قیمت‌گذاری دارایی پایه‌ی آن است. دارایی پایه در این پایان‌نامه، سهام در نظر گرفته شده است، که یکی از پر کاربردترین دارایی‌های پایه است. در این بخش پس از بیان روند پیدایش مدل‌های پرش محض، کاستی‌های مدل بلک شولز و مزایای مدل هذلولوی تعمیم‌یافته نسبت به مدل بلک شولز ارائه شده است. در ادامه تعاریف و مفاهیم به کار رفته در پایان نامه ذکر شده است.

۲.۱ تاریخچه

اولین مدل در زمینه‌ی قیمت‌گذاری دارایی در سال ۱۹۰۰ توسط بشیلیه [۳] ارائه شد. وی قیمت سهام را به عنوان حرکت براونی با رانش معرفی کرد. مهم‌ترین اشکال این مدل، امکان بروز قیمت منفی بود. حرکت براونی یکی از شناخته شده‌ترین انواع فرایندهای لوی است. به طور ضمنی این مدل نشان دهنده‌ی کاربرد فرایندهای لوی در ریاضیات مالی از زمان‌های قدیم است.

آزبورن در سال ۱۹۵۹ [۴۱] مدل بشلیه را با در نظر گرفتن فرایند براونی هندسی یعنی e^{B_t} به عنوان مدل قیمت‌گذاری سهام بهبود بخشید. او این روش را با یک بحث روانشناسانه که پایه‌ی آن قانون وبر-فچنر بود، توجیه کرد. وی بیان کرد که مشاهدات نشان می‌دهد شدت تحریک از مقیاس خطی پیروی نکرده و بیشتر از

مقیاس لگاریتمی تبعیت می‌کند. به‌طور اصولی‌تر ساموئلسن فرایند e^{B_t} را به‌عنوان مدل قیمت‌گذاری سهام در سال ۱۹۶۵ [۴۸] مطرح نمود. یکی از اولین کسانی‌که فرایند لوی غیر نرمال نمایی را معرفی کرده مندلبروت [۳۸] بود. او مشاهده کرد که لگاریتم تغییرات قیمت بازارهای کالا و مالی با یک توزیع دم‌کشیده تطابق دارند. او نتیجه گرفت که حرکت براونی در e^{B_t} باید با یک فرایند لوی α-پایدار متقارن با $\alpha < ۲$ جایگزین شود. آنگاه یک فرایند قیمت سهام پرش محض به دست آورد. به بیانی غیردقیق، این فرایندها مقادیرشان را تنها با پرش‌ها می‌گیرند. توزیع‌های نرمال از نوع توزیع‌های α-پایدار با $\alpha = ۲$ هستند. بنابراین مدل مندلبروت، به نوعی مکمل مدل آزبورن و مدل ساموئلسن می‌باشد. در سال ۱۹۶۷، یک مدل فرایند لوی نمایی با توزیع غیرپایدار توسط پرس [۴۴] مطرح شد که فرایند لگاریتم قیمت آن مجموع یک حرکت براونی و یک فرایند پواسون مرکب مستقل با پرش‌های نرمال بود. بعد از آن در سال ۱۹۸۷ مادان و سناتا [۳۷] یک فرایند لوی برای لگاریتم قیمت‌ها پیشنهاد دادند که نموهایی با توزیع واریانس گاما (VG) داشت. در حقیقت آن‌ها بیان کردند که واریانس لگاریتم بازده‌ها از توزیع گاما تبعیت می‌کند. این انتخاب به وسیله‌ی مطالعات آماری داده‌های بازار سهام استرالیا انجام شده بود. فرایندهای لوی واریانس گاما نیز فرایندهایی پرش محض هستند. اما با انتخاب پارامترهای مناسب در مدل مادان و سناتا انتظارات مربوط به قیمت‌های سهام برآورده می‌شود. در سال ۱۹۷۷ بارندورف نیلسن [۴] توزیع هذلولوی را معرفی کرد. انگیزه‌ی او از ارائه این توزیع، یافتن توزیع مناسب برای داده‌های تجربی در زمینه‌ی زمین‌شناسی بود. او در پروژه‌ای به منظور مدل‌بندی توزیع اندازه دانه‌های شن، برای اولین بار این توزیع را ارائه کرد. نام هذلولوی برگرفته از این حقیقت می‌باشد که لگاریتم چگالی این توزیع، یک تابع هذلولوی است که این نقطه مقابل توزیع نرمال است. زیرا لگاریتم چگالی توزیع نرمال سهمی می‌باشد. علاوه بر کاربرد بالا، این توزیع را در زمینه‌های مختلف دیگر از جمله

تئوری اغتشاشات (بارندورف نیلسن [۴])، ریاضیات مالی (پراوز [۴۲]) و فیزیک آماری به کار برده‌اند. در سال ۱۹۹۵ ابرلین و کلر [۱۷] یک مدل قیمت‌گذاری دارایی را معرفی کردند که فرض اصلی آن، این بود که لگاریتم بازده‌ها دارای توزیع هذلولوی هستند. آن‌ها این مدل را به قیمت‌های سهام آلمانی NYSE برازش دادند و مشاهده کردند این مدل برازش مناسب‌تری به داده‌ها دارد. ابرلین، کلر و پراوز در سال ۱۹۹۸ [۱۸] پارامترهای تخمین زده شده برای سهام NYSE را برای پیش‌بینی قیمت اختیار به کار بردند. پس از مدتی در همان سال ابرلین و پراوز توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته را برای لگاریتم بازده‌ها جایگزین توزیع هذلولوی کردند. در سال ۲۰۰۳، اسکوتنز [۴۹] توزیع هذلولوی تعمیم یافته را به داده‌های واقعی بازار برازش دادند. انگیزه ساختن تمامی این مدل‌ها پیدا کردن مدلی با برازش بهتر به تغییرات لگاریتم قیمت‌های سهامی است که به طور تجربی مشاهده می‌شوند. پیشرفت‌هایی که در این زمینه حاصل‌شده در جهات مختلف به کار گرفته شده است. مثلاً یکی از این جنبه‌ها تلاش در جهت جایگزینی مدل‌هایی بود که تنها بر پایه حرکت براونی هستند. روند تاریخی بیان‌شده، سیر تکامل مدل‌ها تا رسیدن به مدل‌های پرش محض بوده است. این‌ها مدل‌هایی هستند که بر ناپیوستگی تأکید دارند. مدل دارایی هذلولوی تعمیم‌یافته بر پایه فرایند لوی هذلولوی تعمیم‌یافته می‌باشد که این فرایند نیز از نوع فرایندهای لوی پرش محض است. این مدل نیز در جهت بهبود مدل‌های پیشین عملکرده است. یکی از مدل‌هایی که در زمره مدل‌های پرش محض نیست اما تحولی شگرف در دنیای ریاضیات مالی ایجاد کرده است، مدل بلک شولز می‌باشد. در سال ۱۹۷۳ مقاله‌ای توسط فیشر بلک و میرون شولز [۹] منتشر شد که چند ماه بعد توسط رابرت مرتون تکمیل شد. این مقاله به بیان همان مدل بلک شولز پرداخته بود. در اینجا جهان بازارهای مالی تغییر یافت و نقطه‌ی شروعی برای رشد نمایی بازارهای مشتقات ایجاد شد.

۳.۱ بیان مسئله

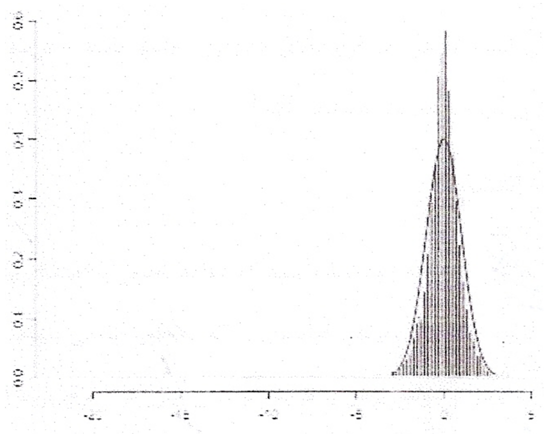
در مدل بلک شولز لگاریتم بازده دارای توزیع نرمال، نوسان‌پذیری ثابت و نرخ بهره نیز ثابت معینی است. تجزیه و تحلیل‌های آماری قیمت سهام نشان داد که نوسان‌پذیری با گذشت زمان به طور تصادفی تغییر می‌کند. بنابراین مدل‌هایی برای اصلاح این مفروضات مطرح شد. مدل‌های با نوسان‌پذیری تصادفی، مدل‌هایی با نرخ بهره تصادفی و مدل‌های GARCH از این قبیل‌اند. بررسی‌ها هم‌چنین نشان داد که بازار واقعی چند ویژگی داردکه مدل بلک شولز فاقد آنها است:

۱- مدل بایستی توانایی نشان دادن پرش‌های تصادفی بزرگ را داشته باشد (مسیرهای قیمت سهام به دست آمده از مدل بلک شولز پیوسته است).

۲- توزیع لگاریتم بازده باید کشیده‌تر باشد.

۳- توزیع لگاریتم بازده باید چوله و غیر متقارن باشد.

۴- توزیع لگاریتم بازده باید دم‌های سنگین‌تری داشته باشد.



شکل ۱-۱: مقایسه بافت نگار لگاریتم بازده روزانه شاخص S&P۵۰۰ از ژوئن ۱۹۸۰ تا دسامبر ۲۰۰۵ و چگالی $N(0,1)$.

همانطور که در شکل ۱-۱ مشاهده می‌شود توزیع لگاریتم بازده روزانه، قله کشیده‌تر و دم سنگین‌تری نسبت به توزیع نرمال دارد که این از معایب مدل بلک شولز است. همان‌طور که در ادامه به تفصیل بیان خواهد شد، مدل هذلولوی تعمیم‌یافته تا حدودی توانسته این نواقص را برطرف سازد. مدل هذلولوی تعمیم‌یافته مبتنی بر فرایند پرش محض لوی هذلولوی تعمیم‌یافته می‌باشد. از این رو این مدل می‌تواند پرش‌های تصادفی قیمت را نشان دهد. هم‌چنین در این مدل توزیع لگاریتم بازده‌ها هذلولوی تعمیم‌یافته است که نیمه دم سنگین است. از این رو این مدل نسبت به مدل بلک شولز به داده‌های واقعی برازش بهتری دارد. اما مدل بازار هذلولوی تعمیم‌یافته کامل نیست و در نتیجه قیمتی یکتا برای اختیار وجود ندارد بلکه بازه‌ای از قیمت‌ها به دست می‌آید. برای بدست آوردن قیمتی یکتا برای اختیار از تبدیل اشر استفاده خواهیم کرد.

۴.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف ۱.۴.۱. تابع کادلاگ و تابع کاگلد:

تابع $f:[0,T]\to R^d$ کادلاگ نامیده می‌شود اگر در همه‌ی نقاط راست پیوسته بوده و حد چپ داشته

باشد، یعنی برای هر $t \in [0, T]$ حدهای

$$f(t^-) = \lim_{s \to t^-} f(s) \qquad\qquad f(t^+) = \lim_{s \to t^+} f(s) \tag{۱.۱}$$

موجود باشند و $f(t) = f(t^+)$.

هر تابع پیوسته کادلاگ است، اما عکس این موضوع درست نیست. اگر t یک نقطه ناپیوستگی f باشد مقدار

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t^-) \tag{۲.۱}$$

"پرش" f در t نامیده می‌شود. تابع کادلاگ f حداکثر می‌تواند در یک مجموعه شمارا ناپیوسته باشد، یعنی مجموعه‌ی $\{t \in [0, t] \mid f(t) \neq f(t^-)\}$ شمارش‌پذیر است [۲۲]. تابع پله‌ای مثالی از توابع کادلاگ است که دارای پرش در برخی نقاط مانند T_0 است، که مقدار آن در T_0، مقدار پس از پرش تعریف می‌شود و $\Delta f(T_0) = 1$. برای تابع پیوسته $g : [0, T] \to R$ و مقادیر ثابت f_i، $i = 0, \ldots, n-1$ و $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = T$، تابع زیر کادلاگ است

$$f(t) = g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} f_i 1_{[t_i, t_{i+1}]}(t). \tag{۳.۱}$$

تابع g را می‌توان به‌عنوان مؤلفه‌ی پیوسته‌ی f تعبیر نمود که پرش‌ها نیز به آن افزوده می‌شوند. مقدار پرش f در t_i، $i \geq 1$ برابر است با $\Delta f(t_i) = f_i - f_{i-1}$. البته هر فرایند کادلاگی دارای چنین تجزیه واضحی به دو بخش پیوسته و پرش نیست. توابع کادلاگ مدل‌هایی طبیعی برای مسیر فرایندهای پرش‌دار هستند.

در مثال فوق تابع در زمان‌های پرش t_i راست پیوسته است، زیرا مقدار آن را در t_i مقدار پس از پرش تعریف کرده‌ایم: $f(t_i) := f(t_i^+)$. اگر $f(t_i)$ بیان‌گر مقدار پیش از پرش باشد، یعنی $f(t_i) := f(t_i^-)$، آنگاه یک تابع چپ پیوسته با حدود راست "کاگلد" حاصل می‌شود. از آن جهت که t به‌عنوان متغیر زمان تعبیر می‌شود،

راست را به "پس از" و چپ را به "پیش از" تعبیر می‌کنیم. اگر تابع راست پیوسته در زمان t دارای پرش باشد، آنگاه مقدار $f(t)$ توسط مسیر مشاهده شده تا زمان t قابل پیش‌بینی نیست. پرش‌ها پیشامدهای تصادفی هستند که زمان وقوع آن‌ها برای مشاهده‌کننده قابل پیش بینی نیست. در مقابل، اگر مسیر نمونه‌ای چپ پیوسته باشد، مشاهده کننده‌ای که در طول مسیر به زمان t می‌رسد، می‌تواند مقدار f را در زمان t پیشگویی کند. در متون مدل‌بندی مالی، پرش‌ها بیان‌گر پیشامدهای ناگهانی و غیر قابل پیش‌بینی هستند لذا انتخاب راست پیوستگی طبیعی است. به بیان دیگر، اگر خواهان مدل‌بندی فرایند ناپیوسته‌ای باشیم که مقادیرش قابل پیشگویی است بایستی فرایند کاگلد را به کار بگیریم [۱۲].

تعریف ۲.۴.۱. پالایه یا جریان اطلاعات:

یک پالایه یا جریان اطلاعات روی (Ω, F, P) خانواده‌ای افزایشی از σ-میدان‌های $(F_t)_{t\in[0,T]}$ است، به طوری‌که به‌ازای هر $0 \leq s \leq t$، $F_s \subseteq F_t \subseteq F$. F_t به‌عنوان اطلاعاتی که تا خود زمان t معلوم می‌شود، تعبیر می‌شود و با گذشت زمان افزایش می‌یابد. فضای احتمال مجهز شده به پالایه را فضای احتمال با پالایه می‌گویند. از دیدگاه شهودی، احتمال وقوع پیشامد تصادفی، با آشکار شدن اطلاعات بیش‌تر در اثر گذر زمان، تغییر خواهد کرد [۱۲].

تعریف ۳.۴.۱. فرایند سازوار:

فرایند تصادفی $(X_t)_{t\in[0,T]}$ نسبت به ساختار اطلاعات $(F_t)_{t\in[0,T]}$ سازوار نامیده می‌شود اگر، برای هر $t \in [0, T]$، مقدار X_t در زمان t آشکار شود، یا به عبارت دیگر اگر متغیر تصادفی X_t، F_t-اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۴.۴.۱. زمان‌های تصادفی:

هر متغیر تصادفی نامنفی $T \geq 0$ را یک زمان تصادفی می‌نامیم. حال فرض کنید فضای احتمال پالایش

شده‌ی $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq \circ}, P)$ داده شده باشد. زمان تصادفی T را زمان تصادفی سازوار یا زمان توقف گویند هرگاه

$$T : \Omega \longrightarrow R^+ \cup \{\circ\}$$

$$\forall t \geq \circ, \qquad \{T \leq t\} \in F_t$$

اگر $T_۱$ و $T_۲$ زمان‌های توقف باشند آنگاه $T_۱ \wedge T_۲ = \inf\{T_۱, T_۲\}$ نیز زمان توقف است.

تعریف ۱.۴.۵. مارتینگل:

فضای احتمال (Ω, F, P) با پالایه (F_t) را در نظر بگیرید. فرایند کادلاگ $X = (X_t)_{t\in[\circ,T]}$ مارتینگل نامیده می‌شود، اگر X سازوار، $E[|X_t|]$ برای هر $t \in [\circ, T]$ متناهی و

$$\forall s > t, \qquad E[X_s \mid F_t] = X_t. \tag{۴.۱}$$

به بیان دیگر، بهترین پیشگو برای مقدار آینده‌ی یک مارتینگل، مقدار فعلی آن است. فرایند وینر (W_t) یک مثال آشنا از مارتینگل‌ها است. اگر در رابطه‌ی (۴.۱) به جای علامت " $=$ "، " $\geq$ " یا " $\leq$ " را قرار دهیم به ترتیب مفاهیم زیر مارتینگل و ابر مارتینگل را به دست می‌آوریم.

تعریف ۱.۴.۶. مارتینگل موضعی:

فرایند کادلاگ و سازوار $X = (X_t)_{t\in[\circ,T]}$، (F_t, P)-مارتینگل موضعی است اگر دنباله‌ای از زمان‌های توقف افزایشی، T_n، وجود داشته باشد که تقریباً به‌طور حتم، $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$ و $X_{t\wedge T_n} 1_{\{T_n > \circ\}}$ برای هر n مارتینگل انتگرال‌پذیر یکنواخت باشد [۴۵].

تعریف ۱.۴.۷. توابع با تغییر (نا)متناهی:

فرض کنید $P = \{a = t_۱ < t_۲ < \cdots < t_{n+۱} = b\}$ یک افراز روی بازه‌ی $[a, b] \subset R$ باشد، تغییر تابع

f بر روی افراز P را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{var}_P(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

اگر $\sup_P \operatorname{var}_P(f)$ بر روی تمامی افرازها متناهی باشد، گوییم f بر $[a,b]$، تغییر متناهی است. در غیر این‌صورت تغییر نامتناهی خواهد بود.

تعریف ۱.۴.۸. فرایند با تغییر (نا)متناهی:

یک فرایند تصادفی را تغییر متناهی گوییم اگر مسیرهای نمونه‌ای آن با احتمال ۱ تغییر متناهی باشند. در غیر اینصورت، فرایند تغییر نامتناهی است. فرایند پواسون، یک مثال از فرایندهای تغییر متناهی و حرکت براونی مثالی شناخته شده از فرایندهای تغییر نامتناهی است [۴۹].

تعریف ۱.۴.۹. نیم مارتینگل:

فرایند کادلاگ و F_t-سازوار $X = (X_t)_{t\geq 0}$ را نیم‌مارتینگل می‌نامیم، اگر بتوان آن را به صورت مجموع دو فرایند M_t و A_t نشان داد به طوری‌که $M_0 = A_0 = 0$ و $X_t = X_0 + M_t + A_t$ که در آن M_t یک مارتینگل موضعی و A_t یک فرایند با تغییر متناهی است [۳۴].

تعریف ۱.۴.۱۰. فرایند چپ (راست) پیوسته:

فرایند تصادفی $X = (X_t)_{t\geq 0}$، فرایندی چپ (راست) پیوسته گفته می‌شود اگر تابع $X(t,\omega)$، $t \geq 0$، برای هر $\omega \in \Omega$ از چپ (راست) پیوسته باشد [۲۵].

تعریف ۱.۴.۱۱. فرایند پیشگو:

فضای احتمال پالایش‌شده‌ی $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, P)$ داده شده است. σ-میدان P تولیدشده بر روی $[0,T]\times\Omega$

توسط تمامی فرایندهای چپ پیوسته سازوار را σ-میدان پیشگو گویند و نگاشت $X : [\circ, T] \times \Omega \to R^d$ که نسبت به P اندازه‌پذیر است را فرایند P-پیشگو گویند [۱۲].

تعریف ۱.۴.۱۲. نمایش پیشگو:

نیم مارتینگل S روی $(\Omega, F, (F_t), P)$ خاصیت نمایش پیشگو را دارد هرگاه برای هر (F_t, P)-مارتینگل موضعی M، فرایند F_t-پیشگوی S-انتگرال‌پذیر H وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$M_t = M_\circ + \int_\circ^t H_u dS_u \qquad t \in [\circ, T]$$

تعریف ۱.۴.۱۳. فرایند تبدیل مارتینگل:

فرایند S فرایندی (F_t, P)-تبدیل مارتینگل است هرگاه یک (F_t, P)-مارتینگل موضعی M و یک فرایند F_t-پیشگوی M-انتگرال‌پذیر H وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$S_t = S_\circ + \int_\circ^t H_s dM_s \qquad t \in [\circ, T]$$

تعریف ۱.۴.۱۴. فرایند پواسون:

فرایند پواسون مثالی اساسی از فرایندهای تصادفی با مسیرهای ناپیوسته است که در ساختن فرایندهای پرشی پیچیده‌تر به کار می‌رود.

فرض کنید $(\tau_i)_{i \geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامتر λ و $T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$. فرایند $(N_t, t \geq \circ)$ با رابطه‌ی

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{t \geq T_n} \tag{۱.۵}$$

فرایند پواسون با شدت λ نامیده می‌شود.

بنابراین فرایند پواسون به‌عنوان یک فرایند شمارشی تعریف می‌شود: یعنی N_t، تعداد زمان‌های تصادفی