بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

۱۳۸۱ /۸/ ۱۴

عنوان:

همگرایی روش مانع لگاریتمی نیوتن

استاد راهنما:

دکتر میرکمال میرنیا

استاد مشاور:

دکتر محمد یعقوب رحیمی

پژوهشگر:

جواد فرضی امین آباد

شهریور ماه ۱۳۸۱

شماره

تقدیم به :

مظهر حیات و طراوت

پدر

مظهر عشق و امید

مادر

و

برادران و خواهران مهربانم

و

به همه قلبهای پاکی که
با چشم های مهربان خود
به مهربانی مرا دیدند
و همواره مشوق من بوده‌اند.

بسمه تعالی

مجله چکیده پایان نامه های ایران

مرکز اطلاعات ومدارک علمی ایران

نام خانوادگی دانشجو : **فرضی امین آباد** نام : **جواد**
عنوان پایان نامه : **همگرایی روشی مانع لگاریتمی نیوتن**
استادراهنما : **دکتر میرکمال میرنیا**
درجه تحصیلی : **کارشناسی ارشد** رشته : **ریاضی** گرایش : **ریاضی کاربردی** محل تحصیل(دانشگاه) : **تبریز** دانشکده : **ریاضی** تاریخ فارغ التحصیلی : **۸۱/۶/۳۱** تعدادصفحه : **۹۷**
کلید واژه ها : **توابع مانع ، جستجوی خطی نادقیق و روشهای مانع**
چکیده : **در روش مانع لگاریتمی نیوتن،گامهای نیوتن برای تابع مانع لگاریتمی به ازای مقدار ثابت پارامتر مانع گرفته می شود و با یک معیار همگرایی معین توقف می کند. سپس پارامتر مانع کاهش می یابد و روند نیوتن تکرار می شود. یک تحلیل مقدماتی نشان می دهد که روش نیوتن با نرخ زبرخطی به کمینه کننده تابع مانع لگاریتمی همگرا نمی شود مگر آنکه به یک همسایگی بسیار کوچک از کمینه کننده برسد. بررسی ساختار هسیان وگرادیان مانع بر حسب زیر فضای گرادیانهای قیود فعال وفضای پوچی وابسته، نشان می دهد که این همسایگی در واقع بسیار بزرگتراست و دلیل همگرایی محلی سریع که در عمل اتفاق می افتد مشخص می شود. بعلاوه، در صورتی که مسأله غیر خطی با یک تابع هدف خطی قالب بندی شود و الگوی کاهش پارامتر مانع به طول گام و معیار همگرایی روند نیوتن مربوط شود نرخ همگرایی الگوریتم مانع لگاریتمی نیوتن زبرخطی است.**

ستایش

الهی سپاس و ستایش مخصوص توست که انسان را تا خود رقم زدی و تا مرز وجودی امکان و وجوب او را فرا خواندی. یاری کن که بر آنچه دانش نداریم دانا و بر دانایی ها دارا شویم و با این دارایی در کمال زیبایی مظهر اسمای حسنای تو شویم و جز جمال جمیل تو در دل شیدای خود غیری نیابیم و در کثرت وجود، واجب الوجودی تو را به نظاره بنشینیم و با بالهای علم و عشق در محضر قدسی و ملکوتی تو به « تعالو » پاسخ بگوییم.

سپاس و تشکر

از همه کسانی که در مطالعه و تحقیق و تنظیم این پایان نامه مرا یاری کردند تشکر می کنم. بخصوص از استاد بسیار عزیزم دکتر میرکمال میرنیا و زحمات بی دریغ ایشان که با تمام وجود از من حمایت کردند و مشوق و راهنمای من در کسب موفقیت در آزمون دکتری دانشگاه تربیت مدرس بودند، از استاد مشاور عزیزم دکتر محمد یعقوب رحیمی که همواره راهنمای دلسوزی در دوران تحصیل و مشوق من برای ادامه تحصیل بودند و با ایده های راهگشای خود مرا یاری می کردند و از استاد نظام الدین مهدوی امیری که این پایان نامه را بدقت مطالعه کردند و داوری آن را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

از همه دوستان عزیزم که در حق من لطف و مهربانی کردند و متحمل زحمت شدند و همه خوبانی که در جلسه دفاع این پایان نامه حضور داشتند و نتوانستم به اندازه عشق والایشان محبت آنان را پاسخ بگویم تشکر و قدردانی می نمایم.

از هم ورودی های خود در دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد، بسیج دانشجویی دانشکده ریاضی، کتابخانه تخصصی دانشکده ریاضی، مرکز رایانه و همه کارکنان وظیفه شناس تشکر می کنم.

از خانواده خواهرم، برادر عزیزم، دوستان مهربان در کلاس اخلاق و موسسه کامپیوتری شهر تشکر می کنم.

و در نهایت از همه دانشجویان عزیزی که از مقاطع و رشته های مختلف با هم آشنایی و دوستی داریم و به مهربانی همدیگر را می شناسیم و همواره پیگیر پایان نامه و آزمون دکتری من بودند تشکر می کنم و برایشان آرزوی موفقیت می نمایم.

جواد فرضی

شهریور ۸۱

مقدمه پژوهشگر

اساس این پژوهش مقاله ای از استیفن رایت [۳۱] تحت عنوان « **همگرایی روش مانع لگاریتمی نیوتن** » است. قسمت های اول این مقاله را در واقع می توان به عنوان یک تصحیح نگرش در موضوع همگرایی روش مانع لگاریتمی نیوتن تلقی کرد.به این معنی که در عمل همگرایی مرتبه دوم روش نیوتن از یک همسایگی بزرگتری از کمینه کننده محلی حاصل می شود در حالی که در تئوری این همسایگی کوچک در نظر گرفته می شود. با این حال قسمت آخر که بحث روی تابع هدف خطی است در نوع خود جدید است. بد حالت بودن هسیان مانع در نزدیکی کمینه کننده مشکل اساسی این روشهاست و در عمل با ماتریسی سر و کار داریم که عدد حالت آن با افزایش تکرارهای الگوریتم به شدت افزایش می یابد و باعث تولید نتایج نادقیق می شود. مقالات زیادی ساختار هسیان مانع را در نزدیکی کمینه کننده مساله بررسی کرده اند که از جمله به[۱٤] و [۱۹] و بخصوص [۲٥] می توان اشاره کرد. در فصل دوم از نتایج [۲٥] استفاده کرده ایم و مروری بر ساختار هسیان مانع صورت گرفته است. با توجه به اینکه در اثبات چند قضیه در فصل٤ به نتایجی از [۲۹] نیاز داشتیم در فصل سوم مروری بر این مقاله ارائه کرده ایم.در فصل اول نیز که شامل تعریفها و مفاهیم اساسی است از [۳۰] و[۳۲] و [۳۳] استفاده کرده ایم و هر مفهوم و تعریفی که به دلیل سادگی یا وضوح بیان نشده باشد مطابق [۳۰] خواهد بود. در فصل چهارم موضوع اصلی ارائه شده است و نتایج عددی هم در فصل٥ ارائه می شود.

فهرست

عنوان صفحه

فصل اول

برنامه ریزی غیرخطی

۱. ۱. برنامه ریزی غیر خطی

مسأله کمینه سازی مقید

$$\min f(x) \qquad (۱.۱)$$
$$c(x) \geq 0$$

را در نظر می گیریم، که در آن $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $c:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

تعریف۱. ۱. مجموعه نقاط شدنی مساله (۱۰۱) به صورت $F=\{x \mid x\in\mathbb{R}^n, c(x)\geq 0\}$ ومجموعه نقاط شدنی اکید نظیر به صورت $F^0=\{x \mid x\in\mathbb{R}^n, c(x)>0\}$ تعریف می شود.

تعریف۱. ۲. بردار x^* یک کمینه کننده محلی (۱.۱) است هرگاه $x^*\in F$ و یک همسایگی N از x^* چنان باشد که به ازای هر $x\in N\bigcap F$، $f(x)\geq f(x^*)$. اگر نامساوی بطور اکید برقرار باشد، x^* یک کمینه کننده محلی اکید (۱۰۱) نامیده می شود.

تعریف۱. ۳. نقطه x^* یک کمینه کننده محلی تنهاست هرگاه $x^*\in F$ ویک همسایگی N از x^* چنان باشدکه x^* تنها کمینه کننده محلی در $N\bigcap F$ باشد.

تعریف۱. ٤. تابع لاگرانژی نظیر (۱ ۱) به صورت

$$L(x,\lambda)=f(x)-\lambda^T c(x) \qquad (۲.۱)$$

تعریف می شود که λ بردار مضارب لاگرانژ نامیده می شود.

تعریف۱. ۵. در نقطه دلخواه $x\in F$ درایه هایی از c که $c_i(x)=0$ ، فعال نامیده می شوند. همچنین با این فرض که x^* کمینه کننده محلی (۱۰۱) است مجموعه اندیسهای قیود فعال در x^* به صورت $B^*=\{i \mid c_i(x^*)=0\}$ تعریف می شود.

تعریف۱. ٦. ماتریس ژاکوبی بردار قیود c و زیر ماتریس ستونهای فعال آن، به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\hat{A}(x) \doteq [\nabla c_i(x)]_{i\in B^*} \quad \text{و} \quad A(x)=[\nabla c_1(x) \mid \dots \mid \nabla c_m(x)] \qquad (۳.۱)$$

تعریف۱. ۷. نقطه مفروض x^* را در نظر می گیریم. گوئیم کیفیت مقید مستقل خطی $(LICQ)$[1] بر قرار است در صورتی که مجموعه گرادیانهای قیود فعال، $\{\nabla c_i(x^*), i\in B^*\}$، مستقل خطی با شند.

توجه می کنیم هرگاه این شرط برقرارباشد هیچکدام از گرادیانهای قیود فعال صفر نیست وهمچنین $LICQ$ معادل است با این که

$$rank(\hat{A}(x^*))=|B^*| \qquad (۴.۱)$$

در این حالت جواب x^* را ناتباهیده می نامند.

[1] .Linear Independence Constraint Qualification

۱. ۲. شرایط لازم مرتبه اول

قضیه۱. فرض کنیم x^*کمینه کننده محلی (۱.۱) باشد وشرط $LICQ$ در x^* برقرار باشد.در این صورت بردار مضارب لاگرانژ λ^* با درایه های λ_i^* چنان وجود دارد که شرایط زیر در (x^*,λ^*) بر قرارند.

$$\nabla_x L(x^*,\lambda^*)=0 \qquad \text{(a .۵ .۱)}$$

$$c_i(x^*)\geq 0 \quad ، i=1,\dots,m \qquad \text{(b .۵ .۱)}$$

$$\lambda_i^*\geq 0 \quad ، i=1,\dots,m \qquad \text{(c .۵ .۱)}$$

$$\lambda_i^* c_i(x^*)=0 \quad ، i=1,\dots,m \qquad \text{(d .۵ .۱)}$$

اثبات . به [۳۰] رجوع کنید.

شرایط (۵.۱) شرایط کاروش – کهن – تاکر[1] KKT وشرط (۱. ۵. d) شرط مکمل نامیده می شود.

تعریف۱. ۸. اگر x^* کمینه کننده محلی (۱۰۱) باشد و بردار مضارب لاگرانژ λ^* در (۱. ۵) صدق کند،گوئیم شرط مکمل اکید برقرار است هرگاه دقیقاً یکی از درایه های λ_i^* یا $c_i(x^*)$ ، $i=1,\dots,m$، صفر باشد. به عبارت دیگر،

$$\lambda_i^*+c_i(x^*)>0 \qquad (٦.١)$$

بردار مضارب لاگرانژ همیشه منحصر بفرد نیست،یعنی ممکن است به ازای یک کمینه کننده محلی x^* دو یا چند λ^* وجود داشته باشند. تحت شرایطی از جمله $LICQ$ این بردار منحصربفرد است.

لم ۱. فرض کنیم x^*کمینه کننده محلی (۱۰۱) باشد وشرط $LICQ$ در x^* بر قرار باشد در این صورت بردار مضاراب لاگرانژ منحصر بفرد است .

اثبات. با توجه به (۱. ۵) داریم

$$\nabla f(x^*)=\sum_{i\in B^*}\lambda_i^*\nabla c_i(x^*)$$

حال اگر u^* نیز در شرایط فوق صدق کند داریم

$$\nabla f(x^*)=\sum_{i\in B^*}u_i^*\nabla c_i(x^*)$$

روابط اخیر را از هم کم می کنیم و داریم

$$\sum_{i\in B^*}(\lambda_i^*-u_i^*)\nabla c_i(x^*)=0$$

با توجه به استقلال خطی $[\nabla c_i(x)]_{i\in B^*}$ واضح است که $\lambda_i^*=u_i^*$. □

[1] . Karush-Kuhn-Tucker

۱. ۳. دنباله های شدنی وجهت های حدی

تعریف۱. ۹. برای نقطه شدنی دلخواه x دنباله $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ ، $z_k \in \mathbb{R}^n$ ،را یک دنباله شدنی گوئیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند؛

۱. به ازای هر k ، $z_k \neq x$.

۲. $\lim_{k\to\infty} z_k = x$.

۳. z_k برای تمام مقادیر بحد کافی بزرگ k شدنی باشد.

برای مراجعه های بعدی مجموعه تمام دنباله های شدنی x را با $T(x)$ نشان می دهیم.توجه می کنیم یک کمینه کننده محلی (۱.۱) نقطه ای است که تمام دنباله های شدنی در آن دارای این خاصیت باشند که برای k بحدکافی بزرگ $f(z_k) \geq f(x)$.

تعریف ۱ .۱۰. d را جهت حدی دنباله شدنی $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ می گویند،در صورتی که به ازای زیر دنباله ای از آن مانند s_d داشته باشیم

$$\lim_{z_k\in s_d} \frac{z_k - x}{\| z_k - x \|} = d \qquad (۷.۱)$$

بطور کلی یک دنباله شدنی لااقل یک جهت حدی دارد ومی تواند بیش از یکی نیز داشته باشد.

قضیه۲. اگر x^* جواب محلی (۱.۱) باشد، در این صورت دنباله شدنی $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ در $T(x^*)$ دررابطه

$$\nabla f(x^*)^T d \geq 0 \qquad (۸.۱)$$

صدق می کند،که d جهت حدی دلخواه از دنباله شدنی $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ است.

اثبات. به [۳۰] رجوع کنید.

این قضیه به ما می گوید که چرا در قالب بندی شرایط بهینگی،می توان قیود غیرفعال اکید(قیودی که $c_i(x^*) > 0$) را نادیده گرفت .قضیه زیر نشان می دهد وقتی *کیفیت مقید مستقل خطی* برقرار باشد، یک راه سرراست برای تعیین مجموعه تمام جهتهای حدی ممکن d بر حسب گرادیانهای قیود فعال در x^* وجود دارد.

قضیه۳. دو گزاره زیر درست هستند.

۱. اگر $d \in \mathbb{R}^n$ یک جهت حدی یک دنباله شدنی باشد، در این صورت

$$d^T \nabla c_i(x^*) \geq 0 \qquad ، i = 1,\dots,q \qquad (۹.۱)$$

۲. اگردر (۱. ۹) داشته باشیم $\| d \| = 1$ وشرایط $LICQ$ برقرار باشد،در این صورت d یک جهت حدی از یک دنباله شدنی است.

اثبات. به [۳۰] رجوع کنید.

برای مراجعه های بعدی تعریف زیر را می آوریم .

تعریف۱. ۱۱. برای نقطه x^* مجموعه F_1 به صورت زیر تعریف می شود

$$F_1 = \{\alpha d \mid \alpha > 0, d^T \nabla c_i(x^*) \geq 0, i \in B^*\} \qquad (۱۰.۱)$$

توجه داریم که F_1 یک مخروط است.درواقع وقتی *کیفیت مقید مستقل خطی* برقرار باشد مخروط F_1 در نقطه x^* بر مجموعه شدنی مماس است.

قضیه٤. شرط لازم وکافی برای آنکه هیچ جهت $d \in F_1$ وجود نداشته باشدکه $d^T \nabla f^* < 0$ آن است که بردار $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i \in B^*} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*)$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad ، i \in B^*$$

توجه می کنیم که λ^* بردار مضارب لاگرانژ است.

اثبات. به [۳۰] رجوع کنید.

تعریف۱. ۱۲. با فرض اینکه بردار مضارب لاگرانژ λ^* در شرایط KKT صدق می کند،زیر مجموعه $F_2(\lambda^*)$ از F_1 را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$F_2(\lambda^*) = \{w \in F_1 \mid \nabla c_i(x^*)^T w = 0, i \in B^*, \lambda_i^* > 0\} \qquad (۱۱.۱)$$

و یا به طور معادل داریم

$$w \in F_2(\lambda^*) \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla c_i(x^*)^T w = 0, & \lambda_i^* > 0, i \in B^* \\ \\ \nabla c_i(x^*)^T w \geq 0, & \lambda_i^* = 0, i \in B^* \end{cases}$$

بنابراین به طور کلی داریم

$$w \in F_2(\lambda^*) \Rightarrow \lambda_i^* \nabla c_i(x^*)^T w = 0, \qquad i = 1, \ldots, m$$

بنابراین از شرایط KKT وتعریف تابع لاگرانژی ، داریم

$$w \in F_2(\lambda^*) \Rightarrow w^T \nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* w^T \nabla c_i(x^*) = 0 \qquad (۱۲.۱)$$

ولذا مجموعه $F_2(\lambda^*)$ شامل جهت هایی از F_1 است که از روی اطلاعات مشتقات اول معلوم نیست که f در طول آنها افزایش یا کاهش خواهد یافت.

۱. ٤. شرایط لازم مرتبه دوم

قضیه زیر یک شرط لازم برای بهینگی، شامل مشتقات مرتبه دوم، را بیان می کند که بر اساس آن اگر x^* یک کمینه کننده محلی(۱.۱) باشد آنگاه انحنای تابع لاگرانژی در طول جهت های واقع در $F_2(\lambda^*)$ نامنفی باشد.

قضیه٥. فرض کنید x^* یک کمینه کننده محلی(۱.۱) باشد وشرایط $LICQ$ برقرار باشند.بعلاوه فرض کنید λ^* بردار مضارب لاگرانژ باشد به طوری که شرایط KKTبرقرار باشد و $F_2(\lambda^*)$ به صورت فوق تعریف شود. در این صورت داریم

$$w^T \nabla_{xx} L(x^*, \lambda^*) w \geq 0 \quad \text{،} \; w \in F_2(\lambda^*) \quad \text{برای هر} \qquad (۱۳.۱)$$

اثبات. به [۳۰] رجوع کنید.

۱. ۵. شرایط کافی مرتبه دوم

شرایط کافی، شرایطی روی f و c هستند که مطمئن می سازند x^* یک کمینه کننده محلی مساله (۱.۱) است. شرایط کافی مرتبه دوم که در قضیه بعدی بیان می شود شباهت زیادی به شرایط لازم دارد اما تفاوت آن این است که $LICQ$ لازم نیست ونامساوی در (۱. ۱۳) به صورت اکید بر قرار است .

قضیه۶. فرض کنید برای نقطه شدنی $x^* \in \mathbb{R}^n$ بردار مضارب لاگرانژ λ^* چنان هست که شرایط KKT برقرارند وهمچنین فرض کنید

$$w^T \nabla_{xx} L(x^*, \lambda^*) w > 0 \quad \text{،} \; w \in F_2(\lambda^*) \; \text{و} \; w \neq 0 \quad \text{برای هر} \qquad (۱٤.۱)$$

در این صورت x^* یک کمینه کننده محلی اکید مسأله (۱ ۱) است.

اثبات. به [۳۰] رجوع کنید.

۱. ٦. شرایط مرتبه دوم وهسیان های تصویر شده

شرایط مرتبه دوم گاهی به شکل ضعیفتر اما در عین حال ساده تر برای بررسی (۱. ۱۳) و (۱. ١٤) بیان می شوند. در این مورد یک تصویر دو طرفه از هسیان لاگرانژی $\nabla_{xx} L(x^*, \lambda^*)$ به روی زیر فضاهای وابسته به $F_2(\lambda^*)$، شکل داده می شود. ساده ترین حالت وقتی است که مضارب λ^* که در شرایط KKT صدق می کند منحصر بفرد باشد (که برای مثال مطابق لم۱ وقتی شرط $LICQ$ برقرار باشد اتفاق می افتد)ونیز شرط مکمل برقرار باشد. در این حالت تعریف $F_2(\lambda^*)$ به صورت ساده تر زیر بیان می شود

$$F_2(\lambda^*) = Null[\nabla c_i(x^*)^T]_{i=1}^{q} = Null\,\hat{A}(x^*) \qquad (۱۵.۱)$$

به عبارت دیگر $F_2(\lambda^*)$ فضای پوچی ماتریسی است که سطرهایش گرادیانهای قیود فعال در x^* است. بنابراین می توانیم ماتریس با رتبه کامل Z را طوری تعریف کنیم که فضای ستونی آن فضای $F_2(\lambda^*)$ را بوجود آورد. برای هر بردار $w \in F_2(\lambda^*)$ می توان بردار u را چنان یافت که $w = Zu$ و برعکس، برای هر u ، $Zu \in F_2(\lambda^*)$. بنابراین شرط (۱. ۱۳) در قضیه۵ را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$u^T Z^T \nabla_{xx} L(x^*, \lambda^*) Z u \geq 0 \qquad \text{برای هر } u$$

یا به بیان دیگر ماتریس

$$Z^T \nabla_{xx} L(x^*, \lambda^*) Z \quad \text{نیمه معین مثبت است.} \qquad (۱٦.۱)$$

به طور مشابه شرط(۱. ١٤) را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$Z^T \nabla_{xx} L(x^*, \lambda^*) Z \quad \text{معین مثبت است.} \qquad (۱۷.۱)$$